中国科学院研究生教学丛书

测度论讲义

（第二版）

严加安 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书系统介绍一般可测空间和 Hausdorff 空间上的测度与积分、测度的弱收敛和淡收敛，以及与测度论有关的概率论基础知识. 第二版增加了第 8 章和第 9 章，分别介绍离散时间鞅、Hilbert 空间和 Banach 空间上的测度. 书中收录了作者在测度论方面的一些研究成果.

本书适合作为概率统计专业和其他数学专业的研究生教材，也可作为高等学校数学教师和概率研究工作者的教学和科研参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

测度论讲义/严加安著. —2 版. — 北京：科学出版社，2004
(中国科学院研究生教学丛书)
ISBN 7-03-013409-5

Ⅰ. 测… Ⅱ. 严… Ⅲ. 测度论讲义 - 高等学校 - 教材
Ⅳ.O174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 037813 号

责任编辑：毕　颖　李鹏奇 / 责任校对：张　琪
责任印制：安春生 / 封面设计：槐寿明

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铁成印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1998 年10月第　一　版　　开本：850×1168 1/32
2004 年 8 月第　二　版　　印张：9 1/2
2004 年 8 月第三次印刷　　字数：243 000
印数：5 201—8 200

定价: 20.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在21世纪顺利地实施"科教兴国"和"可持续发展"战略，实现邓小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成为中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好"三个基地"的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才．

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务．研究生教材建设是提高研究生培养质量

的一项重要的基础性工作. 由于各种原因, 目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况, 中国科学院组织了一批在科学前沿工作, 同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材, 并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力, 出版一套面向 21 世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性, 同时也兼顾前沿性, 使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识, 也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书, 不仅适合于在校研究生学习使用, 也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言, 下自成蹊.” 我相信, 通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花, 也将似润物春雨, 滋养莘莘学子的心田, 把他们引向科学的殿堂, 不仅为科学院, 也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

第二版前言

本版改正了第一版中的排印错误，并在内容上进行了调整和扩充. 将第一版第 7 章 “Kolmogorov 相容性定理及 Tulcea 定理的推广” 一节移到了第 4 章；在第 3 章增加了 “空间 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 和 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m)$ 的对偶” 一节；在第 4 章增加了 “概率测度序列的投影极限” 和 “随机 Daniell 积分及其核表示” 两节. 此外，还新加了第 8 章和第 9 章. 第 8 章是将第一版第 7 章 “经典鞅论” 一节加以扩充形成的，部分内容取自 Hall 和 Heyde 所著《Martingale Limit Theory and Its Application》一书. 第 9 章主要取材于黄志远和严加安所著《无穷维随机分析引论》第 1 章的部分内容. 在本版的部分章节中还收入了 Dudley 所著《Real Analysis and Probability》和 Kallenberg 所著《Foundations of Modern Probability》书中的某些结果和作者在测度论方面的一些研究成果.

在准备新版期间，作者得到了国家科技部 973 项目 “核心数学的若干前沿问题” 的资助，特此感谢.

严加安

2004 年 3 月于北京

第一版前言

测度论是现代数学的一个重要分支，它的主要奠基人是法国数学家 Lebesgue (1875—1941). 受他的老师 Borel 关于容量研究的深刻影响，他在 1902 年的论文 ≪积分、长度与面积≫ 中，首次把 $\mathbf{R}^2$ 中的长度和面积概念推广为一般 Borel 集的 Lebesgue 测度，并定义了可测函数关于 Lebesgue 测度的积分. 他用累次积分计算重积分的结果后来被 Fubini(1907) 完善为一般的定理. Radon(1913) 进一步研究了 $\mathbf{R}^d$ 中在紧集上为有穷的一般 Borel 测度 (Radon 测度). 抽象可测空间上的测度和符号测度概念是 Fréchet(1915) 最先提出的. Radon-Nikodym(1930) 给出了符号测度为一不定积分的充要条件 (Radon-Nikodym 定理). 在早期的测度论发展史中，积分概念的两个推广值得一提. 其一是 Daniell(1918) 从一类函数上的正线性泛函出发研究了测度和积分；其二是 Bochner(1933) 和 Pettis(1938) 定义了 Banach 空间值函数关于测度的积分. 到 20 世纪 30 年代，测度与积分理论已趋于成熟，并在概率论、泛函分析和调和分析中得到广泛应用. 例如，Kolmogorov(1933) 从测度论观点出发创立了概率公理化体系，为现代概率论奠定了数学基础. 其中非常重要的条件数学期望概念就源于测度论中的 Radon-Nikodym 定理. 随着时间的推移，测度论在数学中的基础性地位愈来愈显示出来. 50 年代以后发展起来的无穷维空间中的测度和泛函积分成

了研究量子物理的重要手段和工具.

本书是为概率统计专业和其它数学专业的研究生编写的一部测度论教材，它的前身是作者的 ≪ 测度与积分 ≫(陕西师大出版社，1988). 这里改正了原书中出现的错误，并对原书的第五章作了较大修改，还在第三章、第六章及第七章中增加了若干新的内容. 全书内容分为三个部分：(1) 一至四章介绍一般可测空间中的测度与积分. 这一部分内容与通常测度论教材大体相当，但第三章中的 Daniell 积分、Bochner 积分和 Pettis 积分以及第四章中的 Tulcea 定理在通常测度论教材中是不易找到的. (2) 第五章系统、完整地介绍了 Hausdorff 空间中的测度和积分. 这一部分内容对初学者有一定难度，教师在讲授时可以跳过它. (3) 第六章介绍有关测度的弱收敛和淡收敛的主要结果；第七章介绍与测度论有关的概率论基础知识，如条件数学期望，正则条件概率，一致可积性，本性上确界，解析集及经典鞅论等. 这一部分内容是专门为概率统计专业的研究生设计的，在对其它数学专业的研究生讲授时可以略去. 本书几乎每一节都附有一定数量的习题，其中不少是对正文的补充，有些习题还在一些定理的证明中被引用.

本书的写作和出版分别得到了中国国家自然科学基金 (项目编号 79790130) 和中国科学院研究生教材出版基金的资助，特此表示感谢.

严加安

1997 年 8 月于北京

目　录

第 1 章　集类与测度

1.1 集合运算与集类

集合是现代数学的最基本的概念之一. 任何一组彼此可以区别的事物便构成一个集合. 在测度论中, 我们通常在某一 (或某些) 给定的集合 (称为**空间**) 中讨论问题.

1.1.1　令 Ω 为一给定的非空集合, 其元素以 ω 记之. 设 A 为 Ω 的子集, 我们用 $\omega \in A$ 或 $\omega \notin A$ 分别表示 ω 属于 A 或不属于 A. 不含任何元素的集合称为**空集**, 以 $\emptyset$ 记之. 我们用 $A \supset B$ 或 $B \subset A$ 表示 B 是 A 的子集, 用

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ A \triangle B$$

分别表示 A 与 B 的**交**、**并**、**差** 和**对称差**, 即

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且} \omega \in B\},\ A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或} \omega \in B\},$$
$$A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且} \omega \notin B\},\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

我们用 A^c 表示 $\Omega \setminus A$, 并称 A^c 为 A(在 Ω 中) 的**余集**, 于是有 $A \setminus B = A \cap B^c$. 有时也用 AB 表示 $A \cap B$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B **互不相交**. 显然有 $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = \Omega$.

1.1.2　集合交和并运算满足如下的**交换律、分配律及结合律**:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A;$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

此外，它们关于余集运算有如下的 **de Morgan 公式**:

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c,\ (A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A^c)^c=A.$$

1.1.3 以 Ω 的某些子集为元素的集合称为 (Ω 上的)**集类**. 今后，如无特别说明，总假定集类是非空的，即至少含一个元素 (可以是空集). 设 $\{A_i,\ i\in I\}$ 为一集类，其中 I 为**指标集**, 它用以给集类元素 "编号", 则可如下定义集类中元素的交与并:

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{\omega\,|\,\omega\in A_i,\ 对一切\, i\in I\},$$
$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{\omega\,|\,\omega\in A_i,\ 对某一\, i\in I\}.$$

我们有相应的交换律、分配律、结合律及 de Morgan 公式.

1.1.4 设 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为一集合序列. 若对每个 n, 有 $A_n\subset A_{n+1}$ (相应地，$A_n\supset A_{n+1}$), 则称 (A_n) 为**单调增**(相应地，**单调降**). 二者统称为**单调列**. 对单调增或单调降序列 (A_n), 我们分别令 $A=\bigcup_n A_n$ 或 $A=\bigcap_n A_n$, 称 A 为 (A_n) 的**极限**, 通常记为 $A_n\uparrow A$ 或 $A_n\downarrow A$. 一般地，对任一集列 (A_n), 令

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

分别称其为 (A_n) 的**上极限** 和**下极限**. 显然有

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\{\omega\,|\,\omega\ 属于无穷多个 A_n\},$$
$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\{\omega\,|\,\omega\ 至多不属于有限多个 A_n\},$$

从而恒有 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$. 若 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$, 称 (A_n) 的极限存在, 并用 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 表示 (A_n) 的**极限**(即令 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$).

1.1.5 设 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为一集列. 若 (A_n) 两两不相交 (即 $n\neq m\Rightarrow A_n\cap A_m=\emptyset$), 则常用 $\sum_n A_n$ 表示 $\bigcup_n A_n$. 若有 $\sum_n A_n=\Omega$, 称 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为 Ω 的一个**划分**.

对任一集列 (A_n), 令

$$B_1=A_1,\ B_n=A_nA_1^c\cdots A_{n-1}^c\,,\ n\geq 2,$$

则 $\{B_n,\ n\geq 1\}$ 中集合两两不相交，且有 $\sum_n B_n=\bigcup_n A_n$. 这一将可列并表示为可列不交并的技巧是很有用的.

1.1.6 设 $\mathcal{C}$ 为一集类 (约定是非空的). 如果 $A,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C}$ (从而 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{C}\Rightarrow A_1A_2\cdots A_n\in\mathcal{C}$), 称 $\mathcal{C}$ **对有限交封闭**. 如果 $A_n\in\mathcal{C},n\geq 1\Rightarrow\bigcap_n A_n\in\mathcal{C}$, 称 $\mathcal{C}$ **对可列交封闭**. 类似定义 "对有限并封闭" 及 "对单调极限封闭" 等概念. 令

$$\mathcal{C}_{\cap f}=\left\{A\,\middle|\,A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\,,A_i\in\mathcal{C},\ i=1,\cdots,n,\ n\geq 1\right\},$$

则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 对有限交封闭，我们称 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 为用有限交运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 类似地，我们用

$$\mathcal{C}_{\cup f},\ \mathcal{C}_{\Sigma f},\ \mathcal{C}_{\delta},\ \mathcal{C}_{\sigma},\ \mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$$

分别表示用有限并、有限不交并、可列交、可列并及可列不交并封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 此外，我们用 $\mathcal{C}_{\cap f,\cup f}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\cap f})_{\cup f}$, 用 $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\sigma})_{\delta}$. 今后常用这些记号，读者应熟悉并牢记它们.

1.1.7 命题 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，则有如下结论:

(1) $\mathcal{C}_{\cap f,\cup f}=\mathcal{C}_{\cup f,\cap f}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭，则 $\mathcal{C}_{\cup f},\mathcal{C}_{\Sigma f},\mathcal{C}_{\sigma}$ 及 $\mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$ 亦然;

(3) 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭，则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 及 $\mathcal{C}_{\delta}$ 亦然.

证 直接从集合的交和并的分配律推得.

现在我们用对集合运算的封闭性来划分不同类型的集类. 下面是测度论中常用的一些集类的定义.

1.1.8 定义 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 称 $\mathcal{C}$ 为 **π 类**, 如果它对有限交封闭.

(2) 称 $\mathcal{C}$ 为**半环**, 如果 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 且有

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C},\ A \setminus B \in \mathcal{C}_{\Sigma f}.$$

(3) 称 $\mathcal{C}$ 为**半代数**, 如果它是半环, 且 $\Omega \in \mathcal{C}$.

(4) 称 $\mathcal{C}$ 为**代数(或域)**, 如果它对有限交及取余集运算封闭, 且有 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$ (由此推知它对有限并及差运算也封闭).

(5) 称 $\mathcal{C}$ 为 **σ 代数**, 如果它对可列交及取余集运算封闭, 且有 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$ (由此推知它对可列并及差运算也封闭).

(6) 称 $\mathcal{C}$ 为**单调类**, 如果它对单调序列极限封闭 (即 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1, A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$).

(7) 称 $\mathcal{C}$ 为 **λ 类**, 如果它满足下列条件:

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{C},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$;

(iii) $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1,\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

易知: σ 代数为 λ 类, λ 类为单调类.

1.1.9 例 设 $\mathbf{R}$ 为实直线 (即 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$), 令

$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbf{R}\},\ \mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(a, b] \mid a \leq b, a, b \in \mathbf{R}\},$$

则 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 及 $\mathcal{C}_3$ 为 π 类, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 为半环, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\mathbf{R}\}$ 为半代数.

习 题

1.1.1 证明:

(1) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

(2) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;

(3) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

1.1.2 证明:

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup_{n\to\infty} B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n).$$

1.1.3 证明对可列不交并封闭的代数为 σ 代数.

1.1.4 若 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类或同时为 π 类和 λ 类, 则 $\mathcal{C}$ 为 σ 代数.

1.1.5 设 $\mathcal{C}$ 为半代数, 则 $\mathcal{C}_{\Sigma f}$ 为代数.

1.1.6 λ 类定义中的条件 (i) 及 (ii) 等价于如下两条件:

(i)$'$ $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$;

(ii)$'$ $A, B \in \mathcal{C},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$.

1.1.7 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 且 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 令

$$\mathcal{G} = \left\{ A \,\middle|\, A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j^c \right),\ A_i, B_j \in \mathcal{C},\right.$$
$$\left. 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m,\ n, m \geq 1 \right\},$$

则 $\mathcal{G} \supset \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{G}$ 为半环. 特别若 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭, 则 $\{A \cap B^c \mid A, B \in \mathcal{C}\}$ 为半环.

1.2 单调类定理 (集合形式)

设 $\{\mathcal{C}_i \mid i \in I\}$ 为 Ω 上一族集类, 若每个集类 $\mathcal{C}_i$ 对某种集合运算封闭, 则其交 $\bigcap_i \mathcal{C}_i$ 亦然. 于是对 Ω 上的任一非空集类 $\mathcal{C}$, 存在包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数、最小 λ 类和最小单调类, 我们分别称之为**由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数、λ 类和单调类**, 并分别用 $\sigma(\mathcal{C}), \lambda(\mathcal{C})$ 和 $m(\mathcal{C})$

记之. 我们恒有 $m(\mathcal{C}) \subset \lambda(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. 本节主要研究在什么条件下有 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

1.2.1 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数, 则 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为一 π 类, 则 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证 (1) 令

$$\mathcal{G}_1 = \{A \mid A \in m(\mathcal{C}),\, A^c \in m(\mathcal{C}),\, A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\},$$

则 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_1$, 且 $\mathcal{G}_1$ 为单调类, 故 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{G}_2 = \{A \mid A \in m(\mathcal{C}),\, A \cap B \in m(\mathcal{C}), \forall B \in m(\mathcal{C})\},$$

则由上所证 $\mathcal{G}_1 = m(\mathcal{C})$ 知, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 但 $\mathcal{G}_2$ 为单调类, 故 $\mathcal{G}_2 = m(\mathcal{C})$. 综上所证, 我们有

$$A \in m(\mathcal{C}) \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in m(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}),$$

即 $m(\mathcal{C})$ 为一代数, 从而 $m(\mathcal{C})$ 为 σ 代数 (习题 1.1.4), 因此有 $m(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立, 故最终有 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 令

$$\mathcal{G}_1 = \{A \mid A \in \lambda(\mathcal{C}),\, A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{C}\},$$

则 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_1$, 且 $\mathcal{G}_1$ 为 λ 类, 故 $\mathcal{G}_1 = \lambda(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{G}_2 = \{A \mid A \in \lambda(\mathcal{C}),\, A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}), \forall B \in \lambda(\mathcal{C})\},$$

则由上所证 $\mathcal{G}_1 = \lambda(\mathcal{C})$ 知, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_2$. 但 $\mathcal{G}_2$ 为 λ 类, 故 $\mathcal{G}_2 = \lambda(\mathcal{C})$. 于是 $\lambda(\mathcal{C})$ 为 π 类, 从而 $\lambda(\mathcal{C})$ 为 σ 代数 (习题 1.1.4), 因此有 $\lambda(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立, 故最终有 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

此定理称为**单调类定理**. 它表明: 为验证某 σ 代数 $\mathcal{F}$ 中元素有某种性质, 只需验证: (1) 有一生成 $\mathcal{F}$ 的代数 (π 类)$\mathcal{C}$, 其元素有该性质; (2) 有该性质的集合全体构成一单调类 (相应地, λ 类). 而这后二者的验证往往比较容易. 单调类定理是测度论中的一个重要的证明工具. 今后我们将陆续给出它的应用.

作为定理 1.2.1 的一个简单推论, 我们有单调类定理的如下更有用的形式.

1.2.2 定理 设 $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ 为两个集类, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数, 且 $\mathcal{F}$ 为单调类, 则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π 类且 $\mathcal{F}$ 为 λ 类, 则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

从定理 1.2.1 的证明看出, 我们可以给出使 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 成立的充要条件.

1.2.3 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A,\, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

由此定理, 我们还可推得如下定理.

1.2.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A,\, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

证 (1) 条件的必要性显然，往证条件的充分性. 设条件成立. 令 $\mathcal{D}=\{A^c\,|\,A\in\mathcal{C}\}$, $\mathcal{G}=\{A|A^c\in m(\mathcal{C})\}$. 则 $\mathcal{G}$ 为单调类，且 $\mathcal{D}\subset\mathcal{G}$, 故 $m(\mathcal{D})\subset\mathcal{G}$. 这表明 $A\in m(\mathcal{D})\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$. 同理有 $A\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{D})$. 于是有 $m(\mathcal{D})=\{A\,|\,A^c\in m(\mathcal{C})\}$. 故由定理 1.2.3(1) 推得 $m(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{D})$. 但依假定， $\mathcal{D}\subset m(\mathcal{C}),\mathcal{C}\subset m(\mathcal{D})$. 于是有 $m(\mathcal{C})=m(\mathcal{D})$, 从而最终有 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{C})$. (2) 的证明类似.

上述两个定理过于一般，实际难以应用，但它们的下述推论是有用的 (例如见下面的例 1.2.6 及定理 1.6.3). 需要指出：如果不首先建立定理 1.2.3 及 1.2.4, 那么是不易发现定理 1.2.5 的.

1.2.5 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 若它满足下列条件之一，则有 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$:

(1) $A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C},\ A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\delta$;

(2) $A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C},\ A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\sigma$.

(关于记号 $\mathcal{C}_\delta$ 及 $\mathcal{C}_\sigma$ 见 1.1.6)

证 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭，则 $\mathcal{C}_\delta\subset m(\mathcal{C})$; 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭，则 $\mathcal{C}_\sigma\subset m(\mathcal{C})$. 因此条件 (1) 及 (2) 分别蕴含定理 1.2.3 及 1.2.4 的 (1) 中条件，定理得证.

1.2.6 例 设 X 为一距离空间，$\mathcal{F}$ 表示 X 中闭集全体，$\mathcal{G}$ 表示 X 中开集全体. 显然有 $\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{G})$, 我们称它为 X 的 **Borel $\boldsymbol{\sigma}$ 代数**, 记为 $\mathcal{B}(X)$. 显然 $\mathcal{G}$ 及 $\mathcal{F}$ 分别满足定理 1.2.5 的条件 (1) 及 (2), 于是我们有 $m(\mathcal{F})=m(\mathcal{G})=\mathcal{B}(X)$. 但这一结果并不能从定理 1.2.1 推得. 由此可见，我们将经典的单调类定理进行推广是有意义的.

下面引进可测空间、可分 σ 代数及原子集合概念.

1.2.7 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ 代数，称序偶 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一**可测空间**, $\mathcal{F}$ 中的元称为 **$\mathcal{F}$ 可测集**. 称 σ 代数 $\mathcal{F}$ 为**可分的**(或**可数生成的**), 如果存在 $\mathcal{F}$ 的一可数子类 $\mathcal{C}$, 使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$. 若 $\mathcal{F}$ 可分，称 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为**可分可测空间**.

注意：可分 σ 代数的元素未必是可数多个.

由习题 1.1.7 及 1.1.5 易知：若 $\mathcal{F}$ 可分，则存在一代数 $\mathcal{C}$, 其元素个数至多可数，使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$.

1.2.8 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间，对任一 $\omega\in\Omega$, 令

$$\mathcal{F}_\omega=\{B\in\mathcal{F}\,|\,\omega\in B\},\ A(\omega)=\bigcap_{B\in\mathcal{F}_\omega}B,$$

称 $A(\omega)$ 为含 ω 的 $\mathcal{F}$**原子**.

请读者证明下述结论:

(1) 设 $\omega,\omega'\in\Omega$, 则或者 $A(\omega)=A(\omega')$, 或者 $A(\omega)\cap A(\omega')=\emptyset$;

(2) 设 $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的代数. 对任何 $\omega\in\Omega$, 令 $\mathcal{C}_\omega=\{B\in\mathcal{C}\,|\,\omega\in B\}$, 则有

$$A(\omega)=\bigcap_{B\in\mathcal{C}_\omega}B.$$

特别，若 $\mathcal{F}$ 可分，则每个 $\mathcal{F}$ 原子属于 $\mathcal{F}$.

1.2.9 定义 一可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 称为**可离的**, 如果它的每个原子都是单点集. 两个可测空间称为**同构**, 如果在两者之间存在一双方单值双方可测的满射 (这样的映射称为**可测同构**).

下一引理表明：任一可分且可离的可测空间同构于 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 的某可测子空间.

1.2.10 引理 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可分且可离的可测空间，则 $(E,\mathcal{E})$ 同构于 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 的某可测子空间. 更确切地说，设 $\{A_n,n\geq1\}$ 为 E 上生成 $\mathcal{E}$ 的代数，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}I_{A_n}(x),$$

则 f 为 $(E,\mathcal{E})$ 到 $(f(E),\mathcal{B}(f(E)))$ 上的可测同构. 这里, $\mathcal{B}(f(E))=f(E)\cap\mathcal{B}(R)$(见下面的习题 1.2.1).

证 显然 f 为 $(E,\mathcal{E})$ 到 $(f(E),\mathcal{B}(f(E)))$ 上的双方单值可测映射. 为证 f^{-1} 可测, 只需证 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(E)))=\mathcal{E}$. 由于 $\{A_n,n\geq 1\}$ 在 E 上生成 $\mathcal{E}$, 只需证每个 A_n 属于 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(E)))$. 令 G_n 表示 $[0,\frac{1}{2}]$ 中三进位展开中第 n 项为 1 的实数全体, 即 $G_1=[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$,

$$G_n=\Big[\frac{1}{3^n},\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\Big]\bigcup\Big[\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}},\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\Big]$$
$$\bigcup\cdots\bigcup\Big[\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{3},\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{3}\Big],\quad n\geq 2,$$

则 $G_n\in\mathcal{B}(R)$, 从而 $G_n\cap f(E)\in\mathcal{B}(f(E))$. 我们有 $A_n=f^{-1}(G_n)=f^{-1}(G_n\cap f(E))$, 由此推得引理的结论.

习 题

1.2.1 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类, $A\subset\Omega$. 令

$$A\cap\mathcal{C}=\{A\cap B\,|\,B\in\mathcal{C}\}$$

(这一记号以后常用到), 并用 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$ 表示 $A\cap\mathcal{C}$(视为 A 上集类) 在 A 上生成的 σ 代数, 则有

$$\sigma_A(A\cap\mathcal{C})=A\cap\sigma(\mathcal{C}).$$

对 $m(\mathcal{C})$ 和 $\lambda(\mathcal{C})$ 亦有类似结果.

1.2.2 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ 代数, $\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_n\cap A_m=\emptyset,n\neq m,\sum_n A_n=\Omega$), 则对任何 $B\in\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})$, 存在 $B_n\in\mathcal{F},n=1,2,\cdots$, 使得

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_n).$$

1.2.3 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 则对任何 $A\in\sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$.

1.2.4 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则对任何 $A\in m(\mathcal{C})$, 存在 $B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$. (提示: 令 $\mathcal{G}$ 表示具有所说性质的集合 A 全体, 证明 $\mathcal{G}$ 为单调类.)

1.2.5 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则下列二条件等价:

(1) $\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

(2) $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$; $A,B\in\mathcal{C}$, $A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

1.2.6 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 如果

$$A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}_{\Sigma\sigma},$$

则有 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$.(提示: 利用习题 1.1.6.)

1.3 测度与非负集函数

学过实分析的人都知道: Lebesgue 测度是线段长度概念的延伸 (或更一般地, 是欧氏空间中面积或体积概念的延伸). 下面我们将要引入的测度概念则是 Lebesgue 测度的抽象化.

1.3.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, μ 为定义于 $\mathcal{F}$ 取值于 $\overline{\mathbf{R}}_+=[0,\infty]$ 的函数. 如果 $\mu(\emptyset)=0$ 且 μ 有**可数可加性**或 **$\boldsymbol{\sigma}$ 可加性**, 即

$$A_n\in\mathcal{F},\,n\geq 1,\ A_n\cap A_m=\emptyset,n\neq m\Rightarrow$$
$$\mu\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

则称 μ 为 Ω 上的 (或 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的)**测度**.

设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度, 称三元组 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为**测度空间**. 若 $\mu(\Omega)<\infty$, 则称 μ 为**有限测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为**有限测度空间**. 若 $\mu(\Omega)=1$, 则称 μ 为**概率测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为**概率空间**. 若存在 $A_n\in\mathcal{F}$, $n\geq 1$, 使得 $\bigcup_n A_n=\Omega$, 且使 $\mu(A_n)<\infty$ 对一切 $n\geq 1$ 成立 (由 1.5 知, 可取 (A_n) 为 Ω 的一个划分), 则称 μ 为 **$\boldsymbol{\sigma}$有限测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为 **$\boldsymbol{\sigma}$有限测度空间**.

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 若 $A\in\mathcal{F}$, 且 $\mu(A)=0$, 称 A 为 **μ零测集**. 如果任何 μ 零测集的子集皆属于 $\mathcal{F}$, 称 $\mathcal{F}$ 关于 μ 是**完备的**, 称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为**完备测度空间**.

为了下节研究测度的扩张的需要，我们引进一般的非负集函数的概念. 设 $\mathcal{C}$ 为任一集类. 定义于 $\mathcal{C}$ 取值于 $\overline{\mathbf{R}}_+$ 的函数称为 $\mathcal{C}$ 上的**非负集函数**. 在下面的定义叙述中，我们总约定 $\emptyset\in\mathcal{C}$, 且非负集函数 μ 满足 $\mu(\emptyset)=0$ 及**单调性**:

$$A,\ B\in\mathcal{C},A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B).$$

1.3.2 定义 设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上非负集函数.

(1) 称 μ 为**有限可加的**, 如果对一切 $n\geq 2$,

$$A_i\in\mathcal{C},1\leq i\leq n,\ \sum_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

(2) 称 μ 为 **σ可加的**, 如果

$$A_i\in\mathcal{C},\ i\geq 1,\ \sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(3) 称 μ 为**半 σ 可加的**, 如果

$$A\in\mathcal{C};A_i\in\mathcal{C},i\geq 1,\ 且\,A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\mu(A)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(4) 称 μ **从下连续**, 如果

$$A_n\in\mathcal{C},A_n\uparrow A\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(5) 称 μ **从上连续**, 如果

$$A_n\in\mathcal{C},A_n\downarrow A\in\mathcal{C}\ 且\,\mu(A_1)<\infty\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(6) 称 μ **在空集处连续**, 如果

$$A_n\in\mathcal{C},A_n\downarrow\emptyset,\ 且\,\mu(A_1)<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0.$$

(7) 称 μ **在 $\mathcal{C}$ 上有限**, 如果对一切 $A\in\mathcal{C}$, 有 $\mu(A)<\infty$.

(8) 称 μ **在 $\mathcal{C}$ 上 σ 有限**, 如果对任一 $A\in\mathcal{C}$, 存在 $A_n\in\mathcal{C},n\geq 1$, 使得 $A\subset\bigcup_n A_n$, 且 $\mu(A_n)<\infty$ 对一切 n 成立.

这些概念都是可以“顾名思义”的，读者很容易记住它们.

下一定理概括了测度的最基本性质.

1.3.3 定理 设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度，则 μ 从下连续且从上连续 (从而也在 $\emptyset$ 处连续). 此外， μ 有单调性及如下的**可减性**:

$$A,B\in\mathcal{F},\ A\subset B,\ 且\,\mu(B)<\infty\Rightarrow\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A).$$

证 单调性及可减性是显然的. 由可减性及从下连续性立刻推得从上连续性，只需证 μ 的从下连续性. 设 $A_n\in\mathcal{F},n\geq 1,A_n\uparrow A$. 为证 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$, 不妨设 $\forall n\geq 1$, 有 $\mu(A_n)<\infty$, 则有

$$\mu(A_{n+1}\setminus A_n)=\mu(A_{n+1})-\mu(A_n).$$

由于 $A=\bigcup_n A_n=A_1\cup\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n+1}\setminus A_n)$, 故有

$$\mu(A)=\mu(A_1)+\sum_{n=1}^{\infty}[\mu(A_{n+1}-\mu(A_n)]=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

下一定理推广了定理 1.3.3 的结论.

1.3.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一代数， μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负集函数，则 μ 有单调性及可减性. 此外， μ 为 σ 可加 $\Leftrightarrow\mu$ 从下连续 $\Rightarrow\mu$ 从上连续 $\Rightarrow\mu$ 在 $\emptyset$ 处连续. 若进一步 $\mu(\Omega)<\infty$, 则上述诸条件等价.

证 设 μ 从下连续, 往证 μ 为 σ 可加的. 令 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 则 $B_m = \sum_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{C}$, 且 $B_m \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 于是由 μ 的有限可加性及从下连续性得

$$\mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(\sum_{n=1}^{m} A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

这表明 μ 有 σ 可加性. 其余结论显然 (参见上一定理的证明).

下一引理将使我们在许多场合把与 σ 有限测度有关的问题归结为与概率测度有关的问题.

1.3.5 引理 设 μ 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一 σ 有限测度. 若 $\mu(\Omega) > 0$, 令 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为 Ω 的一个可数划分, 使得 $\forall n, A_n \in \mathcal{F}$, 且 $0 < \mu(A_n) < \infty$, 置

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)}, \quad A \in \mathcal{F}, \tag{1.3.1}$$

则 ν 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一概率测度, 此外有 $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$, 并且对任何 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \nu(A \cap A_n) \mu(A_n). \tag{1.3.2}$$

证 只需证 (1.3.2) 式, 其余结论显然. 在 (1.3.1) 式中令 $A \cap A_m$ 代替 A, 得

$$\nu(A \cap A_m) = \frac{\mu(A \cap A_m)}{2^m \mu(A_m)}.$$

由此立得 (1.3.2) 式.

习 题

1.3.1 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负函数, 则 μ 有单调性及可减性. 此外, 设 $A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1, A \in \mathcal{C}$, 且 $\sum_n A_n \subset A$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.

1.3.2 设 $(I, \prec)$ 为一定向集, $(\mu_i, i \in I)$ 为 σ 代数 $\mathcal{F}$ 上的一族测度, 满足 $i \prec j \Rightarrow \mu_i \leq \mu_j$. 令

$$\mu(A) = \sup_i \mu_i(A), \quad A \in \mathcal{F},$$

则 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

1.3.3 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $\mu(\Omega) < \infty, \mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数, 则对任何 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) \,|\, B \in \mathcal{C}_\delta, B \subset A\} = \inf\{\mu(B) \,|\, B \in \mathcal{C}_\sigma, B \supset A\}.$$

(提示: 令 $\mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中使上式成立的集 A 全体, 证明 $\mathcal{G}$ 为单调类, 再利用单调类定理.)

1.3.4 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathcal{C}$, 使得 $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. (提示: 利用习题 1.3.3.)

1.4 外测度与测度的扩张

本节研究如何把一半环 $\mathcal{C}$ 上的一 σ 可加非负集函数扩张成为 σ 代数 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的测度, 通常采用的方法是外测度方法.

1.4.1 定义 令 $\mathcal{A}(\Omega)$ 表示 Ω 的所有子集 (包括空集) 所构成的集类, 设 μ 为 $\mathcal{A}(\Omega)$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset) = 0$). 如果 μ 有单调性并满足如下的**次 σ 可加性**:

$$A_n \subset \Omega, n \geq 1 \Rightarrow \mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n),$$

则称 μ 为 Ω 上的一**外测度**.

下一定理是测度扩张的基础.

1.4.2 定理 设 μ 为 Ω 上的一外测度. 令

$$\mathcal{U} = \{A \subset \Omega \,|\, \forall D \subset \Omega, \text{ 有 } \mu(D) = \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D)\}, \tag{1.4.1}$$

则 $\mathcal{U}$ 为 Ω 上的一 σ 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 我们称 $\mathcal{U}$ 中的元素为 **μ可测集**.

证 首先注意：为要 $A \in \mathcal{U}$, 当且仅当 $\forall D \subset \Omega$,

$$\mu(D) \geq \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D). \tag{1.4.2}$$

设 $A, B \in \mathcal{U}$, 则由 (1.4.1) 式及 μ 的次可加性知： $\forall D \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}\mu(D) &= \mu(A \cap D) + \mu(A^c \cap D) \\ &= \mu(A \cap D) + \mu(B \cap A^c \cap D) + \mu(B^c \cap A^c D) \\ &\geq \mu((A \cup B) \cap D) + \mu((A \cup B)^c \cap D).\end{aligned}$$

这表明 $A \cup B \in \mathcal{U}$. 此外，由 (1.4.1) 式知， $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$, 故 $\mathcal{U}$ 为一代数.

下面证明 $\mathcal{U}$ 为 σ 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 为此，设 $A_n \in \mathcal{U}, n \geq 1$, 且 $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$, 则对任何 $D \subset \Omega$, 我们有 (注意 $A_k \cap A_{k-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c = A_k$)

$$\begin{aligned}\mu(D) &= \mu(A_1 \cap D) + \mu(A_1^c \cap D) \\ &= \mu(A_1 \cap D) + \mu(A_2 \cap D) + \mu(A_2^c \cap A_1^c \cap D) = \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap D) + \mu\big((\sum_{k=1}^{n} A_k)^c \cap D\big) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap D) + \mu\big((\sum_{k=1}^{\infty} A_k)^c \cap D\big).\end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$, 并由 μ 的次 σ 可加性立得

$$\begin{aligned}\mu(D) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap D) + \mu\big((\sum_{k=1}^{\infty} A_k)^c \cap D\big) \\ &\geq \mu\big((\sum_{k=1}^{\infty} A_k) \cap D\big) + \mu\big((\sum_{k=1}^{\infty} A_k)^c \cap D\big).\end{aligned}$$

这表明 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}$. 此外，在上式中令 $D = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 得

$$\mu(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

因此，$\mathcal{U}$ 为一 σ 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 证毕.

下一命题的证明是不足道的，故从略.

1.4.3 命题 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{C}$. 又设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一半 σ 可加非负集函数，且 $\mu(\emptyset) = 0$. 令

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \Big| A_n \in \mathcal{C},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big\},\quad A \subset \Omega \tag{1.4.3}$$

(这里及今后，约定 $\inf \emptyset = +\infty$), 则 μ^* 为 Ω 上的外测度，且 μ^* 限于 $\mathcal{C}$ 与 μ 一致，我们称 μ^* 为由 μ **引出的外测度**.

1.4.4 命题 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset) = 0$). 则为要 μ 是 σ 可加的，必须且只需 μ 为有限可加且半 σ 可加的.

证 **必要性** 设 μ 为 σ 可加，显然 μ 为有限可加. 令 $A \in \mathcal{C}, A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, 且 $A \subset \bigcup_n A_n$, 往证 $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n A_1^c \cdots A_{n-1}^c,\ n \geq 2,$$

则由半环的定义知 $B_n \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$(记号见 1.1.6), 且有 $\bigcup_n A_n = \sum_n B_n$, 从而 $A = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A)$. 由于 $B_n \cap A \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$, 故存在 $C_{n,m} \in \mathcal{C}, 1 \leq m \leq k(n)$, 使得

$$B_n \cap A = \sum_{m=1}^{k(n)} C_{n,m}\ ,\quad n \geq 1.$$

由 μ 的可加性推知

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k(n)} \mu(C_{n,m}).$$

但由于 $A_n \supset \sum_m C_{n,m}, A_n \setminus \sum_m C_{n,m} = A_n \cap (\bigcap_m C_{n,m}^c) \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$, 故由 μ 的有限可加性易知

$$\mu(A_n) \geq \sum_{m=1}^{k(n)} \mu(C_{n,m}).$$

因此有 $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, 此即 μ 的半 σ 可加性.

充分性 现设 μ 有限可加且半 σ 可加. 设 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, $\sum_n A_n = A \in \mathcal{C}$, 我们要证 $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$. 由于对一切 $k \geq 1$, $A \setminus \sum_{n=1}^k A_n \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$, 故由 μ 的有限可加性知 $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^k \mu(A_n)$. 但 k 是任意的, 故 $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 再由 μ 的半 σ 可加性知 $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 证毕.

下一引理给出了 μ^* 可测集的一个刻画.

1.4.5 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类, 且 $\emptyset \in \mathcal{C}$. 又设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一半 σ 可加非负集函数, 且 $\mu(\emptyset) = 0$, μ^* 为 μ 引出的外测度. 则为要 A 为 μ^* 可测集, 必须且只需对一切 $C \in \mathcal{C}$, 有

$$\mu(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \text{(或者等价地, 等号成立)}. \quad (1.4.4)$$

证 只需证充分性. 设 $A \subset \Omega$, 且对一切 $C \in \mathcal{C}$, (1.4.4) 式成立. 任取 $D \subset \Omega$. 若 $\mu^*(D) = \infty$, 显然 (1.4.2) 式成立 (μ^* 代替 μ). 若 $\mu^*(D) < \infty$, 则由 μ^* 的定义, 对任给 $\varepsilon > 0$, 可取 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_n A_n \supset D$, 且 $\mu^*(D) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon$. 于是由 (1.4.4) 式及 μ^* 的次 σ 可加性有

$$\begin{aligned}\mu^*(D) &\geq \sum_n \left[\mu^*(A_n \cap A) + \mu^*(A_n \cap A^c)\right] - \varepsilon \\ &\geq \mu^*\Big(\big(\bigcup_n A_n\big) \cap A\Big) + \mu^*\Big(\big(\bigcup_n A_n\big) \cap A^c\Big) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c) - \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故有 (1.4.2) 式成立 (以 μ^* 代替 μ). 这表明 A 为 μ^* 可测集. 证毕.

下一引理是应用单调类定理的一个典型例子, 我们在讨论测度扩张的唯一性时将用到它.

1.4.6 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π 类, μ_1 及 μ_2 为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的两个有限测度. 若 $\Omega \in \mathcal{C}$, 且 μ_1 与 μ_2 限于 $\mathcal{C}$ 一致, 则 μ_1 与 μ_2 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致.

证 令 $\mathcal{G} = \{A \in \sigma(\mathcal{C}) \,|\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$, 则由定理 1.3.3 知 $\mathcal{G}$ 为 λ 类. 但依假定, 有 $\mathcal{G} \supset \mathcal{C}$, 故由单调类定理知 $\mathcal{G} \supset \sigma(\mathcal{C})$, 从而 $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$. 证毕.

下一定理称为 **Carathéodory 测度扩张定理**.

1.4.7 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一半环, μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一 σ 可加非负集函数, 则 μ 可以扩张成为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的一测度. 若进一步 μ 在 $\mathcal{C}$ 上为 σ 有限, 且 $\Omega \in \mathcal{C}_\sigma$, 则这一扩张是唯一的, 并且扩张所得的测度在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上也是 σ 有限的.

证 由命题 1.4.4, μ 在 $\mathcal{C}$ 上有半 σ 可加性. 令 μ^* 为 μ 按 (1.4.3) 式引出的外测度, 令 $\mathcal{U}$ 为 μ^* 可测集全体. 现设 $A \in \mathcal{C}$, 往证 $A \in \mathcal{U}$. 对任何 $C \in \mathcal{C}$, 我们有 $C \cap A^c = \sum_{j=1}^n B_j$, 其中 $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{C}, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$, 于是有

$$\mu^*(C \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^n \mu(B_i).$$

但我们有 $C = (C \cap A) \cup \sum_{i=1}^n B_i$, 故由 μ 的有限可加性得

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \mu(C \cap A) + \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \\ &\geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c),\end{aligned}$$

由引理 1.4.5 便知 $A \in \mathcal{U}$. 最终我们有 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}$. 令 $\widetilde{\mu}$ 为 μ^* 在 $\sigma(\mathcal{C})$

上的限制，则 $\widetilde{\mu}$ 为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的测度. 显然 $\widetilde{\mu}$ 与 μ 在 $\mathcal{C}$ 上一致，即 $\widetilde{\mu}$ 为 μ 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的扩张.

现假定 μ 在 $\mathcal{C}$ 上 σ 有限，且 $\Omega\in\mathcal{C}_\sigma$. 由于 $\mathcal{C}$ 是半环，不难证明存在 Ω 的一个可数划分 (A_n), 使得 $A_n\in\mathcal{C},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$, 且 $\Omega=\sum_{n=1}^\infty A_n$. 设 μ_1 与 μ_2 为 μ 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的两个测度扩张，则由于 $A_n\cap\mathcal{C}$ 为 π 类，且 $A_n\cap\mathcal{C}\subset\mathcal{C}$, 故由引理 1.4.6 知， μ_1 与 μ_2 在 $A_n\cap\sigma(\mathcal{C})$ 上一致，从而 μ_1 与 μ_2 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致.

1.4.8 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， $\mathcal{N}$ 为 Ω 上的一集类. 假定 $\mathcal{N}$ 满足如下条件： (1) $A\in\mathcal{N},B\subset A\Rightarrow B\in\mathcal{N}$; (2)$\mathcal{N}_\sigma=\mathcal{N}$; (3) $A\in\mathcal{N}\cap\mathcal{F}\Rightarrow\mu(A)=0$. 令

$$\overline{\mathcal{F}}=\{A\subset\Omega\,|\,\exists B\in\mathcal{F},\ \text{使}\ A\Delta B\in\mathcal{N}\},$$

$$\overline{\mu}(A)=\mu(B),\ B\in\mathcal{F},A\Delta B\in\mathcal{N},\quad A\in\overline{\mathcal{F}},$$

则 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 σ 代数， $\overline{\mu}$ 为 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的测度.

证 我们只证 $\overline{\mu}$ 在 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的定义是唯一确定的，其余结论容易证明. 为此，设 $A\in\overline{\mathcal{F}}$, $B_1,B_2\in\mathcal{F}$, 使得 $A\Delta B_1\in\mathcal{N},A\Delta B_2\in\mathcal{N}$. 由于

$$(B_1\Delta B_2)\cap A^c\subset(B_1\cup B_2)\cap A^c\subset(A\Delta B_1)\cup(A\Delta B_2),$$

$$(B_1\Delta B_2)\cap A\subset(B_1^c\cup B_2^c)\cap A\subset(A\Delta B_1)\cup(A\Delta B_2),$$

故有 $(B_1\Delta B_2)\in\mathcal{N}$. 但 $(B_1\Delta B_2)\in\mathcal{F}$, 于是 $\mu(B_1\Delta B_2)=0$, 从而有 $\mu(B_1)=\mu(B_2)$.

1.4.9 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mathcal{N}=\{N\subset\Omega\,|\,\exists A\in\mathcal{F},\mu(A)=0,\ \text{使}\ A\supset N\},$$

则 $\mathcal{N}$ 满足定理 1.4.8 的条件. 于是 $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ 为一测度空间，它是包含 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的最小完备测度空间. 我们称 $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的**完备化**, 称 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 的 **μ完备化**. 此外，我们有

$$\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup N\,|\,A\in\mathcal{F},\ N\in\mathcal{N}\};$$

$$\overline{\mu}(A\cup N)=\mu(A),\ A\in\mathcal{F},N\in\mathcal{N}.$$

习 题

1.4.1 (测度的限制) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间， $\Omega_0\subset\Omega$, 且 $\mu^*(\Omega_0)=\mu(\Omega)$. 则 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有 $\mu^*(A\cap\Omega_0)=\mu(A)$, 并且 μ^* 限于 $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 为一测度. 称 μ^* 为 μ 到 $(\Omega_0,\Omega_0\cap\mathcal{F})$ 上的**限制**.

1.4.2 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间， $\Omega_0\subset\Omega$. 令 $\mathcal{F}_0=\Omega_0\cap\mathcal{F}$,

$$\nu(A)=\inf\{\mu(G)\,|\,G\in\mathcal{F},G\cap\Omega_0=A\},\quad A\in\mathcal{F}_0,$$

则 ν 为 $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ 上一测度. 令

$$\tilde{\mu}(B)=\nu(B\cap\Omega_0),\quad\forall B\in\mathcal{F},$$

则 $\tilde{\mu}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度，且 $\tilde{\mu}\leq\mu$.

1.4.3 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， $\{A_n,n\geq 1\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的极限存在的序列. 若 $\mu(A_1)<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)$.

1.4.4 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu(B)\mid B\supset A,\ B\in\mathcal{F}\},\ A\subset\Omega,$$

则 μ^* 为 Ω 上的外测度. 令 $\mathcal{U}$ 为 μ^* 可测集全体，则 $(\Omega,\mathcal{U},\mu^*)$ 为完备测度空间. 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一 σ 有限测度空间，则 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{F}$ 的 μ 完备化.

1.4.5 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一完备测度空间， $\mathcal{N}=\{A\in\mathcal{F}|\mu(A)=0\}$. 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，令

$$\widetilde{\mathcal{G}}=\{A\subset\Omega\,|\,\exists B\in\mathcal{G},\ \text{使}\ A\Delta B\in\mathcal{N}\},$$

$$\widetilde{\mu}(A)=\mu(B),B\in\mathcal{G},A\Delta B\in\mathcal{N},\quad A\in\widetilde{\mathcal{G}},$$

则 $\widetilde{\mathcal{G}}=\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{N})$, 且 $\widetilde{\mu}$ 为 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 上的测度.

1.5 欧氏空间中的 Lebesgue-Stieltjes 测度

本节将利用上节的结果来建立 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 为此, 我们先引进若干记号.

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点. 若对一切 i 有 $a_i\le b_i$(相应地, $a_i<b_i$), 则记为 $a\le b$(相应地, $a<b$). 设 $a\le b$, 我们令

$$\mathcal{C}=\{(a,b]\mid a\le b,\ a,b\in\mathbf{R}^n\},$$

$$\mu((a,b])=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

1.5.1 引理 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的半环, 且 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 σ 可加非负集函数.

证 $\mathcal{C}$ 显然为半环. 由归纳法易证 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是有限可加的 (直观上看, 体积具有有限可加性). 为证 μ 在 $\mathcal{C}$ 上为 σ 可加的, 只需证 μ 为半 σ 可加的 (命题 1.4.4). 为此, 设

$$I=(a,b],\ I_i=(a^{(i)},b^{(i)}],$$

其中 $a<b, a^{(i)}<b^{(i)}$, 且 $I\subset\bigcup_i I_i$. 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\overline{a},\overline{b}^{(i)}, a<\overline{a}<b$ 及 $\overline{b}^{(i)}>b^{(i)}, i\ge 1$, 使得

$$\mu((\overline{a},b])\ge\mu((a,b])-\varepsilon$$

$$\mu((a^{(i)},\overline{b}^{(i)}])\le\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+2^{-i}\varepsilon,\ i=1,2,\cdots.$$

由有限覆盖定理, 存在自然数 $N\ge 1$, 使得 $[\overline{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^N(a^{(i)},\overline{b}^{(i)})$, 从而有 $[\overline{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^N(a^{(i)},\overline{b}^{(i)}]$, 故有

$$\begin{aligned}\mu((a,b])-\varepsilon\le\mu((\overline{a},b])&\le\sum_{i=1}^{N}\mu((a^{(i)},\overline{b}^{(i)}])\\&\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+\varepsilon.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得 $\mu(I)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(I_i)$, μ 的半 σ 可加性得证. 证毕.

令 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel σ 代数. 易知: $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. 于是由测度扩张定理立得如下的定理.

1.5.2 定理 μ 可以唯一地扩张成为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 上的 σ 有限测度 (称之为 **Lebesgue 测度**).

令 $\overline{\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)}$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 的 μ 完备化, 称 $\overline{\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)}$ 中元为 **Lebesgue 可测集**, 而 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 中的元称为 **Borel 可测集**.

1.5.3 定义 设 F 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一右连续实值函数, 对 $a,b\in\mathbf{R}^n$, $a\le b$, 令

$$\triangle_{b,a}F=\triangle_{b_n,a_n}^{(n)}\triangle_{b_{n-1},a_{n-1}}^{(n-1)}\cdots\triangle_{b_1,a_1}^{(1)}F,$$

其中

$$\begin{aligned}\triangle_{b_i,a_i}^{(i)}G(x)=G(&x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\&-G(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_n).\end{aligned}$$

如果对一切 $a\le b$, 有 $\triangle_{b,a}F\ge 0$, 称 F 为**增函数**.

设 μ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 上一 σ 有限测度. 称 μ 为 **Lebesgue-Stieltjes 测度** (简称为 L-S 测度), 如果对任何 $C\in\mathcal{C}$, 有 $\mu(C)<\infty$(即 μ 在 $\mathcal{C}$ 上有限). 下一定理表明: $\mathbf{R}^n$ 上的 L-S 测度与 $\mathbf{R}^n$ 上的右连续增函数之间有某种对应关系.

1.5.4 定理 设 F 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一右连续增函数. 令

$$\mu_F(\emptyset)=0,\ \mu_F((a,b])=\triangle_{b,a}F,\ a\le b,\ a,b\in\mathbf{R}^n,$$

则 μ_F 可以唯一地扩张成为 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 反之, 设 μ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一 L-S 测度, 则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一右连续增函数 F(但不唯一), 使得 μ 为 μ_F 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 上的唯一扩张.

证 设 F 为右连续增函数. 与引理 1.5.1 类似可证: μ_F 为 $\mathcal{C}$ 上的一 σ 可加集函数, 从而可以唯一地扩张成为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 上的测

度. 定理后半部分证明比较复杂, 我们就省略了 (如果 μ 比较特殊, 满足 $\mu((-\infty,x])<\infty, \forall x\in \mathbf{R}^n$, 则令 $F(x)=\mu((-\infty,x])$ 即得所要的增函数, 这至少对概率论来说是够用了).

习 题

1.5.1 设 μ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ 上一 Lebesgue-Stieltjes 测度, $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别为 R^n 的紧子集和开子集全体, 则有

$$\begin{aligned}\mu(B)&=\sup\{\mu(K)\,|\,K\subset B, K\in\mathcal{K}\}\\&=\inf\{\mu(G)\,|\,B\subset G, G\in\mathcal{G}\},\ B\in\mathcal{B}(X).\end{aligned}$$

1.6 测度的逼近

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 本节研究在什么条件下, $\mathcal{F}$ 可测集的测度可以通过 $\mathcal{F}$ 的一子类 $\mathcal{C}$ 中的元素的测度来逼近. 我们将在第 5 章研究拓扑空间上测度的正则性时用到这一结果.

1.6.1 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子类. 令

$$\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{F}\,|\,\mu(A)=\sup[\mu(B)\,|\,B\in\mathcal{C}_\delta, B\subset A]\},$$

则 $\mathcal{H}\supset\mathcal{C}_\delta$, 且 $\mathcal{H}$ 有如下性质:

(1) $A_n\in\mathcal{H}$, $n\geq 1$, $A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathcal{H}$;

(2) $A_n\in\mathcal{H}$, $\mu(A_n)<\infty$, $n\geq 1\Rightarrow\bigcap\limits_n A_n\in\mathcal{H}$.

特别, 若 μ 为有限测度, 则 $\mathcal{H}$ 为单调类, 且对可列交封闭.

证 (1) 设 $A_n\in\mathcal{H}$, $n\geq 1$, $A_n\uparrow A$. 若 $\mu(A)=\infty$, 则 $\mu(A_n)\uparrow\infty$, 于是易从 $\mathcal{H}$ 的定义知 $A\in\mathcal{H}$. 现设 $\mu(A)<\infty$. 对任给 $\varepsilon>0$, 先取 n_0, 使得 $\mu(A_{n_0})\geq\mu(A)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 再取 $B\in\mathcal{C}_\delta, B\subset A_{n_0}$, 使得

$\mu(B)\geq\mu(A_{n_0})-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 则有 $B\subset A$, 且 $\mu(B)\geq\mu(A)-\varepsilon$, 这表明 $A\in\mathcal{H}$.

(2) 设 $A_n\in\mathcal{H},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$. 对每个 $n\geq 1$, 令 $B_n\in\mathcal{C}_\delta, B_n\subset A_n$, 使得 $\mu(B_n)\geq\mu(A_n)-2^{-n}\varepsilon$. 令 $B=\bigcap\limits_n B_n$, 则 $B\in\mathcal{C}_\delta, B\subset\bigcap\limits_n A_n$, 且有

$$\begin{aligned}\mu(\bigcap_n A_n)-\mu(B)&=\mu(\bigcap_n A_n\setminus\bigcap_n B_n)\leq\mu(\bigcup_n(A_n\setminus B_n))\\&\leq\sum_n[\mu(A_n)-\mu(B_n)]\leq\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 $\bigcap_n A_n\in\mathcal{H}$.

1.6.2 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子类. 令

$$\mathcal{G}=\Big\{A\in\mathcal{F}\,|\,\mu(A)=\inf\{\mu(B)\,|\,B\in\mathcal{D}_\sigma,\,B\supset A\}\Big\},$$

则 $\mathcal{G}\supset\mathcal{D}_\sigma,\mathcal{G}$ 为单调类, 且对可列并封闭.

证 令 $\mathcal{C}=\{D^c,\,D\in\mathcal{D}\}$, 并如引理 1.6.1 中定义 $\mathcal{H}$, 则易见 $A\in\mathcal{G}\Leftrightarrow A^c\in\mathcal{H}$. 故由引理 1.6.1 立得本引理结论.

下一定理是测度逼近定理, 它的证明依赖于推广了的单调类定理 (定理 1.2.5).

1.6.3 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子类, 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$. 此外设 $\mathcal{C}$ 满足如下条件:

$$A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C};\quad A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in(\mathcal{C}_\delta)_\sigma.$$

若 $A\in\mathcal{F}$, 且 μ 在 A 上为 σ 有限, 则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B)\,|\,B\subset A,\,B\in\mathcal{C}_\delta\}.\tag{1.6.1}$$

证 首先假定 $\mu(A)<\infty$, 令

$$\nu(B)=\mu(A\cap B),\ B\in\mathcal{F},$$

则 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限测度. 令

$$\mathcal{H}=\{C\in\mathcal{F}\,|\,\nu(C)=\sup\{\nu(B)\,|\,B\subset C,B\in\mathcal{C}\delta\}\},$$

由引理 1.6.1 知, $\mathcal{H}$ 为单调类, 且 $\mathcal{H}\supset\mathcal{C}_\delta$. 由 $\mathcal{C}$ 满足的条件推得

$$A,\ B\in\mathcal{C}_\delta\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}_\delta;\ A\in\mathcal{C}_\delta\Rightarrow A^c\in(\mathcal{C}_\delta)_\sigma.$$

于是由定理 1.2.5 知 $\mathcal{H}\supset m(\mathcal{C}_\delta)=\sigma(\mathcal{C}_\delta)=\mathcal{F}$, 特别有 $A\in\mathcal{F}$, 即有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(B)\,|\,B\subset A,\ B\in\mathcal{C}_\delta\},$$

此即 (1.6.1) 式.

现设 $\mu(A)=\infty$. 令 $A_n\in\mathcal{F}$, $\mu(A_n)<\infty, n\geq 1$, 使得 $A_n\uparrow A$, 则由上所证, 我们有

$$\sup\{\mu(B)\,|\,B\subset A,B\in\mathcal{C}_\delta\}\geq\sup\{\mu(B)\,|\,B\subset A_n,B\in\mathcal{C}_\delta\}=\mu(A_n).$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\infty$, 故 (1.6.1) 式成立. 定理证毕.

作为定理的推论, 我们有如下命题, 它推广了习题 1.3.8.

1.6.4 命题 在定理 1.6.3 条件下, 假定 μ 为有限测度, 则对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B)\,|\,B\subset A,B\in\mathcal{C}_\delta\}=\inf\{\mu(C)\,|\,C\supset A,\ C\in\mathcal{D}_\sigma\},$$

其中 $\mathcal{D}=\{C^c\,|\,C\in\mathcal{C}\}$.

习 题

1.6.1 设 X 为一距离空间, $\mathcal{B}(X)$ 为 Borel σ- 代数, $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别为 X 的闭子集和开子集全体, μ 为 $(X,\mathcal{B}(X))$ 上的 σ- 有限测度, 则有

$$\begin{aligned}\mu(B)&=\sup\{\mu(F)\,|\,F\subset B,F\in\mathcal{F}\}\\&=\inf\{\mu(G)\,|\,B\subset G,G\in\mathcal{G}\},\ B\in\mathcal{B}(X).\end{aligned}$$

第 2 章　可测映射

2.1　定义及基本性质

2.1.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间, f 为 Ω 到 E 中的映射 (简记为 $f:\Omega\longrightarrow E$). 如果对一切 $A\in\mathcal{E}$, 有 $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$, 则称 f 为 $\mathcal{F}$**可测映射**.

今后, 我们用 $f^{-1}(\mathcal{E})$ 表示集类 $\{f^{-1}(A)\,|\,A\in\mathcal{E}\}$. 于是, f 为 $\mathcal{F}$ 可测映射 $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$.

2.1.2 定义 设 $\mathbf{R}$ 为实数域, $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. 我们分别用 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 及 $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ 表示 $\mathbf{R}$ 及 $\overline{\mathbf{R}}$ 上的 Borel σ 代数. 令 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, f 为 Ω 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的映射. 如果 $f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))\subset\mathcal{F}$, 称 f 为 **Borel 可测函数**, 简称可测函数. 若进一步 f 只取实值, 则称 f 为**实值可测函数**. 设 $\mathbb{C}$ 为复数域, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ 称为**复值可测函数**, 是指它的实部和虚部同时为实值可测函数.

容易看出: f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的实值可测函数, 当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 中的可测映射.

下一命题给出了可测映射的一个有用刻画.

2.1.3 命题 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 σ 代数 $\mathcal{E}$ 的一集类. 如果 f 为 Ω 到 E 中的一个映射, 使得 $f^{-1}(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$, 则 f 为可测映射.

证 令 $\mathcal{G}=\{A\subset E\,|f^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$, 则 $\mathcal{G}$ 为 E 上的一 σ 代数. 由假定, $\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$, 从而 $\mathcal{G}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{E}$, 这表明 $f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$, 即 f 为可测映射.

2.1.4 系 设 f 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一数值函数 (即取值于

$\overline{\mathbf{R}}$), 则下列条件等价:

(1) f 为可测函数;

(2) $\forall a\in\mathbf{R},[f<a]\in\mathcal{F}$;

(3) $\forall a\in\mathbf{R},[f\le a]\in\mathcal{F}$;

(4) $\forall a\in\mathbf{R},[f>a]\in\mathcal{F}$;

(5) $\forall a\in\mathbf{R},[f\ge a]\in\mathcal{F}$.

这里及今后, $[f<a]$ 表示集合 $\{\omega\,|f(\omega)<a\}$.

证 令 $\mathcal{C}_1=\{[-\infty,a)\,|a\in\mathbf{R}\}$, 则易知 $\sigma(\mathcal{C}_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$, 故由命题 2.1.3 知 (2)$\Leftrightarrow$(1). 类似可证 (3)$\Leftrightarrow$(1). 此外, 显然有 (2)$\Leftrightarrow$(5) 及 (3)$\Leftrightarrow$(4). 证毕.

由于可测函数可取 $+\infty$ 和 $-\infty$, 我们在研究可测函数的算术运算 (即加、减、乘、除) 时, 作如下约定:

(1) $(\pm\infty)+x=x+(\pm\infty)=x-(\mp\infty)=\pm\infty,\ |x|<\infty$;

(2) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$;

(3) $x/\pm\infty=0,\ |x|<\infty$;

(4) $x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \mp\infty, & x<0;\end{cases}$

(5) 下列运算被认为无意义: $(\pm\infty)-(\pm\infty),(\pm\infty)+(\mp\infty)$, $\pm\infty/\pm\infty,\pm\infty/\mp\infty,x/0$.

2.1.5 命题 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上实值 (复值) 可测函数全体构成实域 (复域) 上的一向量空间.

证 只需考虑实值可测函数情形. 令 $\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中的有理数全体. 设 f,g 为实值可测函数, 则 $\forall a\in\mathbf{R}$, 有

$$[f+g<a]=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}([f<r]\cap[g<a-r]),$$

从而 $f+g$ 为实值可测函数. 此外, 对任何 $a\in\mathbf{R}$, af 显然为实值可测函数. 证毕.

2.1.6 命题 设 $f,\ g,\{f_n,n\ge1\}$ 都为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数.

(1) fg 为可测函数;

(2) 若 $f+g$ 处处有意义, 则 $f+g$ 为可测函数;

(3) 若 f/g 处处有意义, 则 f/g 为可测函数;

(4) $\inf\limits_n f_n$, $\sup\limits_n f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty}f_n$ 及 $\limsup\limits_{n\to\infty}f_n$ 均为可测函数;

(5) $[f=g]$ 及 $[f\le g]$ 为可测集.

证 (1) 首先假定 f 及 g 非负, 则 $\forall a\in\mathbf{R},a>0$ 有

$$[fg<a]=[f=0]\cup[g=0]\cup\Big(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+}[f<r]\cap[g<\frac{a}{r}]\in\mathcal{F}\Big),$$

故 fg 为可测函数. 对一般的可测函数 f 及 g, 令

$$f^+=f\vee0,\qquad f^-=(-f)\vee0,$$

显然 f^+ 及 f^- 为可测函数. 于是 fg 的可测性由下式及 (2) 推得

$$fg=(f^+-f^-)(g^+-g^-)=(f^+g^++f^-g^-)-(f^+g^-+f^-g^+).$$

(2) 由命题 2.1.5 的证明看出.

(3) 设 $|g|>0$ 处处成立, 则易知 g^{-1} 为可测函数. 若 f/g 处处有意义, 则 $f/g=f\cdot g^{-1}$, 故 f/g 为可测函数.

(4) $\forall a\in\mathbf{R}$, 我们有

$$[\inf_n f_n<a]=\bigcup_n[f_n<a],\quad[\sup_n f_n\le a]=\bigcap_n[f_n\le a],$$

故由 (1) 和 (3) 推得 (4).

(5) 令 $f_n=(f\wedge n)\vee(-n)$, $g_n=(g\wedge n)\vee(-n)$, 则

$$[f=g]=\bigcap_n[f_n=g_n],\quad[f\le g]=\bigcap_n[f_n\le g_n].$$

由于 $[f_n = g_n] = [f_n - g_n = 0]$, $[f_n \le g_n] = [f_n - g_n \le 0]$, 从而 $[f = g]$ 及 $[f \le g]$ 为可测集.

下面我们研究可测函数的构造.

2.1.7 定义 设 $A \subset \Omega$, 令

$$I_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

称 I_A 为集 A 的**示性函数**. 设 f 为 Ω 上的一实函数, 若 f 只取有限多个值, 称 f 为**简单函数**.

设 f 为一简单函数, 其值域为 $\{a_1, \cdots, a_n\}$. 令 $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$, $i = 1, \cdots, n$, 则 $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$. 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, 则 f 为 $\mathcal{F}$ 可测, 当且仅当每个 A_i 为 $\mathcal{F}$ 可测集.

2.1.8 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, f 为一可测函数.

(1) 存在一简单可测函数序列 $(f_n, n \ge 1)$, 使得对一切 $n \ge 1$, 有 $|f_n| \le |f|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

(2) 若 f 非负, 则存在非负简单可测函数的增序列 (f_n), 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

证 将 f 表为 $f^+ - f^-$, 易知 (1) 是 (2) 的推论. 往证 (2). 对 $n \ge 1$, 令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}]} + n I_{[f \ge n]},$$

则 f_n 为非负简单可测函数, 且 $f_n \uparrow f$.

下一定理是上一定理的简单推论, 今后常被引用.

2.1.9 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 令 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族非负实值函数, 如果它满足下列条件:

(1) $f, g \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \ge 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}$;

(2) $f_n \in \mathcal{H}$, $n \ge 1$, $f_n \uparrow f$ 且 f 有限 (相应地, 有界) 或 $f_n \downarrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}$;

(3) $\forall A \in \mathcal{C}$, $I_A \in \mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有非负实值 (相应地, 有界)$\mathcal{F}$ 可测函数.

证 令 $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{F} \,|\, I_A \in \mathcal{H}\}$, 则由 (3) 知 $\mathcal{T} \supset \mathcal{C}$, 且由 (2) 知 $\mathcal{T}$ 为单调类, 故由单调类定理知 $\mathcal{T} = \mathcal{F}$. 于是由 (1) 、 (2) 及定理 2.1.8 推得定理的结论.

2.1.10 定义 设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可测空间, $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射. 令

$$\mathcal{F} = \sigma\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}} f^{-1}(\mathcal{E})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 为使 $\mathcal{H}$ 中所有元素为可测的最小 σ 代数. 我们称 $\mathcal{F}$ 为函数族 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上**生成的 σ 代数**. 特别, 若 $(E, \mathcal{E}) = (\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$, 我们常用 $\sigma\{f, f \in \mathcal{H}\}$ 表示这一 σ 代数 $\mathcal{F}$.

下一定理给出了 $\sigma(f)$ 可测函数的一个刻画.

2.1.11 定理 设 f 为 Ω 到一可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 中的映射, $\sigma(f)$ 为 f 在 Ω 上生成的 σ 代数 (即 $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{E})$), 则为要 Ω 上的一数值函数 φ 为 $\sigma(f)$ 可测, 必须且只需存在 E 上的一 $\mathcal{E}$ 可测函数 h, 使得 $\varphi = h \circ f$(这里 $h \circ f$ 表示 h 与 f 的复合, 即 $h \circ f(\omega) = h(f(\omega)), \omega \in \Omega$). 如果 φ 为实值 (相应地, 有界)$\sigma(f)$ 可测, 则 h 可取为实值 (相应地, 有界) 函数.

证 充分性显然 (见习题 2.1.2). 下证必要性. 设 $A \in \sigma(f)$, 则存在 $B \in \mathcal{E}$, 使 $A = f^{-1}(B)$, 即有 $I_A = I_B \circ f$, 于是对任一 $\sigma(f)$ 可测简单函数 φ, 存在 E 上一 $\mathcal{E}$ 可测函数 h, 使得 $\varphi = h \circ f$. 现设 φ 为一 $\sigma(f)$ 可测函数, 由定理 2.1.8, 存在一列 $\sigma(f)$ 可测简单函数 φ_n, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$. 由上所证, 存在一列 E 上 $\mathcal{E}$ 可测实值函数 h_n, 使 $\varphi_n = h_n \circ f$. 令 $h = \limsup\limits_{n\to\infty} h_n$, 则 $\varphi = h \circ f$. 若进一步 φ 为实值 (相应地, 存在一常数 $c > 0$, 使得 $|\varphi| \le c$), 令 $h' = h I_{|h|<\infty}$(相应地, 令 $h' = h^+ \wedge c - h^- \wedge c$), 则 $\varphi = h' \circ f$. 定理证毕.

习 题

2.1.1 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{E}$ 的一集类. 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上诱导的 σ 代数, 则

$$\mathcal{F}=\sigma\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}} f^{-1}(\mathcal{C})\}.$$

设 φ 为 $\mathcal{F}$ 可测函数, 则存在 $\mathcal{H}$ 的可数子族 $\mathcal{H}_0=\{f_1,f_2,\cdots\}$, 使得 φ 为 $\mathcal{F}_0$ 可测, 其中 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{H}_0$ 在 Ω 上诱导的 σ 代数.

2.1.2 设 $(\Omega,\mathcal{F})$,$(E,\mathcal{E})$ 及 $(G,\mathcal{G})$ 为可测空间, f 为 Ω 到 E 中的 $\mathcal{F}$ 可测映射, h 为 E 到 G 中的 $\mathcal{E}$ 可测映射. 令 $\varphi=h\circ f$, 则 φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$ 可测映射.

2.1.3 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界可测函数, 则存在简单可测函数序列 $(f_n,n\geq 1)$, 使得 $|f_n|\leq|f|,n\geq 1$, 且 f_n 一致收敛于 f.

2.1.4 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_i\cap A_j=\emptyset,i\neq j,\sum_i A_i=\Omega$). 令 $\mathcal{T}=\sigma\{\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\}$, 则:

(1) $\mathcal{T}=\{\sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i)\,|\,B_i\in\mathcal{F},\,i\geq 1\}$;

(2) 设 g 为 Ω 上一 $\mathcal{T}$ 可测实值函数, 则存在一列 $\mathcal{F}$ 可测实函数 $(f_n,n\geq 1)$, 使得 $g=\sum_{i=1}^{\infty}f_iI_{A_i}$.

2.1.5 设 Ω 为一距离空间, $\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Borel σ 代数. 令 $\mathcal{C}_b(\Omega)$ 表示 Ω 上有界连续函数全体, 则 $\mathcal{B}(\Omega)=\sigma\{f\,|\,f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}$.

2.1.6 设 $\{f_i,1\leq i\leq m\}$ 为 $\mathbf{R}$ 上实值 Borel 函数, 则 $(f_1,\cdots,f_m)$ 为 $(\mathbf{R}^m,\mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$ 到自身的可测映射. (提示: 利用命题 2.1.3.)

2.1.7 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的复值可测函数, 当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 中的可测映射.

2.2 单调类定理 (函数形式)

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. 有时我们只知道有一类 $\mathcal{F}$ 可测函数满足某一性质, 而希望证明所有 $\mathcal{F}$ 可测函数满足该性质. 这时我们就要用到函数形式的单调类定理.

下一定理是与定理 1.2.2(2) 相应的函数形式.

2.2.1 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π 类, $\mathcal{H}$ 为由 Ω 上的一些实值函数构成的线性空间. 如果它们满足下列条件:

(1) $1\in\mathcal{H}$;

(2) $f_n\in\mathcal{H},n\geq 1,0\leq f_n\uparrow f$, 且 f 有限 (相应地, 有界) $\Rightarrow f\in\mathcal{H}$;

(3) $\forall A\in\mathcal{C},\ I_A\in\mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测实值 (相应地, 有界) 函数.

证 令 $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega\,|\,I_A\in\mathcal{H}\}$, 则易知 $\mathcal{F}$ 为 λ 类, 且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$. 于是由定理 1.2.2(2) 知 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$. 设 f 为 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测实值 (相应地, 有界) 函数, 令

$$g_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\leq f^+<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f^+\geq n]},$$

则 $g_n\in\mathcal{H},g_n\uparrow f^+$, 从而由 (2) 知 $f^+\in\mathcal{H}$, 同理 $f^-\in\mathcal{H}$, 故 $f=f^+-f^-\in\mathcal{H}$. 定理证毕.

下面我们着手推广定理 2.2.1. 为此, 首先引进 λ 族概念, 它是集合的 λ 类概念在函数情形下的类似物.

2.2.2 定义 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数, 称 $\mathcal{H}$ 为 **λ族**, 如果它满足下列条件:

(1) $1\in\mathcal{H}$;

(2) $f\in\mathcal{H},\ \alpha\in\mathbf{R}_+\Rightarrow\alpha f\in\mathcal{H}$;

(3) $f,g\in\mathcal{H},f\geq g\Rightarrow f-g\in\mathcal{H}$;

(4) $f_n\in\mathcal{H},n\geq 1,f_n\uparrow f$, 且 f 有界 $\Rightarrow f\in\mathcal{H}$.

设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数, 我们用 $\wedge(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小 λ 族, 并称 $\wedge(\mathcal{C})$ 为**由 $\mathcal{C}$ 生成的 λ 族**.

2.2.3 注 设 $\mathcal{H}$ 为 λ 族, 则 $\mathcal{H}$ 还有如下性质:

$$f,g\in\mathcal{H}\Rightarrow f+g\in\mathcal{H}.$$

事实上, 设 C 为一常数, 使得 $f+g\leq C$, 则由 (3) 知

$$f+g=C-[(C-f)-g]\in\mathcal{H}.$$

下一定理是与定理 1.2.3(2) 相应的函数形式.

2.2.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数. 我们用 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$ 表示非负有界 $\sigma(f\,|\,f\in\mathcal{C})$ 可测函数全体, 则下面二断言等价:

(1) $\wedge(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2) $f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow fg\in\wedge(\mathcal{C})$.

证 只需证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立, 令

$$\mathcal{G}_1=\{f\in\wedge(\mathcal{C})\,|\,\forall g\in\mathcal{C},fg\in\wedge(\mathcal{C})\},$$

则易见 $\mathcal{G}_1$ 为 λ 族, 且 $\mathcal{G}_1\supset\mathcal{C}$, 故有 $\mathcal{G}_1=\wedge(\mathcal{C})$. 再令

$$\mathcal{G}_2=\{f\in\wedge(\mathcal{C})\,|\,\forall g\in\wedge(\mathcal{C}),fg\in\wedge(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{G}_2$ 为 λ 族, 且 $\mathcal{G}_1\supset\mathcal{C}$(因有 $\mathcal{G}_1=\wedge(\mathcal{C})$), 故有 $\mathcal{G}_2=\wedge(\mathcal{C})$, 这表明 $\wedge(\mathcal{C})$ 对乘积运算封闭. 令

$$\mathcal{F}=\{A\subset\Omega\,|\,I_A\in\wedge(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 既为 λ 类又为 π 类, 故 $\mathcal{F}$ 为 σ 代数. 往证 $\wedge(\mathcal{C})$ 对有限下端运算封闭. 设 $f,g\in\wedge(\mathcal{C})$, 为证 $f\wedge g\in\wedge(\mathcal{C})$, 不妨假定 $f\leq 1,g\leq 1$, 于是有 $|f-g|\leq 1$, 且有

$$(f-g)^2=f^2+g^2-2fg\in\wedge(\mathcal{C}).$$

我们将用到如下事实 (请读者自行证明): 设 $|x|\leq 1$, 令 $P_0(x)=0$,

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}(x^2-P_n(x)^2),\ n\geq 0,$$

则 $P_n(x)\uparrow|x|$. 于是, 由于

$$P_1(f-g)=\frac{1}{2}(f-g)^2\in\wedge(\mathcal{C}),$$

故由归纳法知 $P_n(f-g)\in\wedge(\mathcal{C}),n\geq 1$. 从而由 λ 族的性质 (4) 知 $|f-g|\in\wedge(\mathcal{C})$. 最终我们有

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in\wedge(\mathcal{C}).$$

现设 $f\in\mathcal{C},\alpha>0$ 为一实数. 则由上所证, $\dfrac{f}{\alpha}\wedge 1=\dfrac{1}{\alpha}(f\wedge\alpha)\in\wedge(\mathcal{C})$, 故 $1-(\dfrac{f}{\alpha}\wedge 1)^n\in\wedge(\mathcal{C})$. 从而有

$$1-(\frac{f}{\alpha}\wedge 1)^n\uparrow I_{[f<\alpha]}\in\wedge(\mathcal{C}).$$

这表明 $[f<\alpha]\in\mathcal{F}$. 因此 f 为 $\mathcal{F}$ 可测. 由定义 1.1.10 知 $\sigma(f\,|\,f\in\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

最后, 设 $f\in\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f\geq n]},$$

则由于 $I_{[\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}]}\in\wedge(\mathcal{C})$, 故 $f_n\in\wedge(\mathcal{C})$,$f_n\uparrow f\in\wedge(\mathcal{C})$, 这表明 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})\subset\wedge(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立, 故有 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})=\wedge(\mathcal{C})$. 定理证毕.

作为推论, 我们得到与定理 1.2.2(2) 相应的函数形式的单调类定理.

2.2.5 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数, 且对乘积运算封闭. 若 $\mathcal{H}$ 为一 λ 族, 且包含 $\mathcal{C}$, 则 $\mathcal{H}$ 包含一切非负有界 $\sigma(f\,|\,f\in\mathcal{C})$ 可测函数.

下面我们将给出其他形式的单调类定理, 它们是定理 1.2.3(1) 的函数形式.

2.2.6 定义 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一有界函数族，称 $\mathcal{H}$ 为**单调族**，如果它对一致有界单调序列极限封闭.

设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族. 我们用 $M(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小单调族，用 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$ 表示有界 $\sigma(f\,|\,f\in\mathcal{C})$ 可测函数全体.

2.2.7 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族，则下列二条件等价：

(1) $M(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$;

(2) $1\in M(\mathcal{C}); f\in\mathcal{C},\alpha\in\mathbf{R}\Rightarrow \alpha f\in M(\mathcal{C})$;

$$f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow f+g\in M(\mathcal{C}),\ \ f\wedge g\in M(\mathcal{C}).$$

证 只需证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立，令

$$\mathcal{H}_1=\{f\in M(\mathcal{C})\,|\,\forall\alpha\in\mathbf{R},\alpha f\in M(\mathcal{C});\forall g\in\mathcal{C},f+g,f\wedge g\in M(\mathcal{C})\}$$

则 $\mathcal{H}_1$ 为单调族，且 $\mathcal{H}_1\supset\mathcal{C}$, 故 $\mathcal{H}_1=M(\mathcal{C})$. 再令

$$\mathcal{H}_2=\{f\in M(\mathcal{C})\,|\,\forall g\in M(\mathcal{C}),f+g,f\wedge g\in M(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{H}_2$ 为单调族，且 $\mathcal{H}_2\supset\mathcal{C}$(因为 $\mathcal{H}_1=M(\mathcal{C})$), 故 $\mathcal{H}_2=M(\mathcal{C})$. 由上所证，$M(\mathcal{C})$ 为一线性空间，且对有限下端运算封闭 (从而也对有限上端运算封闭). 此外，依假定 $1\in M(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{F}=\{A\subset\Omega\,|\,I_A\in M(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ 代数.

往证 $\mathcal{C}$ 中的每个元为 $\mathcal{F}$ 可测. 设 $f\in\mathcal{C},a\in\mathbf{R}$, 令 $f_n=n(f-a)^+\wedge 1$, 则 $f_n\in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n\uparrow I_{[f>a]}$. 故 $I_{[f>a]}\in M(\mathcal{C})$, 即有 $[f>a]\in\mathcal{F}$. 这表明 f 为 $\mathcal{F}$ 可测，于是 $\sigma(f\,|\,f\in\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

最后，设 $f\in\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f\ge n]}.$$

由于 $M(\mathcal{C})$ 为线性空间，故 $f_n\in M(\mathcal{C})$. 但 $f_n\uparrow f$, 于是 $f\in M(\mathcal{C})$, 这表明 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})\subset M(\mathcal{C})$, 因此有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})\subset M(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立，故有 $M(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$. 定理证毕.

作为定理的一个有用的推论，我们有下面的定理.

2.2.8 定理 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一有界函数的单调族，$\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一子族. 则 $\mathcal{H}\supset\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$, 如果下列条件之一成立：

(1) $\mathcal{H}$ 为线性空间， $1\in\mathcal{H}$, 且 $\mathcal{C}$ 对乘积运算封闭;

(2) $\mathcal{C}$ 为一代数 (即 $\mathcal{C}$ 为一线性空间，且对乘积运算封闭), 且存在 $\mathcal{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1;

(3) $\mathcal{C}$ 为一线性空间， $\mathcal{C}$ 对有限下端运算封闭，且存在 $\mathcal{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1.

证 设 (1) 成立. 令 $\mathcal{D}$ 为由 1 和 $\mathcal{C}$ 生成的代数，则 $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$, 从而 $M(\mathcal{D})\subset\mathcal{H}$. 易证 $M(\mathcal{D})$ 为一线性空间 (见习题 2.2.1). 设 $f\in\mathcal{D}$, 且 $|f|\le 1$. 采用定理 2.2.4 的证明中的记号，令 $f_n=P_n(f)$, 则 $f_n\in\mathcal{D}$, 且 $0\le f_n\uparrow|f|$, 故 $|f|\in M(\mathcal{D})$. 于是对一般的 $f\in\mathcal{D}$, 亦有 $|f|\in M(\mathcal{D})$. 设 $f,g\in\mathcal{D}$, 则有

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in M(\mathcal{D}).$$

故由定理 2.2.7 知 $\mathcal{L}_b(\mathcal{D})=M(\mathcal{D})$. 但显然有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{D})=\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$, 故最终有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})=M(\mathcal{D})\subset\mathcal{H}$.

设 (2) 成立，则 $1\in M(\mathcal{C}),M(\mathcal{C})\subset\mathcal{H}$, 且 $M(\mathcal{C})$ 为一线性空间. 余下证明同上.

设 (3) 成立，则定理 2.2.7 中的条件 (2) 成立，故有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})=M(\mathcal{C})\subset\mathcal{H}$.

习 题

2.2.1 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族. 若 $\mathcal{C}$ 为线性空间，则 $M(\mathcal{C})$ 亦

为线性空间.

2.2.2 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数族, 则下列二条件等价:

(1) $M(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2) $f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow f\wedge g\in M(\mathcal{C})$; $f\in\mathcal{C},a\in\mathbf{R}\Rightarrow af,\ a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})$.

2.2.3 (定理 2.2.1 的另一种形式) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π 类, $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一非负实值函数族. 如果下列条件被满足:

(1) $1\in\mathcal{H}$;

(2) $f\in\mathcal{H},a\in\mathbf{R}_+\Rightarrow af\in\mathcal{H}$; $f,g\in\mathcal{H},f\geq g\Rightarrow f-g\in\mathcal{H}$;

(3) $f_n\in\mathcal{H},n\geq 1,0\leq f_n\uparrow f$, 且 f 有限 (相应地, 有界)$\Rightarrow f\in\mathcal{H}$;

(4) $\forall A\in\mathcal{C},I_A\in\mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有非负 $\sigma(\mathcal{C})$ 可测实值 (相应地, 有界) 函数.

2.3 可测函数序列的几种收敛

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 本节将研究 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上实值可测函数序列的几种收敛及它们之间的关系. 为了叙述方便, 我们将采用如下术语: 如果某一性质在 Ω 上除了一零测度集外成立, 则称它几乎处处成立, 简称 a.e. 成立.

2.3.1 定义 设 $(f_n)_{n\geq 1},f$ 均为实值可测函数.

(1) 如果存在一零测集 N, 使得 $\forall\omega\in N^c$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)$, 则称 (f_n)**几乎处处收敛于**f(或 a.e. 收敛于 f), 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.e., 或 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

(2) 如果对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathcal{F},\mu(N)<\varepsilon$, 使得 (f_n) 在 N^c 上一致收敛于 f, 则称 (f_n)**几乎一致收敛于** f, 并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.un., 或 $f_n\xrightarrow{\text{a.un.}}f$.

(3) 如果对任给 $\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}\mu([|f_n-f|>\varepsilon])=0$, 则称 (f_n)**依测度收敛于**f, 并记为 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 当 μ 是概率测度时, 称 (f_n)**依概率收敛于**f.

更一般地, 对一定向序列 (f_a) 也可定义上述几种收敛概念, 特别, 对双指标序列 (f_{nm}) 可定义上述收敛概念.

2.3.2 定义 设 (f_n) 为一列实值可测函数. 如果 (f_n-f_m) a.e. 收敛于 0(当 $n,m\to\infty$), 则称 (f_n) 为 a.e. 收敛**基本列**. 类似可以定义其他各类收敛的基本列.

2.3.3 注 由定义看出, 上述各类收敛的极限是 a.e. 唯一确定的. 例如: 设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}g$, 则 $f=g$, a.e.. 另一方面, 设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, $f=g$, a.e., 则 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}g$. 此外, 对各类收敛序列 (f_n), 若对每个 n, 用一与 f_n a.e. 相等的实值可测函数 g_n 代替 f_n, 则 (g_n) 亦为同类收敛序列, 其极限与 (f_n) 的极限 a.e. 相等.

下一定理给出了上述几种收敛的刻画.

2.3.4 定理 设 (f_n) 及 f 均为实值可测函数.

(1) $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$, 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geq\varepsilon]\Big)=0.\tag{2.3.1}$$

(2) $f_n\xrightarrow{\text{a.un.}}f$, 当且仅当 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geq\varepsilon]\Big)=0.\tag{2.3.2}$$

(3) $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 当且仅当对 (f_n) 的任何子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k}\xrightarrow{\text{a.un.}}f,(k\to\infty)$.

证 (1) 设 (a_n) 为实数列, a 为一实数, 则要使 $a_n\to a$, 必须且只需对每个 $k\geq 1$, 存在自然数 $n(k)$, 使得当 $i\geq n(k)$ 时有 $|a_i-a|<\frac{1}{k}$. 因此我们有

$$\{\omega\mid f_n(\omega)\to f(\omega)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\left[|f_i-f|<\frac{1}{k}\right].$$

于是, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 当且仅当

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}\right]) = 0,$$

即 $\forall k \geq 1$ 有

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}\right]) = 0,$$

(1) 得证.

(2) 必要性. 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$. 则 $\forall \delta > 0, \exists F \in \mathcal{F}, \mu(F) < \delta$, 使 f_n 在 F^c 上一致收敛于 f. 于是 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $i \geq N$ 时, 有

$$|f_i(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon, \ \omega \in F^c.$$

因此, $\bigcup_{i=N}^{\infty}[|f_i - f| \geq \varepsilon] \subset F$, 特别有

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i - f| \geq \varepsilon]) \leq \mu(F) < \delta.$$

必要性得证.

下证充分性. 设对任给 $\varepsilon > 0$ 有 (2.3.2) 式成立. 则 $\forall \delta > 0, \forall k \geq 1, \exists n(k)$, 使得

$$\mu(\bigcup_{i=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}]) < \frac{\delta}{2^k}.$$

令

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}],$$

则 $\mu(F) < \delta$, 且有

$$F^c = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| < \frac{1}{k}].$$

这表明在 F^c 上 f_n 一致收敛于 f. 依定义, $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 必要性. 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 令 $(f_{n'})$ 为 (f_n) 的一子列, 则仍有 $f_{n'} \xrightarrow{\mu} f$. 由依测度收敛的定义, 存在 $(f_{n'})$ 的子列 $(f_{n'_k})$, 使得

$$\mu([|f_{n'_k} - f| \geq \frac{1}{k}]) \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1.$$

故 $\forall m \geq 1$, 我们有

$$\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty}[|f_{n'_k} - f| \geq \frac{1}{k}]) \leq \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

因此, $\forall \varepsilon > 0$, 与 $(f_{n'_k})$ 相应的 (2.3.2) 式成立, 从而 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

下证充分性. 我们用反证法. 假定 (f_n) 不依测度 μ 收敛于 f, 则存在某个 ε, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\mu([|f_n - f| \geq \varepsilon]) > \delta > 0.$$

于是存在 (f_n) 的子列 $(f_{n'})$, 使得对一切 n' 有 $\mu([|f_{n'} - f| \geq \varepsilon]) > \delta$. 显然 $(f_{n'})$ 不包含几乎一致收敛的子列. 充分性得证.

2.3.5 定理 (1) 我们有

$$f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f; \ f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f. \qquad (2.3.3)$$

(2) 若 μ 为有限测度, 则有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 (f_{n_k}), 使 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

证 (1) 直接由定理 2.3.4 或定义 2.3.1 推出.

(2) 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 由定理 2.3.4, $\forall \varepsilon > 0$, 有 (2.3.1) 式成立. 于是由有限测度的从上连续性 (定理 1.3.4) 知 (2.3.2) 式成立, 故有 $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 由定理 2.3.4(3) 及上述 (1) 推得.

2.3.6 注 (1) 定理 2.3.5(2) 中 "$\Rightarrow$" 部分通常称为 **Egoroff 定理**.

(2) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间，f_n,f 为实值可测函数. 则由定理 2.3.4(3) 及定理 2.3.5(2) 知，为要 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 必须且只需对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使 $f_{n'_k}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

作为定理 2.3.4(3) 的一个应用，我们有如下的

2.3.7 定理 设 g 为 $\mathbf{R}^m$ 上一实值 Borel 可测函数，D 为 $\mathbf{R}^m$ 的一子集. 又设 $(f_n^{(i)})_{n\geq 1}$ 为实值可测函数序列，$f^{(i)}$ 为实值可测函数，$i=1,\cdots,m$. 假定 $f_n^{(i)}$ 及 $f^{(i)}$ 在 D 中取值, 且对 $1\leq i\leq m$, $f_n^{(i)}\xrightarrow{\mu}f^{(i)}$, 则有如下结论:

(1) 设 g 在 D 上一致连续，则

$$g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)});$$

(2) 设 g 在 D 上连续，μ 为有限测度，则 $g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})$.

证 往证 (1). 首先，由习题 2.1.6 及 2.1.2 知 $g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})$ 为实可测函数. 设 (n') 为自然数列的一子序列, 由定理 2.2.4(3), 并利用对角线法则，可取 (n') 的子列 (n'_k), 使得对每个 i:$1\leq i\leq m$, 有 $f_{n'_k}^{(i)}\xrightarrow{\text{a.un.}}f^{(i)}$. 由于 g 在 D 上一致连续，故易见

$$g(f_{n'_k}^{(1)},\cdots,f_{n'_k}^{(m)})\xrightarrow{\text{a.un.}}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)}).$$

因此, 由定理 2.3.4(3) 知，$g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})$. (1) 得证. (2) 的证明完全类似.

下一定理是数学分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理的随机版本 (见 Föllmer-Schied: Stochastic Finance, Walter de Gruyter, 2002).

2.3.8 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，$(f_n)_{n\geq 1}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 值可测函数序列，$\liminf\limits_{n\to\infty}|f_n|<\infty,\mu$-a.e., 则存在一 $\mathbf{R}^d$ 值可测函数 f 和整数值可测函数的严格增序列 $\alpha_n\uparrow\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_{\alpha_n(\omega)}(\omega)=f(\omega),\quad \mu\text{-a.e.}\,\omega\in\Omega.$$

证 令 $W=\liminf\limits_{n\to\infty}|f_n|$, 在零测集 $[W=\infty]$ 上，令 $\alpha_m=m$. 下面只在 $W<\infty$ 上考虑问题. 令 $\alpha_1^0=1$, 归纳定义 α_m^0 如下:

$$\alpha_m^0=\inf\left\{n>\alpha_{m-1}^0\,\Big|\,||f_n|-W|\leq\frac{1}{m}\right\},\quad m=2,3,\cdots$$

令 $f^1=\liminf\limits_{m\to\infty}f^1_{\alpha_m^0}$, $\alpha_1^1=1$, 归纳定义 α_m^1 如下:

$$\alpha_m^1=\inf\left\{\alpha_n^0\,|\,\alpha_n^0>\alpha_{m-1}^1,|f^1_{\alpha_m^0}-f^1|\leq\frac{1}{m}\right\},\quad m=2,3,\cdots$$

对 $i=2,\cdots,d$, 定义 $f^i=\liminf\limits_{m\to\infty}f^i_{\alpha_m^{i-1}}$, $\alpha_1^i=1$, 归纳定义 α_m^i 如下:

$$\alpha_m^i=\inf\left\{\alpha_n^{i-1}\,|\,\alpha_n^{i-1}>\alpha_{m-1}^i,|f^i_{\alpha_m^{i-1}}-f^i|\leq\frac{1}{m}\right\},\quad m=2,3,\cdots$$

则 $f=(f^1,\cdots,f^d)$ 和 $\alpha_m:=\alpha_m^d$ 分别为要找的 $\mathbf{R}^d$ 值可测函数和整数值可测函数.

习 题

2.3.1 设 (f_n) 为一实值可测函数序列，则为要 (f_n)a.e.(相应地，几乎一致或依测度 μ) 收敛于某 f, 必须且只需 (f_n) 为相应的收敛基本列.

2.3.2 举例说明：若 $\mu(\Omega)=\infty$, 则 μ 几乎处处收敛的序列不一定依测度收敛.

2.3.3 设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则有 $\liminf\limits_{n\to\infty}f_n\leq f\leq\limsup\limits_{n\to\infty}f_n$, a.e..

2.3.4 设 μ 为有限测度，则

$$f_n\xrightarrow{\mu}f\;\Rightarrow\;\frac{f_n}{1+|f_n|}\xrightarrow{\mu}\frac{f}{1+|f|}.$$

2.3.5 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，(f_n) 为一实值 $\mathcal{F}$ 可测函数序列，它处处收敛于某实值函数 f, 则 f 也为 $\mathcal{F}$ 可测.

2.3.6 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，$A\subset\Omega$, 则 A 上的任一实值 $A\cap\mathcal{F}$ 可测函数可以延拓成为 Ω 上的实值 $\mathcal{F}$ 可测函数.

第 3 章 积分和空间 L^p

3.1 积分的基本性质

在本节给定一测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 我们用 $\mathcal{S}^+$ 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$ 可测非负简单函数全体, 用 $\mathcal{L}$(相应地, $\overline{\mathcal{L}}$) 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$ 可测实值 (相应地, 数值) 函数全体. 令 $\overline{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的完备化, 称 $\overline{\mathcal{F}}$ 可测函数为 **μ可测函数**. $\mathcal{L}^+$ 及 $\overline{\mathcal{L}}^+$ 则分别表示 $\mathcal{L}$ 及 $\overline{\mathcal{L}}$ 中的非负函数全体.

显然, 为要 f 为 μ 可测函数, 必须且只需存在一 $\mathcal{F}$ 可测函数 g, 使得 $f=g$, a.e..

首先, 我们定义非负简单可测函数关于测度 μ 的积分.

3.1.1 定义 设 $f=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}\in\mathcal{S}^+$, 其中 $a_i\in\mathbf{R}_+,A_i\in\mathcal{F}$. 令

$$\int_\Omega fd\mu=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i),$$

易证 $\int_\Omega fd\mu$ 不依赖于 f 的具体表达. 我们称 $\int_\Omega fd\mu$ 为 f **关于 μ 的积分**, 通常, 我们用 $\mu(f)$ 简记 $\int_\Omega fd\mu$.

下一命题列举了这一积分的基本性质.

3.1.2 命题 设 f_n,g_n,f,g 都是 $\mathcal{S}^+$ 中的元素, 则:

(1) $\mu(I_A)=\mu(A),\ \forall A\in\mathcal{F}$;

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f),\ \forall\alpha\in\mathbf{R}_+$;

(3) $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$;

(4) $f\le g\Rightarrow\mu(f)\le\mu(g)$;

(5) $f_n\downarrow f,\mu(f_1)<\infty\Rightarrow\mu(f_n)\downarrow\mu(f)$;

(6) $f_n\uparrow f\Rightarrow\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$;

(7) $f_n\uparrow,g_n\uparrow,\lim\limits_{n\to\infty}f_n\le\lim\limits_{n\to\infty}g_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)$.

证 (1)–(4) 显然. 往证 (5). 令 $g_n=f_n-f$, 则 $g_n\in\mathcal{S}^+$, $g_n\downarrow 0$, 且 $\mu(g_1)\le\mu(f_1)<\infty$. 令

$$\beta=\sup\{g_1(\omega)\mid\omega\in\Omega\},$$

则 $\forall\epsilon>0$, 我们有

$$0\le g_n\le\beta I_{[g_n>\epsilon]}+\epsilon I_{[0<g_n\le\epsilon]}\le\beta I_{[g_n>\epsilon]}+\epsilon I_{[g_1>0]}.$$

由 (4) 得

$$\mu(g_n)\le\beta\mu([g_n>\epsilon])+\epsilon\mu([g_1>0]).$$

由于 $[g_n>\epsilon]\downarrow\emptyset$, 且 $\mu([g_1>\epsilon])\le\mu([g_1>0])<\infty$(因 $\mu(g_1)<\infty$), 故由测度的从上连续性知 $\mu([g_n>\epsilon])\downarrow 0$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)\le\epsilon\mu([g_1>0])$. 但 $\epsilon>0$ 是任意的, 故有 $\mu(g_n)\downarrow 0$. 最终有 $\mu(f_n)=\mu(g_n)+\mu(f)\downarrow\mu(f)$, (5) 得证.

现证 (6). 若 $\mu(f)=+\infty$, 则 $\mu([f>0])=\infty$. 由于 f 只取有限多个值, 故存在 $a>0$, 使 $\mu([f=a])=\infty$. 我们有 $[f_n>\frac{a}{2}]\uparrow[f>\frac{a}{2}]$, $f_n\ge\frac{a}{2}I_{[f_n>\frac{a}{2}]}$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)\ge\frac{a}{2}\lim_{n\to\infty}\mu([f_n>\frac{a}{2}])=\frac{a}{2}\mu\Big([f>\frac{a}{2}]\Big)=\infty.$$

于是 $\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$. 若 $\mu(f)<\infty$, 令 $g_n=f-f_n$, 则由 (5) 知 $\mu(g_n)\downarrow 0$, 故 $\mu(f_n)=\mu(f)-\mu(g_n)\uparrow\mu(f)$. (6) 得证.

最后证明 (7). 先固定某个 m, 令 $h_n=g_n\wedge f_m$, 则 $h_n\in\mathcal{S}^+$, $h_n\uparrow f_m\in\mathcal{S}^+$, 故由 (6) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(h_n)=\mu(f_m)$. 但 $h_n\le g_n$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)\ge\mu(f_m)$, 于是最终有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)\ge\lim_{m\to\infty}\mu(f_m).$$

(7) 得证.

3.1.3 注 在上述证明中，我们用到如下事实：对 $f \in \mathcal{S}^+$，有 $\mu(f) < \infty \Leftrightarrow \mu([f > 0]) < \infty$，但这一结论不能推广到一般非负可测函数．因此，我们未将其列为积分的基本性质．

借助于命题 3.1.2，我们可以给出积分的一般定义．为方便起见，我们只考虑 $\mathcal{F}$ 可测函数情形．所有结果都可以改述为 μ 可测函数情形．

3.1.4 定义 设 f 为一非负可测函数．任取 $f_n \in \mathcal{S}^+$，使 $f_n \uparrow f$(定理 1.1.8)，令

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

则由命题 3.1.2 的 (4) 及 (7) 知，上述右端极限存在，且不依赖于序列 (f_n) 的选取，我们称 $\mu(f)$ 为 f**关于 μ 的积分**．有时也用 $\int_\Omega f d\mu$ 表示 $\mu(f)$．

现设 f 为一可测函数．令 $f^+ = f \vee 0, f^- = (-f) \vee 0$，若 $\mu(f^+) < \infty$ 或 $\mu(f^-) < \infty$，则称 f(关于 μ 的)**积分存在**．令

$$\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-),$$

称 $\mu(f)$ 为 f**关于 μ 的积分**．若 $\mu(f^+) < \infty$，且 $\mu(f^-) < \infty$(或者等价地，$\mu(|f|) < \infty$)，则称 f**关于 μ 可积**(简称 **μ 可积**)．

设 $\xi = f + ig$ 为一复值可测函数．如果 f 和 g 都 μ 可积，则称 ξ 为 **μ 可积**．这时令 $\mu(\xi) = \mu(f) + i\mu(g)$，称 $\mu(\xi)$ 为 ξ **关于 μ 的积分**．

3.1.5 注 设 $f \in \overline{\mathcal{L}}$．若 f 的积分存在 (相应地，f 为可积)，则对任何 $A \in \mathcal{F}, fI_A$ 的积分存在 (相应地，fI_A 为可积)．我们用 $\int_A f d\mu$ 表示 $\int_\Omega fI_A d\mu$．

下一定理列举了积分的一些基本性质．

3.1.6 定理 设 f, g 积分存在．

(1) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha f$ 的积分存在，且 $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$；

(2) 若 $f + g$ 处处有定义，且 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义 (即不出现 $\infty - \infty$)，则 $f + g$ 的积分存在，且有 $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$；

(3) $|\mu(f)| \le \mu(|f|)$；

(4) 若 N 为一零测集，则 $\mu(fI_N) = 0$；

(5) 若 $f \le g$, a.e.，则 $\mu(f) \le \mu(g)$；

(6) 若 $f \in \overline{\mathcal{L}}^+$，则 $f = 0$, a.e.$\Leftrightarrow \mu(f) = 0$；

(7) 若 $f \in \overline{\mathcal{L}}^+$，且 $\mu(f) < \infty$，则 $f < \infty$, a.e.，且 $[f > 0]$ 关于 μ 为 σ 有限的．

证 (1)–(4) 直接由定义 3.1.4 推得．往证 (5)．令 $N = [f > g]$，则依假定 $\mu(N) = 0$，我们有

$$f = fI_{N^c} + fI_N,\ g = gI_{N^c} + gI_N,\ fI_{N^c} \le gI_{N^c}.$$

故由 (4) 知

$$\mu(f) = \mu(fI_{N^c}),\ \mu(g) = \mu(gI_{N^c}).$$

但由积分的定义易知 $\mu(fI_{N^c}) \le \mu(gI_{N^c})$，从而有 $\mu(f) \le \mu(g)$．

现证 (6)．"$\Rightarrow$" 由 (5) 推得，为证 "$\Leftarrow$"，我们用反证法．假设 $\mu([f > 0]) > 0$．由于 $[f > 0] = \bigcup_{n=1}^\infty [f \ge \frac{1}{n}]$，故存在某 n，使 $\mu([f \ge \frac{1}{n}]) > 0$．我们有 $f \ge \frac{1}{n} I_{[f \ge \frac{1}{n}]}$，从而

$$\mu(f) \ge \frac{1}{n}\mu([f \ge \frac{1}{n}]) > 0.$$

"$\Leftarrow$" 得证．

最后证明 (7)．设 $f \in \overline{\mathcal{L}}^+$．假定 $\mu([f = +\infty]) > 0$，则由于 $f \ge \infty I_{[f=\infty]}$，故 $\mu(f) = \infty$，这表明 $\mu(f) < \infty \Rightarrow f < \infty$, a.e.．此外有 $[f > 0] = \bigcup_{n=1}^\infty [f \ge \frac{1}{n}], \mu([f \ge \frac{1}{n}]) \le n\mu(f) < \infty$，故 $[f > 0]$ 关于 μ 为 σ 有限的．定理证毕．

3.1.7 系 (1) 设 f, g 积分存在，且 $f = g$, a.e.，则 $\mu(f) = \mu(g)$．

(2) 设 f 为 μ 可积，则 $|f| < \infty$, a.e.．

(3) 设 f,g 积分存在，且 $\mu(f)+\mu(g)$ 有意义，则 $f+g$ a.e. 有意义.

(4) 设 f,g 积分存在，且 $f\le g$, a.e., 则对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(fI_A)\le\mu(gI_A)$.

下一命题表明：在一定条件下，上述 (4) 的逆命题成立.

3.1.8 命题 设 f,g 积分存在，且对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(fI_A)\le\mu(gI_A)$.

(1) 若 f,g 可积，则 $f\le g$, a.e.;

(2) 若 μ 为 σ 有限测度，则 $f\le g$, a.e..

证 (1) $\forall A\in\mathcal{F}$, 由假定

$$\mu((f-g)I_A)=\mu(fI_A)-\mu(gI_A)\le 0.$$

特别，令 $A=[f>g]$, 则 $(f-g)I_A\ge 0$, 故有 $\mu((f-g)I_A)\ge 0$, 从而由上式知 $\mu((f-g)I_A)=0$, 于是 $(f-g)I_A=0$, a.e.(定理 3.1.6(6)). 由于在 A 上有 $f>g$, 故必须有 $\mu(A)=0$, 即有 $f\le g$, a.e..

(2) 设 μ 为 σ 有限测度. 我们用反证法证明 $f\le g$, a.e.. 假定 $\mu([g<f])>0$, 令

$$A_n=[g<f-\frac{1}{n}]\cap[|f|<n],\ B_m=[g<m]\cap[f=+\infty],$$

则 $[g<f]=(\bigcup_n A_n)\cup(\bigcup_m B_m)$. 于是存在某 n 或 m, 使 $\mu(A_n)>0$ 或 $\mu(B_m)>0$. 假定 $\mu(A_n)>0$, 由 μ 的 σ 有限性知，存在 $A\subset A_n, A\in\mathcal{F}$, 使得 $0<\mu(A)<\infty$, 这时有

$$\int_A gd\mu\le\int_A(f-\frac{1}{n})d\mu=\int_A fd\mu-\frac{1}{n}\mu(A)<\int_A fd\mu.$$

这与假定 $\int_A fd\mu\le\int_A gd\mu$ 矛盾. 若 $\mu(B_m)>0$, 类似论证可导致矛盾，因此必须有 $f\le g$, a.e.. 命题证毕.

3.1.9 系 设 f,g 积分存在，且对一切 $A\in\mathcal{F}$ 有 $\mu(fI_A)=\mu(gI_A)$.

(1) 若 f,g 可积，则 $f=g$, a.e.;

(2) 若 μ 为 σ 有限，则 $f=g$, a.e..

习 题

3.1.1 举例说明命题 3.1.8(2) 中关于 μ 的 σ 有限性条件不能去掉.

3.1.2 证明系 3.1.7(3).

3.1.3 设 (f_n) 为一列可测函数. 若 (f_n) a.e. 单调增 (即 $\forall n, f_n\le f_{n+1}$ a.e.), 则存在一处处单调增序列 (g_n), 使得 $\forall n, f_n=g_n$ a.e..

3.1.4 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间， $A_i\in\mathcal{F}, 1\le i\le n$. 证明

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k)\ge\sum_{k=1}^n\mu(A_k)-\sum_{1\le k<j\le n}\mu(A_k\cap A_j),$$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k)=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mu(\bigcap_{i\in I}A_i),$$

其中 $|I|$ 表示 I 中元素的个数. (提示：证明 $\sum_{k=1}^n I_{A_k}\le I_{\cup_{k=1}^n A_k}+\sum_{1\le k<j\le n}I_{A_k\cap A_j}$ 和 $\bigvee_{k=1}^n I_{A_k}=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\bigwedge_{i\in I}I_{A_i}$.)

3.1.5 设 E 为一距离空间， $\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel σ 代数， μ 与 ν 为 $(E,\mathcal{B}(E))$ 上的两个有限测度. 若对 E 上一切有界连续函数 f 有 $\mu(f)=\nu(f)$, 则 $\mu=\nu$.(提示：利用习题 2.1.5.)

3.1.6 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间， f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的可测映射， μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度.

(1) 令 $\mu f^{-1}(A)=\mu(f^{-1}(A)), A\in\mathcal{E}$. 则 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度 (通常称为由 f 在 $(E,\mathcal{E})$ 上**导出的测度**或 f 的**像测度**).

(2) 设 g 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数，则为要 g 关于测度 μf^{-1} 的积分存在 (相应地，可积), 必须且只需 $g\circ f$ 关于 μ 的积分存在 (相应地，可积). 此外，这时有

$$\int_\Omega g\circ fd\mu=\int_E gd(\mu f^{-1}).$$

(3) 设 $\mathcal{F}^\mu$ 和 $\mathcal{E}^\nu$ 分别表示 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{E}$ 关于 μ 和 ν 的完备化, 则 f 为 $(\Omega,\mathcal{F}^\mu)$ 到 $(E,\mathcal{E}^\nu)$ 中的可测映射.

3.1.7 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间, 在 $\mathcal{F}$ 可测实值函数全体构成的线性空间 $\mathcal{L}$ 上定义距离 $d(f,g)=\mu(|f-g|\wedge 1)$, 证明按此距离收敛等价于按测度收敛.

3.2 积分号下取极限

本节我们将介绍有关积分号下取极限的几个定理 (单调收敛定理, Fatou 引理, 控制收敛定理).

3.2.1 引理 设 $f_n\in\overline{\mathcal{L}}^+, n\geq 1, f\in\overline{\mathcal{L}}^+$.

(1) 若 $f_n\leq f_{n+1}$, a.e., $\forall n\geq 1$, 且 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$;

(2) 若 $f_n\geq f_{n+1}$, a.e., $\forall n\geq 1, f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 且 $\mu(f_1)<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

证 (1) 不妨设 (f_n) 处处单调增, 且 $f_n\uparrow f$ 处处成立. 对每个 n, 令 $f_{n,m}\in\mathcal{S}^+$, 使得 $f_{n,m}\uparrow f_n (m\to\infty)$. 令 $g_m=\bigvee\limits_{i=1}^m f_{i,m}$, 则 $g_m\in\mathcal{S}^+, g_m\uparrow f$, 且 $g_m\leq f_m$, 故由积分的定义有

$$\mu(f)=\lim_{m\to\infty}\mu(g_m)\leq\lim_{m\to\infty}\mu(f_m).$$

但恒有 $\mu(f)\geq\mu(f_m)$, 故有 $\lim\limits_{m\to\infty}\mu(f_m)=\mu(f)$.

(2) 不妨设 (f_n) 处处单调降, 且 $f_n\downarrow f$ 处处成立. 由于假定 $\mu(f_1)<\infty$, 故 $\mu([f_1=\infty])=0$. 令 $\overline{f}_n=f_nI_{[f_1<\infty]}, \overline{f}=fI_{[f_1<\infty]}$, 则 $\overline{f}_n\downarrow\overline{f}, \overline{f}_n$ 为实值可测函数. 令 $g_n=\overline{f}_1-\overline{f}_n$, 则 $g_n\uparrow\overline{f}_1-\overline{f}$, 故由 (1) 推知, $\mu(g_n)\uparrow\mu(\overline{f}_1)-\mu(\overline{f})$, 即有 $\mu(f_n)=\mu(\overline{f}_n)\downarrow\mu(\overline{f})$. 证毕.

3.2.2 系 设 $f_n\in\overline{\mathcal{L}}^+, n\geq 1$, 则有 $\mu(\sum_n f_n)=\sum_n\mu(f_n)$.

证 令 $g_n=\sum_{i=1}^n f_i, g=\sum_{i=1}^\infty f_i$, 则 $g_n\uparrow g$, 故有

$$\mu(g)=\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\mu(f_i)=\sum_{i=1}^\infty\mu(f_i).$$

3.2.3 定理 (单调收敛定理) 设 $f_n\in\overline{\mathcal{L}}, n\geq 1$, 且每个 f_n 的积分存在, 则:

(1) 设 (f_n) a.e. 单调增, 且 $f_n\to f$, a.e.. 若 $\mu(f_1)>-\infty$, 则 f 的积分存在, 且 $\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$;

(2) 设 (f_n) a.e. 单调降, 且 $f_n\to f$, a.e.. 若 $\mu(f_1)<\infty$, 则 f 的积分存在, 且 $\mu(f_n)\downarrow\mu(f)$.

证 先证 (1). 由假定, f_n^+ a.e. 单调增, f_n^- a.e. 单调降, 且有 $f_n^+\xrightarrow{\text{a.e.}} f^+, f_n^-\xrightarrow{\text{a.e.}} f^-$. 由于 $f_1^-\geq f^-$, 且 $\mu(f_1)>-\infty$, $f_n^->-\infty$, 故 $\mu(f^-)\leq\mu(f_1^-)<\infty$. 从而 f 的积分存在, 且由引理 3.2.1 知: $\mu(f_n^+)\uparrow\mu(f^+), \mu(f_n^-)\downarrow\mu(f^-)$. 因此有 $\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$. (1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 即得 (2). 证毕.

3.2.4 定理 (Fatou 引理) 设 $f_n\in\overline{\mathcal{L}}, n\geq 1$, 且每个 f_n 的积分存在.

(1) 若存在 $g\in\overline{\mathcal{L}}$, $\mu(g)>-\infty$, 使得 $\forall n\geq 1$ 有 $f_n\geq g$, a.e., 则 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 积分存在, 且有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n)\leq\liminf_{n\to\infty}\mu(f_n).$$

(2) 若存在 $g\in\overline{\mathcal{L}}, \mu(g)<\infty$, 使得 $\forall n\geq 1$ 有 $f_n\leq g$, a.e., 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 的积分存在, 且有

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} f_n)\geq\limsup_{n\to\infty}\mu(f_n).$$

证 先证 (1). 令 $g_n=\inf_{k\geq n} f_k$, 则 $g_n\uparrow\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, 且 $g_1\geq g$, a.e.. 于是 $\mu(g_1)\geq\mu(g)>-\infty$. 故由定理 3.2.3(1), $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 的积

分存在，且有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(g_n) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

(1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 即得 (2). 证毕.

3.2.5 定理 (控制收敛定理) 设 $f_n \in \mathcal{L}$, 且 $f \in \mathcal{L}, f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若存在一非负可积函数 g, 使得 $\forall n \ge 1$ 有 $|f_n| \le g$, a.e., 则 f 可积, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证 由于 $|f| \le g$, a.e., 故 f 可积. 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则定理的结论直接由定理 3.2.4 推得. 现设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$(见定理 2.3.4(3) 及定理 2.3.5). 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_{n'_k}) = \mu(f)$. 但子列 $(f_{n'})$ 的选取是任意的，故必须有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

下面我们着手推广定理 3.2.4 及 3.2.5.

3.2.6 定理 设 $f_n \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 又设每个 f_n 的积分存在.

(1) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}, \mu(g) > -\infty$, 使得 $\forall n \ge 1, f_n \ge g$,a.e., 则 f 的积分存在，且有 $\mu(f) \le \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

(2) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}, \mu(g) < \infty$, 使得 $\forall n \ge 1, f_n \le g$, a.e., 则 f 的积分存在，且有 $\mu(f) \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

证 先证 (1). 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则由 Fatou 引理立得 (1) 的结论. 现设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 于是由上所证有 $\mu(f) \le \lim\limits_{k\to\infty} \mu(f_{n'_k})$. 但子列 $(f_{n'})$ 的选取是任意的，故必须有 $\mu(f) \le \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$,(1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 得 (2). 证毕.

下一定理是控制收敛定理的推广形式，其进一步推广见习题 3.2.1.

3.2.7 定理 设 $f_n \in \mathcal{L}$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 又设 $g_n \in$

$\mathcal{L}^+, g \in \mathcal{L}^+$, 且 $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$ 或 $g_n \xrightarrow{\mu} g$. 如果 g 及每个 g_n 可积, $\mu(g_n) \to \mu(g)$, 且 $|f_n| \le g_n$, a.e., $\forall n \ge 1$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$. 特别有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证 首先假定同时有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$. 令

$$h_n = g_n + g - |f_n - f|,$$

则 $h_n \ge 0$,a.e., 且 $h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 2g$. 故由定理 3.2.6(1) 得

$$2\mu(g) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(h_n) = 2\mu(g) - \limsup_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|).$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$. 特别有

$$|\mu(f_n) - \mu(f)| \le \mu(|f_n - f|) \to 0.$$

若同时有 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_m \xrightarrow{\mu} g$, 则 $h_n \xrightarrow{\mu} 2g$. 故由定理 3.2.6(1) 亦可推得本定理的结论. 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{\mu} g$, 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$, 则与定理 3.2.6 的证明类似可证 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

3.2.8 系 (Scheffé 引理) 设 f_n, f 为可积可测函数, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\mu(|f_n - f|) \to 0$, 当且仅当 $\mu(|f_n|) \to \mu(|f|)$.

证 必要性显然，充分性由定理 3.2.7 推得 (令 $g_n = |f_n|, g = |f|$).

3.2.9 定理 设 f_n, f 为可积可测函数，则下列二条件等价:

(1) $\mu(|f_n - f|) \to 0$;

(2) $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 且 $\mu(|f_n|) \to \mu(|f|)$.

证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立. 在定理 3.2.7 中令 $g_n = |f_n|, g = |f|$, 即得 (1). 现证 (1)⇒(2). 设 $\mu(|f_n - f|) \to 0$, 对任给 $\varepsilon > 0$, 令 $A_n = [|f_n - f| \ge \varepsilon]$, 则有

$$\varepsilon I_{A_n} \le |f_n - f| I_{A_n} \le |f_n - f|,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon\mu(A_n)\le\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0.$$

这表明 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 此外，由于 $|\,|f_n|-|f|\,|\le|f_n-f|$, 故有

$$|\,\mu(|f_n|)-\mu(|f|)\,|\le\mu(|f_n-f|)\to0,\quad n\to\infty.$$

(1)⇒(2) 得证.

习 题

3.2.1 设 $f_n,h_n,g_n,f,h,g\in\mathcal{L},h_n\le f_n\le g_n$,a.e.,$\forall n\ge1$. 又设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f,g_n\xrightarrow{\text{a.e.}}g$ 或 $g_n\xrightarrow{\mu}g,h_n\xrightarrow{\text{a.e.}}h$ 或 $h_n\xrightarrow{\mu}h$. 如果 h,g,h_n,g_n 都可积，且 $\mu(h_n)\to\mu(h),\mu(g_n)\to\mu(g)$, 则 f 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.(提示：不妨设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f,g_n\xrightarrow{\text{a.e.}}g,h_n\xrightarrow{\text{a.e.}}h$. 分别对 f_n-h_n 及 g_n-f_n 应用 Fatou 引理.)

3.2.2 若在 3.2.1 中有 $h_n\le0\le g_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0$.(提示：对 $|f_n-f|\le g_n-h_n+g-h$ 应用定理 3.2.7.)

3.2.3 设 (f_n) 为一可测函数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(f_n^+)<\infty$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(f_n^-)<\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ a.e. 有意义， $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 的积分存在，且有 $\mu(\sum_{n=1}^{\infty}f_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(f_n)$.

3.3 不定积分与符号测度

本节内容有：符号测度的 Jordan-Hahn 分解，测度的绝对连续性及奇异性，测度的 Lebesgue 分解及 Radon-Nikodym 定理，Vitali-Hahn-Saks 定理.

3.3.1 引理 设 $f\in\overline{\mathcal{L}}$, 且 f 的积分存在. 令

$$\nu(A)=\mu(fI_A),\ A\in\mathcal{F},\tag{3.3.1}$$

则 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的 σ 可加集函数，即有

$$\{A_n,n\ge1\}\subset\mathcal{F},A_n\cap A_m=\emptyset,n\ne m\Rightarrow\nu(\sum_n A_n)=\sum_n\nu(A_n).\tag{3.3.2}$$

此外，令

$$\nu^+(A)=\mu(f^+I_A),\nu^-(A)=\mu(f^-I_A),\ A\in\mathcal{F},\tag{3.3.3}$$

则 ν^+,ν^- 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度，其中之一为有限测度，且有 $\nu=\nu^+-\nu^-$.

证 令 ν^+,ν^- 如 (3.3.2) 式所定义，由系 3.2.2 知， ν^+ 及 ν^- 为 $\mathcal{F}$ 上的测度. 由于 f 的积分存在，我们有 $\nu^+(\Omega)<\infty$ 或 $\nu^-(\Omega)<\infty$. 于是 $\nu^+-\nu^-$ 在 $\mathcal{F}$ 上有定义，且为 $\mathcal{F}$ 上的 σ 可加集函数. 显然有 $\nu=\nu^+-\nu^-$. 证毕.

3.3.2 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一 σ 可加集函数，称 ν 为**符号测度**. 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， $f\in\overline{\mathcal{L}}$, 且 f 的积分存在，则由 (3.3.1) 式定义的符号测度 ν 称为 f 关于 μ 的**不定积分**, 并记为 $\nu=f.\mu$.

设 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一 σ 可加复值集函数，称 ν 为**复测度**. 这时 ν 的实部和虚部均为实值符号测度.

3.3.3 注 设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度，则或者 $-\infty\le\nu(A)<\infty(\forall A\in\mathcal{F})$, 或者 $-\infty<\nu(A)\le\infty(\forall A\in\mathcal{F})$. 事实上，如若不然，则存在 $A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{F}$, 使 $\nu(A)=+\infty,\nu(B)=-\infty$. 我们有 $A\cup B=(A\setminus B)\cup B=(B\setminus A)\cup A$, 依假定，有

$$\nu(A\cup B)=\nu(A\setminus B)+\nu(B),$$
$$\nu(A\cup B)=\nu(B\setminus A)+\nu(A).$$

为了使第一个等式右边有意义，必须有 $\nu(A\setminus B)<\infty$. 为了使第二个等式右边有意义，必须有 $\nu(B\setminus A)>-\infty$. 这时分别从两个

等式得 $\nu(A\cup B)=-\infty, \nu(A\cup B)=\infty$, 这导致矛盾. 此外, 必有 $\nu(\emptyset)=0$.

由引理 3.3.1 知, 不定积分这一特殊的符号测度可以表示为两个测度之差, 且其中之一为有限测度. 下一定理表明: 这一结论对一切符号测度成立.

3.3.4 定理 (Jordan-Hahn 分解定理) 设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度. 对 $A\in\mathcal{F}$, 令

$$\begin{aligned}\nu^+(A)&=\sup\{\nu(B)\,|\,B\subset A,\,B\in\mathcal{F}\},\\ \nu^-(A)&=\sup\{-\nu(B)\,|\,B\subset A,\,B\in\mathcal{F}\}.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

则 ν^+ 及 ν^- 为测度, 其中之一为有限测度, 且有 $\nu=\nu^+-\nu^-$. 此外, 存在 $D\in\mathcal{F}$, 使得

$$\nu^+(A)=\nu(A\cap D),\ \nu^-(A)=-\nu(A\cap D^c).\tag{3.3.5}$$

证 不妨设 $\nu(A)>-\infty, \forall A\in\mathcal{F}$. 令 ν^+,ν^- 如 (3.3.4) 式定义. 首先, 我们证明存在 $D\in\mathcal{F}$, 使得

$$A\in\mathcal{F}, A\subset D\Rightarrow\nu(A)\geq 0,\ A\subset D^c\Rightarrow\nu(A)\leq 0.\tag{3.3.6}$$

为此, 令

$$\mathcal{B}=\{B\in\mathcal{F}\,|\,\nu^+(B)=0\},$$

则 $\mathcal{B}=\{B\in\mathcal{F}|\forall C\in\mathcal{F}, C\subset B, \nu(C)\leq 0\}$. 易见 $\mathcal{B}$ 对可列并运算封闭. 此外, 设 $B\in\mathcal{B}, G\in\mathcal{F}, G\subset B$, 则 $G\in\mathcal{B}$. 令 $B_n\in\mathcal{B}, n\geq 1$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\nu(B_n)=\inf\{\nu(B)\,|\,B\in\mathcal{B}\}\triangleq\beta,$$

则有 $\bigcup_n B_n\in\mathcal{B}$, 且有

$$\beta\leq\nu(\bigcup_n B_n)=\nu(B_m)+\nu(\bigcup_n B_n\setminus B_m)\leq\nu(B_m),\ m\geq 1,$$

故 $\nu(\bigcup_n B_n)=\beta$. 令 $D=(\bigcup_n B_n)^c$, 则 $D^c\in\mathcal{B}, \nu(D^c)=\beta$, 于是由 $\mathcal{B}$ 的定义知 (3.3.6) 式的第二个蕴含关系成立.

再证 (3.3.6) 式的第一个蕴含关系成立. 我们用反证法. 假定存在 $A\in\mathcal{F}, A\subset D$, 使 $\nu(A)<0$, 我们断言: 必有 $\nu^+(A)>0$. 事实上, 若 $\nu^+(A)=0$, 则 $A\in\mathcal{B}$, 故 $A\cup D^c\in\mathcal{B}$. 但有 $\nu(A\cup D^c)=\nu(A)+\nu(D^c)<\nu(D^c)=\beta$, 这与 β 的定义矛盾. 因此必须有 $\nu^+(A)>0$. 由 ν^+ 的定义知, 存在 $A_1\in\mathcal{F}, A_1\subset A$, 使得

$$\nu(A_1)\geq\frac{1}{2}(\nu^+(A)\wedge 1)>0.$$

这时, $A\setminus A_1\subset D, \nu(A\setminus A_1)=\nu(A)-\nu(A_1)<0$, 因此由上所证知 $\nu^+(A\setminus A_1)>0$. 由归纳法, 存在 $A_n\in\mathcal{F}, A_n\subset D, n\geq 1$, 使得 $A_n\subset A\setminus\sum_{k=1}^{n-1}A_k$, 且有

$$\nu(A_n)\geq\frac{1}{2}\Big[\nu^+\Big(A\setminus\sum_{k=1}^{n-1}A_k\Big)\wedge 1\Big]>0.\tag{3.3.7}$$

由于 $\nu(A)<0$, 且有

$$\nu(A)=\nu\Big(A\setminus\sum_{k=1}^{\infty}A_k\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k).\tag{3.3.8}$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)<\infty$, 特别有 $\lim\limits_{k\to\infty}\nu(A_k)=0$. 因此由 (3.3.7) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\nu^+\Big(A\setminus\sum_{k=1}^{n-1}A_k\Big)\wedge 1=0,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\nu^+(A\setminus\sum_{k=1}^{n-1}A_k)=0$. 由于 $\nu^+(A\setminus\sum_{k=1}^{\infty}A_k)\leq\nu^+(A\setminus\sum_{k=1}^{n-1}A_k), n\geq 1$, 故有 $\nu^+(A\setminus\sum_{k=1}^{\infty}A_k)=0$. 因此, 由前面所证, 必须有 $\nu(A\setminus\sum_{k=1}^{\infty}A_k)\geq 0$(否则有 $\nu^+(A\setminus\sum_{k=1}^{\infty}A_k)>0$). 这样一来, 由 (3.3.8) 式知 $\nu(A)>0$, 这与假定 $\nu(A)<0$ 矛盾. 因此, (3.3.6) 式的第一个蕴含关系成立.

现在证明定理的结论. 设 $A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{F},B\subset A$, 则

$$\begin{aligned}\nu(B)+\nu((A\setminus B)\cap D)&=\nu((A\cap D)\cup B)\\&=\nu(A\cap D)+\nu(B\cap D^c).\end{aligned}$$

故由 (3.3.6) 式知 $\nu(B)\le\nu(A\cap D)$, 从而有 $\nu^+(A)=\nu(A\cap D^c)$. 同理可证 $\nu^-(A)=-\nu(A\cap D^c)$. 因此, ν^+ 及 ν^- 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度, 且 $\nu^-(\Omega)=-\nu(D^c)<\infty$, 此外有 $\nu=\nu^+-\nu^-$. 定理证毕.

3.3.5 注 (1) 我们称 ν 的分解 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 为 ν 的 **Jordan 分解**, ν^+ 及 ν^- 分别称为 ν 的**正部**及**负部**; 称 Ω 的分解 $\Omega=D\cup D^c$ 为 ν 的 **Hahn 分解**. Hahn 分解不一定唯一.

(2) 令 $|\nu|=\nu^++\nu^-$, 称 $|\nu|$ 为 ν 的**变差 (测度)**, 称 $|\nu|(\Omega)$ 为 ν 的**全变差**, 记为 $\|\nu\|_{var}$. 若 $|\nu|$ 为 σ 有限测度, 则称 ν 为 **σ有限符号测度**.

(3) 设 ν 为一符号测度, $\Omega=D\cup D^c$ 为其 Hahn 分解. 令 $h=I_D-I_{D^c}$, 则 h 关于 $|\nu|$ 及 ν 积分存在, 且 $\nu=h.|\nu|,|\nu|=h.\nu$.

3.3.6 命题 设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的符号测度, 则 ν 在 $\mathcal{F}$ 上达到其上、下界. 确切地说, 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为其 Hahn 分解, 则

$$\nu(D)=\sup\{\nu(B)\,|\,B\in\mathcal{F}\},\quad \nu(D^c)=\inf\{\nu(B)\,|\,B\in\mathcal{F}\}. \tag{3.3.9}$$

特别, 实值符号测度必然为有界符号测度.

证 设 $B\in\mathcal{F}$, 则由定理 3.3.4 知

$$\nu(B)=\nu^+(B)-\nu^-(B)\le\nu^+(B)\le\nu^+(\Omega)=\nu(D),$$

$$\nu(B)=\nu^+(B)-\nu^-(B)\ge-\nu^-(B)\ge-\nu^-(\Omega)=\nu(D^c).$$

由此推得 (3.3.9) 式.

下面我们引进测度的绝对连续性及奇异性概念.

3.3.7 定义 设 ν_1,ν_2 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个符号测度. 如果

$$A\in\mathcal{F},|\nu_2|(A)=0\Rightarrow|\nu_1|(A)=0, \tag{3.3.10}$$

则称 ν_1 关于 ν_2**绝对连续**(记为 $\nu_1\ll\nu_2$). 若 $\nu_1\ll\nu_2$ 且 $\nu_2\ll\nu_1$, 则称 ν_1 与 ν_2**等价**, 记为 $\nu_1\sim\nu_2$. 若存在 $N\in\mathcal{F}$, 使得 $|\nu_1|(N^c)=0,|\nu_2|(N)=0$, 则称 ν_1 与 ν_2**相互奇异**(记为 $\nu_1\perp\nu_2$).

设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度, 若 $N\in\mathcal{F}$, 使得 $|\nu|(N^c)=0$, 则称 N 为 ν 的**支撑**. 一般说来, 支撑并非唯一确定.

由上述定义知, $\nu_1\ll\nu_2\Leftrightarrow$ 凡 ν_2 的支撑必为 ν_1 的支撑; $\nu_1\perp\nu_2\Leftrightarrow\nu_1$ 与 ν_2 有不相交的支撑.

3.3.8 注 (1) 由 (3.3.4) 式易知, (3.3.10) 式等价于如下条件:

$$A\in\mathcal{F},\ |\nu_2|(A)=0\Rightarrow\nu_1(A)=0. \tag{3.3.11}$$

(2) 设 $\nu_1\ll\nu_2$, 且 $\nu_1\perp\nu_2$, 则 $\nu_1=0$(即对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\nu_1(A)=0$), 此外, 恒有 $\nu\perp 0$.

(3) 设 ν 为一符号测度, $f\in\overline{\mathcal{L}}$. 若 f 关于 ν 的积分存在, 则 $f.\nu\ll\nu$.

3.3.9 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间, h 为一非负可测函数, 令 $h.\mu$ 表示 h 关于 μ 的不定积分 (从而 $h.\mu$ 为一测度). 设 $g\in\overline{\mathcal{L}}$, 则 g 关于 $h.\mu$ 的积分存在, 当且仅当 gh 关于 μ 的积分存在. 这时有

$$\int_A gd(h.\mu)=\int_A ghd\mu,\quad \forall A\in\mathcal{F}. \tag{3.3.12}$$

证 首先, 设 g 为非负简单函数, 则由 $h.\mu$ 的定义知 (3.3.12) 式成立. 于是由积分的单调收敛定理知, 对一切 $g\in\overline{\mathcal{L}}^+$, (3.3.12) 式成立. 由此立刻推得引理的结论.

下一定理表明: 任一 σ 有限符号测度 ν 总可以唯一地分解为关于另一 σ 有限符号测度 μ 的绝对连续部分和奇异部分之和.

3.3.10 定理 设 μ 与 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个 σ 有限符号测度, 则 ν 有如下唯一分解 (称为 **Lebesgue 分解**):

$$\nu=\nu_s+\nu_c\,, \tag{3.3.13}$$

其中 $\nu_s\perp\mu,\nu_c\ll\mu$. 此外, ν_s 及 ν_c 均为 σ 有限的, 并且存在 $N\in\mathcal{F},g\in\mathcal{L}$, 使得 $|\mu|(N)=0,\nu_s(A)=\nu_s(A\cap N)$, g 关于 $|\mu|$ 的积分存在, ν_c 为 g 关于 μ 的不定积分.

证 首先不妨假定 μ 为测度 (否则以 $|\mu|$ 代替 μ), 且 $\mu(\Omega)>0$. 这时由 μ 的 σ 有限性知, 存在 Ω 的一个可数划分 $\Omega=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 使得 $A_n\in\mathcal{F},0<\mu(A_n)<\infty,\forall n\geq 1$. 令

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\mu(A_n)}I_{A_n},$$

则 h 处处严格正, 且 $\mu(h)=1$. 令 $\widetilde{\mu}=h.\mu$, 则 $\widetilde{\mu}$ 为测度, 且 $\widetilde{\mu}(\Omega)=1$. 由于 $\widetilde{\mu}$ 与 μ 等价, 故由引理 3.3.9 知, 可以 $\widetilde{\mu}$ 代替 μ 来证明定理的结论. 因此, 不妨设 μ 为有限测度.

下面先假定 ν 也为有限测度. 令

$$\mathcal{H}=\Big\{h\in\overline{\mathcal{L}}^+\,|\,\forall A\in\mathcal{F},\int_A hd\mu\leq\nu(A)\Big\},$$

设 $h_1,h_2\in\mathcal{H},h=h_1\vee h_2$, 则

$$\begin{aligned}\int_A hd\mu&=\int_{A\cap[h_1\geq h_2]}h_1d\mu+\int_{A\cap[h_1<h_2]}h_2d\mu\\&\leq\nu(A\cap[h_1\geq h_2])+\nu(A\cap[h_1<h_2])=\nu(A),\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{H}$ 对有限上端运算封闭. 现设 $h_n\in\mathcal{H},h_n\uparrow g$, 使得

$$\int_\Omega gd\mu=\sup\Big\{\int_\Omega hd\mu\,|\,h\in\mathcal{H}\Big\},$$

则由积分单调收敛定理易知 $g\in\mathcal{H}$. 令

$$\nu_s(A)=\nu(A)-\int_A gd\mu,\ A\in\mathcal{F},$$

则 ν_s 为一有限测度. 往证 $\nu_s\perp\mu$. 令 $\Omega=D_n+D_n^c$ 为符号测度 $\nu_s-\frac{1}{n}\mu$ 的 Hahn 分解, 则对一切 $A\in\mathcal{F}$,

$$\nu_s(A\cap D_n)\geq n^{-1}\mu(A\cap D_n)=n^{-1}\int_A I_{D_n}d\mu.$$

于是 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有

$$\int_A(g+n^{-1}I_{D_n})d\mu\leq\int_A gd\mu+\nu_s(A\cap D_n)\leq\nu(A),$$

这表明 $g+n^{-1}I_{D_n}\in\mathcal{H}$. 但另一方面 $\mu(g)=\sup\{\mu(h)\,|\,h\in\mathcal{H}\}$, 故必须有 $\mu(D_n)=0$. 令 $N=\bigcup_n D_n$, 则 $\mu(N)=0$. 此外我们有 (注意 $(\nu_s-\frac{1}{n}\mu)(D_n^c)\leq 0$)

$$\nu_s(N^c)\leq\nu_s(D_n^c)\leq n^{-1}\mu(D_n^c)\leq n^{-1}\mu(\Omega)\to 0\ (n\to\infty),$$

这表明 $\nu_s\perp\mu$. 令

$$\nu_c(A)=\int_A gd\mu,$$

则 $\nu_c\ll\mu$(见定理 3.1.6(3)). 此外, 由于 g 为 μ 可积的, 故 g 可取为实值可测函数.

现设 ν 为 σ 有限符号测度. 为证定理结论, 不妨假定 ν 为 σ 有限测度 (否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-). 取 Ω 的一个可数划分 $\Omega=\sum_n A_n$, 使得 $A_n\in\mathcal{F},\nu(A_n)<\infty,n\geq 1$. 令 $\nu^n(A)=\nu(A\cap A_n)$, 则每个 ν^n 为有限测度, 故由上所证, ν^n 有如下分解:

$$\nu^n=\nu_s^n+\nu_c^n,\ n\geq 1,$$

其中 $\nu_s^n \perp \mu, \nu_c^n \ll \mu$, 且存在非负实值可测函数 g_n, 使得 $\nu_c^n = g_n.\mu$. 显然, g_n 在 A_n^c 上可取为 0, 令

$$\nu_s = \sum_n \nu_s^n, \quad \nu_c = \sum_n \nu_c^n, \quad g = \sum_n g_n,$$

则有 $\nu_s \perp \mu, \nu_c \ll \mu, \nu_c = g.\mu$, 且 (3.3.13) 式成立. ν 的分解唯一性容易由注 3.3.8(2) 看出. 定理证毕.

设 μ 为一测度, ν 为某 $f \in \overline{\mathcal{L}}$ 关于 μ 的不定积分, 则 ν 关于 μ 绝对连续 (见注 3.3.8(2)). 下一定理表明: 若 μ 为 σ 有限测度, 则逆命题成立.

3.3.11 定理 (Radon-Nikodym 定理) 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, μ 为一 σ 有限测度, ν 为一符号测度 (不必为 σ 有限). 如果 ν 关于 μ 绝对连续, 则存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g, 使得 $\nu = g.\mu$. 此外, g 在 μ 等价意义下是唯一的 (称 g_1, g_2 为 μ 等价的, 是指 $\mu([g_1 \neq g_2]) = 0$), 为要 g 为 μ-a.e. 有限, 必须且只需 ν 为 σ 有限的.

证 若 ν 为 σ 有限符号测度, 则由定理 3.3.10 立刻推得本定理结论 (因为这时由注 3.3.8(2) 知 (3.3.13) 式中的 $\nu_s = 0$). 为证定理, 不妨设 ν 为测度 (否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-), 且 $\nu(\Omega) = \infty$. 此外由 μ 的 σ 有限性及引理 3.3.9 知, 不妨假定 μ 为有限测度 (参看定理 3.3.10 证明的开头部分). 令

$$\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F} \mid \nu(C) < \infty\},$$

显然 $\mathcal{G}$ 对有限并运算封闭. 于是存在 $C_n \in \mathcal{G}, C_n \uparrow C$, 使得

$$\mu(C) = \sup\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}\}. \tag{3.3.14}$$

令

$$\nu'(B) = \nu(B \cap C), \quad \nu''(B) = \nu(B \cap C^c), \quad B \in \mathcal{F},$$

则 ν' 为 σ 有限测度, 且 $\nu' \ll \mu$, 故存在非负实值可测函数 g', 使得 $\nu' = g'.\mu$. 另一方面, 由 $\mathcal{G}$ 的定义及 (3.3.14) 式知

$$\mu(B \cap C^c) > 0 \Rightarrow \nu(B \cap C^c) = \infty.$$

因此, 若令 $g'' = (+\infty)I_{C^c}, g = g' + g''$, 则 $\nu'' = g''.\mu$, $\nu = g.\mu$. 定理的其余结论显然. 证毕.

3.3.12 定义 我们用 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ 表示定理 3.3.11 中的 g(它在 μ 等价意义下唯一确定), 并称 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ 为 ν 关于 μ 的 **Radon-Nikodym 导数**.

3.3.13 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一 σ 有限测度空间, ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度, 且 $\nu \ll \mu$. 令 $g \in \overline{\mathcal{L}}$, 则 g 关于 ν 积分存在, 当且仅当 $g\frac{d\nu}{d\mu}$ 关于 μ 积分存在, 并且这时有

$$\int_A g d\nu = \int_A (g\frac{d\nu}{d\mu}) d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}. \tag{3.3.15}$$

证 若 ν 为测度, 则定理的结论由引理 3.3.9 推得. 现设 ν 为符号测度. 令 $h = g\dfrac{d\nu}{d\mu}$, 则

$$h^+ = g^+\frac{d\nu^+}{d\mu} + g^-\frac{d\nu^-}{d\mu}, \quad h^- = g^-\frac{d\nu^+}{d\mu} + g^+\frac{d\nu^-}{d\mu}.$$

设 g 关于 ν 积分存在, 则 g 关于 ν^+ 及 ν^- 积分存在, 且 $\nu^+(g) - \nu^-(g)$ 有意义. 于是 $g\dfrac{d\nu^+}{d\mu}$ 及 $g\dfrac{d\nu^-}{d\mu}$ 关于 μ 积分存在, 且有

$$\nu^+(g) = \int (g\frac{d\nu^+}{d\mu}) d\mu, \quad \nu^-(g) = \int (g\frac{d\nu^-}{d\mu}) d\mu.$$

于是有

$$\nu^+(g) = \int (g^+\frac{d\nu^+}{d\mu}) d\mu - \int (g^-\frac{d\nu^+}{d\mu}) d\mu,$$
$$\nu^-(g) = \int (g^+\frac{d\nu^-}{d\mu}) d\mu - \int (g^-\frac{d\nu^-}{d\mu}) d\mu.$$

由于 $\nu^+(g)-\nu^-(g)$ 有意义，则必须有 $\mu(h^+)<\infty$ 或 $\mu(h^-)<\infty$(请读者自行验证这一事实)．因此 h 关于 μ 积分存在，且 $\mu(h)=\nu^+(g)-\nu^-(g)=\nu(g)$．对 gI_A 应用这一结果即得 (3.3.15) 式．反之，设 h 关于 μ 积分存在，则 $\mu(h^+)<\infty$ 或 $\mu(h^-)<\infty$, 由此可推知 g 关于 μ^+ 及 μ^- 积分存在，$\nu^+(g)-\nu^-(g)$ 有意义 (即 g 关于 ν 可积), 且 $\nu(g)=\mu(h)$．对 gI_A 应用这一结果即得 (3.3.15) 式．证毕.

3.3.14 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，μ 及 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的两个 σ 有限测度，φ 为 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度．如果 $\varphi\ll\nu,\nu\ll\mu$, 则 $\varphi\ll\mu$, 且有

$$\frac{d\varphi}{d\mu}=\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu},\ \mu-\text{a.e.}. \tag{3.3.16}$$

证 显然有 $\varphi\ll\mu$, 故由定理 3.3.13, 对 $\forall A\in\mathcal{F}$, 有

$$\int_A\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_A\frac{d\varphi}{d\nu}d\nu=\varphi(A)=\int_A\frac{d\varphi}{d\mu}d\mu,$$

于是由系 3.1.9(2) 知 (3.3.16) 式成立.

下一定理称为 **Vitali-Hahn-Saks 定理**．我们将在下一节和 7.4 节中用到这一定理.

3.3.15 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，(μ_n) 为其上的一列有限符号测度．令 λ 为一有限测度，使得对一切 $n\geq 1$, 有 $\mu_n\ll\lambda$(例如令 $\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\|\mu_n\|}|\mu_n|$, 其中 $\|\mu_n\|$ 表示 μ_n 的全变差，$|\mu_n|$ 为 μ_n 的变差测度)．如果对每个 $A\in\mathcal{F}$, 极限 $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在且有限，则:

(1) μ 为一符号测度;

(2) $\sup_n\|\mu_n\|<\infty$;

(3) 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F},\ \lambda(A)\leq\eta\Rightarrow\sup_n|\mu_n|(A)\leq\varepsilon.$$

证 令 Φ 表示 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$ 中由 $\mathcal{F}$ 可测集的示性函数等价类所成的子集，则 Φ 是闭集．从而作为子空间，Φ 为完备距离空间．设 $A\in\mathcal{F}$, 令 $\dot{A}$ 表示 A 所相应的等价类，我们用 $\dot{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中元素等价类全体，则 $(\dot{\mathcal{F}},d)$ 为完备距离空间，其中

$$d(\dot{A},\dot{B})=\lambda(A\Delta B).$$

设 $\alpha>0$, 令

$$L_j=\{\dot{A}\in\dot{\mathcal{F}}\,|\forall n\geq j,m\geq j,|\mu_n(A)-\mu_m(A)|\leq\alpha\},$$

由于函数 $\dot{A}\mapsto\mu_n(A)$ 在 $\dot{\mathcal{F}}$ 上连续，故 L_j 为闭集．显然 $\bigcup_j L_j=\dot{\mathcal{F}}$(因对一切 $A\in\mathcal{F},\mu_n(A)$ 收敛)．由 Baire 定理 (见定理 5.1.27), 存在某 j, 使 L_j 有一内点 $\dot{A}$, 即对某 $h>0$, 有

$$B\in\mathcal{F},\lambda(B\Delta A)\leq h\Rightarrow|\mu_n(B)-\mu_m(B)|\leq\alpha,\forall n\geq j,\forall m\geq j.$$

取 $0<\eta<h$, 使得 (见习题 3.3.3)

$$C\in\mathcal{F},\lambda(C)\leq\eta\Rightarrow|\mu_i|(C)\leq\alpha,\ i=1,\cdots,j.$$

对于 $n\geq j$, 我们有

$$\begin{aligned}|\mu_n(C)|&\leq|\mu_n(A\cup C)-\mu_n(A)|+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_n(A)|\\&\leq|\mu_n(A\cup C)-\mu_j(A\cup C)|+|\mu_j(A\cup C)-\mu_j(A)|\\&\quad+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_j(A\backslash C)|\\&\quad+|\mu_j(A\backslash C)-\mu_j(A)|+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|.\end{aligned}$$

于是 $\lambda(C)\leq\eta\Rightarrow\sup_n|\mu(C)|\leq 6\alpha$．从而由习题 3.3.7 知：$\lambda(C)\leq\eta\Rightarrow\sup_n|\mu_n|(C)\leq 12\alpha$．由此立刻推得 (3)(令 $\alpha=\varepsilon/12$).

下面我们证明 (2)．我们将空间 Ω 分为有限多个 λ 测度 $>\eta$ 的原子及有限多个 λ 测度 $\leq\eta$ 的集合．由于 $|\mu_n|\ll\lambda$, 故 λ 的原子必

为每个 $|\mu_n|$ 的原子. 于是在 λ 的原子集 A 上, 有 $|\mu_n|(A)=|\mu_n(A)|$, 从而 $\sup_n|\mu_n|(A)<\infty$. 由此并利用前段的结果推得 (2) 的结论.

最后, μ 在 $\mathcal{F}$ 上显然是有限可加的. 现设 $E_k\in\mathcal{F}, E_k\downarrow\emptyset$, 则 $\lambda(E_k)\to 0$, 从而由 (3) 知 $\mu(E_k)\to 0$. 由此推知 μ 是 σ 可加的, 故 μ 是有限符号测度. 证毕.

3.3.16 系 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间, $\xi_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu), n\geq 1$. 若 $\forall A\in\mathcal{F}, \int_A\xi_n d\mu$ 的极限存在且有穷, 则存在唯一的 $\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\xi_n d\mu=\int_A\xi d\mu,\quad A\in\mathcal{F}.$$

习 题

3.3.1 设 ν 为一符号测度, f 关于 ν 的积分存在 (见注 3.3.5(3)). 则对一切 $A\in\mathcal{F}, fI_A$ 关于 ν 的积分存在, 且 $A\mapsto\nu(fI_A)$ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度 (记为 $f.\nu$).

3.3.2 设 ν 及 μ 为两个符号测度, f 关于 ν 的积分存在. 若 $\nu\ll\mu$ (相应地 $\nu\perp\mu$), 则 $f.\nu\ll\mu$ (相应地, $f.\nu\perp\mu$).

3.3.3 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限符号测度. 则下列二断言等价:

(1) $\nu\ll\mu$;

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $A\in\mathcal{F},\mu(A)<\delta\Rightarrow|\nu|(A)<\varepsilon$.

3.3.4 举例说明定理 3.3.11 中 μ 的 σ 有限性假定不能去掉. (提示: 令 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\{A\subset[0,1]\,|\,A$或$A^c$为至多可数集$\}$.)

3.3.5 设 μ 及 ν 为两个 σ 有限测度, 则为要 $\nu\sim\mu$, 必须且只需存在可测函数 $g:0<g(\omega)<\infty,\forall\omega\in\Omega$, 使得 $\nu=g.\mu$.

3.3.6 设 μ_1,μ_2 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限符号测度, 令

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\quad \mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+,$$

则 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$ 且 $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度 ν; $\mu_1\wedge\mu_2$ 为满足 $\nu\leq\mu_1$ 且 $\nu\leq\mu_2$ 的最大符号测度 ν.

3.3.7 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上符号测度, 则 $\|\mu\|_{\text{var}}\leq 2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$. 若 $\mu(\Omega)=0$, 则 μ 为有限符号测度, 且有 $\|\mu\|_{\text{var}}=2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$.

3.3.8 设 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上有界 $\mathcal{F}$ 可测函数全体, $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上有限符号测度全体. 对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$,

(1) $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间 (完备赋范线性空间).

(2) 设 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $I_\mu(f)=\mu(f), f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 则 μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函, 且有 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\text{var}}$.(提示: 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解, 令 $f=I_D-I_D^c$, 考虑 $\mu(f)$.)

(3) $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 为一 Banach 空间.

3.3.9 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度, f_1 和 f_2 关于 μ 的积分存在, 则 $f_1.\mu\wedge f_2.\mu=(f_1\wedge f_2).\mu$; $f_1.\mu\vee f_2.\mu=(f_1\vee f_2).\mu$.

3.4 空间 L^p 及其对偶

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 对任一 $p:0<p<\infty$, 我们令

$$L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)=\{f\in\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F})\,|\,\mu(|f|^p)<\infty\}\tag{3.4.1}$$

(简记为 L^p), 其中 $\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$ 可测实值函数全体. 设 $f,g\in\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F})$, 如果 $f=g$, μ-a.e., 称 f 与 g 是 μ 等价的. 今后, 我们将 L^p 中 a.e. 相等的元素不加区别, 即把 L^p 视为按 μ 等价关系所作的商空间. 令

$$\|f\|_p=\mu(|f|^p)^{\frac{1}{p}},\tag{3.4.2}$$

我们将证明: 对 $p\geq 1,(L^p,\|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间 (见定理 3.4.5).

首先, 我们建立空间 L^p 的一些基本不等式. 为此, 我们需要如下两个分析不等式, 其证明可在任何一本数学分析书中找到:

设 a, b 为实数， $r > 0, 1 < p, q < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$|a+b|^r \le \max(1, 2^{r-1})(|a|^r + |b|^r), \tag{3.4.3}$$

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{3.4.4}$$

3.4.1 定理 设 $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}), r > 0, 1 < p, q < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, s \ge 1$. 则有

$$\mu(|f+g|^r) \le C_r \mu(|f|^r + |g|^r), \tag{3.4.5}$$

$$\mu(|fg|) \le \|f\|_p \|g\|_q, \tag{3.4.6}$$

$$\|f+g\|_s \le \|f\|_s + \|g\|_s, \tag{3.4.7}$$

其中 $C_r = \max(1, 2^{r-1})$. 我们分别称 (3.4.5) 式、(3.4.6) 式及 (3.4.7) 式为 **C_r不等式**、 **Hölder 不等式** 及 **Minkowski 不等式**. 对 $p = q = 2$ 情形， (3.4.6) 式亦称为 **Schwarz 不等式**.

证 (3.4.5) 式可直接从 (3.4.3) 式推得. 现证 (3.4.6) 式. 不妨设 $\|f\|_p < \infty, \|g\|_q < \infty$, 令 $\varphi = f/\|f\|_p, \psi = g/\|g\|_q$, 则由 (3.4.4) 式得

$$\mu(|\varphi\psi|) \le \frac{\mu(|\varphi|^p)}{p} + \frac{\mu(|\psi|^q)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

此即 (3.4.6) 式.

最后证明 (3.4.7) 式. 不妨设 $f, g \in L^s$, 由 (3.4.5) 式知 $f+g \in L^s$, 且当 $s = 1$ 时 (3.4.7) 式成立. 现设 $s > 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\int |f+g|^s d\mu &= \int |f+g|\,|f+g|^{s-1} d\mu \\ &\le \int |f|\,|f+g|^{s-1} d\mu + \int |g|\,|f+g|^{s-1} d\mu.\end{aligned}$$

令 $s' > 1$ 使 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, 对上一不等式右端应用 (3.4.6) 式得 (注意 $s'(s-1) = s$)

$$\begin{aligned}\int |f+g|^s d\mu \le \|f\|_s \Big(\int |f+g|^s d\mu\Big)^{1/s'} \\ + \|g\|_s \Big(\int |f+g|^s d\mu\Big)^{1/s'},\end{aligned}$$

由此立得 (3.4.7) 式. 证毕.

3.4.2 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一概率空间， φ 为一连续凸函数 (即 $\forall \alpha: 0 \le \alpha \le 1, \forall x, y \in \mathbf{R}, \varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)$), 又设 $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 则 $\varphi(f)$ 关于 μ 的积分存在，且有

$$\varphi(\mu(f)) \le \mu(\varphi(f)). \tag{3.4.8}$$

(3.4.8) 式称为 **Jensen 不等式**.

证 令 φ' 表示 φ 的右导数，则 $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 有

$$\varphi'(x)(y-x) \le \varphi(y) - \varphi(x).$$

于是有

$$\varphi'(\mu(f))(f - \mu(f)) \le \varphi(f) - \varphi(\mu(f)),$$

两边关于 μ 积分即得欲证不等式.

3.4.3 定义 设 $r > 0, \{f, f_n, n \ge 1\} \subset L^r$. 如果 $\mu(|f_n - f|^r) \to 0, n \to \infty$, 则称 (f_n) **r次平均收敛于**f(简称 (f_n) L^r 收敛于 f), 或称 (f_n) 在 L^r 中**强收敛于**f, 记为 $f_n \xrightarrow{L^r} f$.

显然， L^r 收敛的极限是唯一确定的 (在 μ 等价意义下), 此外， L^r 收敛蕴含依测度收敛. 事实上，设 $\varepsilon > 0$, 则

$$\mu(|f_n - f| \ge \varepsilon) = \mu(|f_n - f|^r \ge \varepsilon^r) \le \frac{1}{\varepsilon^r}\mu(|f_n - f|^r).$$

3.4.4 引理 设 $r > 0, f_n \in L^r, n \ge 1$, 则为要 (f_n) L^r 收敛于某 $f \in L^r$, 必须且只需 (f_n) 为 L^r 收敛的基本列.

证 先证必要性. 设 $f_n \xrightarrow{L^r} f$, 则由 (3.4.3) 式得

$$|f_n - f_m|^r \le C_r(|f_n - f|^r + |f_m - f|^r),$$

故有 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu(|f_n - f_m|^r) = 0$. 往证充分性. 设 (f_n) 为 L^r 收敛基本列, 则易知 f_n 为依测度收敛的基本列, 故存在 $f \in \mathcal{L}$, 使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$(习题 2.3.1). 于是由 Fatou 引理知

$$\mu(|f_n - f|^r) \le \varliminf_{m\to\infty} \mu(|f_n - f_m|^r),$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|^r) = 0$, 显然有 $f \in L^r$. 证毕.

3.4.5 定理 设 $p \ge 1$, 则 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间.

证 首先, 由定理 3.1.6(6) 知, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a.e., 此外, 对任一实数 α, 有 $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$, 故由 (3.4.7) 式知 $\|\cdot\|_p$ 为 L^p 上的一范数. 再由引理 3.4.5 知, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间. 证毕.

3.4.6 定理 设 $p \ge 1, \{f, f_n, n \ge 1\} \subset L^p$, 则下列二条件等价:

(1) $\|f_n - f\|_p \to 0$;

(2) $f_n \xrightarrow{\mu} f, \|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

此外, 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, \|f_n\|_p \to \|f\|_p$, 则也有 $\|f_n - f\|_p \to 0$.

证 (1)⇒(2) 显然. 由于

$$|f_n - f|^p \le 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p),$$

故由定理 3.2.7 推知 (2)⇒(1) 及另一结论.

下面我们研究空间 L^p 的可分性, 为此, 先证明一个引理.

3.4.7 引理 令 $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F})$ 表示 Ω 上的 $\mathcal{F}$ 可测简单函数全体, 设 $p \ge 1$, 则 $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}) \cap L^p$ 在 L^p 中稠密.

证 设 $f \in L^p$, 由定理 2.1.8 知: 存在 $f_n \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}), |f_n| \le |f|$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. 于是 $f_n \in L^p$, 且 $|f_n - f|^p \le 2^p|f|^p$, 故由控制收敛定理知 $\mu(|f_n - f|^p) \to 0 (n \to \infty)$. 证毕.

3.4.8 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, 称 $\mathcal{F}$ 为 **μ 可分**, 如果存在一可分的 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{F}_0$, 使 $\forall A \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{F}_0$, 满足 $\mu(A \triangle B) = 0$.

3.4.9 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, μ 为 σ 有限测度. 则下列断言等价:

(1) $\mathcal{F}$ 为 μ 可分;

(2) 对一切 $p \ge 1$, L^p 为可分 Banach 空间;

(3) 对某个 $p \ge 1, L^p$ 为可分 Banach 空间.

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{F}$ 为 μ 可分, 令 $\mathcal{F}_0$ 为 Ω 上的一可分 σ 代数, 使得 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, 且 $\forall A \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{F}_0$, 满足 $\mu(A \triangle B) = 0$. 可以假定存在 Ω 的一个可数划分: $\Omega = \sum_n A_n$, 使得 $A_n \in \mathcal{F}_0, \mu(A_n) < \infty, n = 1, 2, \cdots$, 由定义 1.2.7 知, 存在一代数 $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_0$, 其元素个数至多可数, 使得 $A_n \in \mathcal{L}, n \ge 1, \sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{F}_0$. 令

$$\mathcal{H} = \{\sum_{i=1}^n a_i I_{B_i}, B_i \in \mathcal{L}, a_i \text{ 为有理数}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}.$$

由习题 1.3.4 知, 对一切 $p \ge 1, \mathcal{H}$ 在 $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}) \cap L^p$ 中按 L^p 范数稠密, 从而由引理 3.4.7 知, $\mathcal{H}$ 在 L^p 中稠密. 但 $\mathcal{H}$ 的元素为可数多个, 故 L^p 为可分 Banach 空间.

剩下只需证 (3)⇒(1). 设对某个 $p \ge 1, L^p$ 为可分 Banach 空间, 则存在 L^p 的一可数稠子集 $\mathcal{H}$. 令 $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{H})$(即 $\mathcal{F}_0$ 为使 $\mathcal{H}$ 中元素为可测的最小 σ 代数). 则显然 $\mathcal{F}_0$ 为可分 σ 代数, 且 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. 现设 $A \in \mathcal{F}$, 且 $\mu(A) < \infty$, 则 $I_A \in L^p$. 于是存在 $f_n \in \mathcal{H}$, 使 $f_n \xrightarrow{L^p} I_A$, 特别有 $f_n \xrightarrow{\mu} I_A$. 令 $B_n = [\frac{1}{2} < f_n < \frac{3}{2}]$, 则 $B_n \in \mathcal{F}_0$, 且 $B_n \triangle A \subset [|f_0 - I_A| \ge \frac{1}{2}]$. 故有 $\mu(B_n \triangle A) \to 0 (n \to \infty)$. 即 $I_{B_n} \xrightarrow{\mu}$

I_A. 于是存在子列 $(B_{n'})$, 使 $I_{B_{n'}} \xrightarrow{\text{a.e.}} I_A$. 令 $B = \limsup_{n'\to\infty} B_{n'}$, 则 $B \in \mathcal{F}_0$, 且 $I_B = I_A$, a.e., 即 $\mu(B\triangle A) = 0$. 由于 μ 是 σ 有限的, 于是我们证明了 $\mathcal{F}$ 的 μ 可分性.

3.4.10 注 定理中关于 μ 为 σ 有限的条件不能去掉. 例如: 设 $\Omega = \mathbf{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$, 对 $A \in \mathcal{F}$, 令 $\mu(A)$ 表示 A 中元素个数 (若 A 含无穷多个元素, 令 $\mu(A) = \infty$), 则 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 不可分 (请读者证明这一事实).

作为定理 3.4.9 的一个推论, 我们有

3.4.11 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, μ 为其上的一 σ 有限测度, 若 $\mathcal{F}$ 为 μ 可分, 则 $\mathcal{F}$ 的任何子 σ 代数也为 μ 可分.

证 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数, 则 $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ 可视为 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的子空间. 依假定, $\mathcal{F}$ 为 μ 可分, 故由定理 3.4.9 知 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为可分. 因此, 作为它的子空间 $L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ 亦可分, 再由定理 3.4.9 即知 $\mathcal{G}$ 为 μ 可分. 证毕.

下面我们定义空间 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

3.4.12 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, 令 $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F})$, 称 f 为**本性有界**的, 如果存在非负实数 c, 使得 $\mu([|f| > c]) = 0$, 我们用 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 表示本性有界可测函数全体. 设 $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 令

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq 0 \,|\, \mu([|f| > c]) = 0\}.$$

下一定理的证明是不足道的.

3.4.13 定理 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的范数, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 按范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为一 Banach 空间.

设 X 为一赋范线性空间. 若 f 为 X 上一有界线性泛函, 令

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

称 $\|f\|$ 为 f 的范数. 熟知, X 上的有界线性泛函全体按上述范数构成一 Banach 空间, 我们称它为 X 的**对偶空间**, 记为 X^*. 下面将研究 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 的对偶空间 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$.

3.4.14 定理 设 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$ 与 $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 保范线性同构: 设 $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. 令

$$T_g(f) = \mu(fg), \quad f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \tag{3.4.9}$$

则 $T_g \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*, g \mapsto T_g$ 为 $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 到 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$ 上的一对一映射, 且 $\|g\|_q = \|T_g\|$.

证 设 $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 由 Hölder 不等式知, (3.4.9) 式定义了 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的一有界线性泛函 T_g, 且 $\|T_g\| \leq \|g\|_q$. 往证 $\|T_g\| = \|g\|_q$. 不妨设 $\|g\|_q > 0$, 令

$$f = |g|^{q-1}\mathrm{sgn}(g),$$

其中 $\mathrm{sgn}(x)$ 为 x 的符号, 即 $\mathrm{sgn}(x) = I_{(0,\infty)}(x) - I_{(-\infty,0)}(x)$. 由于 $(q-1)p = q$, 故有 $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$, 从而

$$\begin{aligned} T_g(f) = \mu(|g|^q) = \|g\|_q^q = \|g\|_q\|g\|_q^{q-1} \\ = \|g\|_q\|f\|_p. \end{aligned}$$

这表明 $\|T_g\| \geq \|g\|_q$, 从而最终有 $\|T_g\| = \|g\|_q$. 显然 $g \longmapsto T_g$ 为 $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 到 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$ 中的线性单射. 剩下要证明它是满射.

设 $T \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$, 欲证存在 $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 使 $T_g = T$. 为此, 令 $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} \,|\, \mu(A) < \infty\}$, 对每个 $A \in \mathcal{G}$, 令

$$T_A(f) = T(fI_A), \; f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu),$$

则 $T_A \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$, 且 $\|T_A\| \leq \|T\|$. 令

$$\nu_A(B) = T_A(I_B) = T(I_{A\cap B}), \; \mu_A(B) = \mu(A \cap B), B \in \mathcal{F},$$

则 ν_A 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一有限符号测度，且 $\nu_A \ll \mu_A$. 令 $g_A = \dfrac{d\nu_A}{d\mu_A}$，则显然有 $g_A I_{A^c} = 0$, a.e.. 下面证 $g_A \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，且 $T_{g_A} = T_A$. 为此，令 $E_n = [|g_A| \le n] \cap A$，则 $E_n \uparrow A$. 记 $h_n = g_A I_{E_n}$，则 $h_n \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，且对一切 $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 有

$$\begin{aligned}T_{h_n}(f) &= \mu(fh_n) = \mu(fg_AI_{E_n}) = \mu_A(g_AfI_{E_n})\\&= \nu_A(fI_{E_n}) = T_A(fI_{E_n}) = T_{A\cap E_n}(f) = T_{E_n}(f).\end{aligned}$$

这表明 $T_{h_n} = T_{E_n}$，于是有

$$\|h_n\|_q = \|T_{h_n}\| = \|T_{E_n}\| \le \|T\|.$$

由于 $h_n \to g_A$，故由 Fatou 引理知 $\|g_A\|_q \le \|T\|$，从而 $g_A \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 于是有

$$T_{g_A}(f) = \mu(g_Af) = \mu_A(g_Af) = \nu_A(f) = T_A(f).$$

这表明 $T_{g_A} = T_A$. 特别，我们有 $\|g_A\|_q = \|T_A\|$. 下面我们将证明存在 $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，使 $T_g = T$. 设 $A \subset B, A, B \in \mathcal{G}$，易见 $\|T_A\| \le \|T_B\|$，且 $g_BI_A = g_A$, a.e.，于是可取 $A_n \in \mathcal{G}, A_n \uparrow$，使得

$$\sup_n \|T_{A_n}\| = \sup\{\|T_A\| \mid A \in \mathcal{G}\}.$$

令 $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_{A_n}$ a.e.，由于 $\|g_{A_n}\|_q \le \|T\|$，故由 Fatou 引理知 $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 现证 $T_g = T$. 令 $A = \bigcup_n A_n$，则对任何 $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，我们有

$$\begin{aligned}T_g(f) &= \mu(fg) = \lim_{n\to\infty}\mu(fg_{A_n}) = \lim_{n\to\infty}T_{A_n}(f)\\&= \lim_{n\to\infty}T(fI_{A_n}) = T(fI_A).\end{aligned}$$

因此，为证 $T_g = T$，只需证明 $T(fI_{A^c}) = 0, \forall f \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 我们用反证法，假定存在某 $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，使得 $T(fI_{A^c}) \ne 0$. 令 $D_n = [|f| > \frac{1}{n}] \cap A^c$，则 $\mu(D_n) < \infty$，且由控制收敛定理知 $fI_{D_n} \xrightarrow{L^p} fI_{A^c}$，故存在某 n_0，使 $T(fI_{D_{n_0}})$ 非 0，即 $T_{D_{n_0}}(f) \ne 0$. 于是 $\|T_{D_{n_0}}\| > 0$. 令 $C_n = A_n \cup D_{n_0}$，则

$$\begin{aligned}\|T_{C_n}\|^q &= \|g_{C_n}\|_q^q = \|g_{A_n} + g_{D_{n_0}}\|_q^q\\&= \|g_{A_n}\|_q^q + \|g_{D_{n_0}}\|_q^q = \|T_{A^n}\|^q + \|T_{D_{n_0}}\|^q\end{aligned}$$

(这里用到如下事实：$A_n \cap D_{n_0} = \emptyset \Rightarrow g_{A_n} + g_{D_{n_0}} = g_{C_n}$, a.e.). 因此有 $\sup_n \|T_{C_n}\| > \sup_n \|T_{A_n}\|$，这与 (A_n) 的选取矛盾. 证毕.

上述定理表明：如果 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，我们可以将 $L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 视为 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的对偶. 下一定理表明：如果 μ 为 σ 有限测度，则 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 可视为 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的对偶.

3.4.15 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一 σ 有限测度空间，则 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$ 与 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 保范线性同构，其同构映射为：设 $g \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，令

$$T_g(f) = \mu(fg),\ f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu),$$

则 $T_g \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*, g \longmapsto T_g$ 为一对一满射，且 $\|g\|_\infty = \|T_g\|$. 特别有 $\|fg\|_1 \le \|g\|_\infty\|f\|_1$.

证 设 $g \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，易见 $T_g \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$，且 $\|T_g\| \le \|g\|_\infty$. 要证 $\|T_g\| = \|g\|_\infty$，不妨设 $\|g\|_\infty > 0$. 则对 $\forall\varepsilon: 0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$，我们有 $\mu(|g| > \|g\|_\infty - \varepsilon) > 0$. 给定 $\varepsilon > 0$，取 $A \subset [|g| > \|g\|_\infty - \varepsilon]$，使 $0 < \mu(A) < \infty$. 令 $f = I_A\mathrm{sgn}(g)$，则 $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，且有

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \mu(|f|) = \mu(A),\\T_g(f) &= \mu(fg) = \mu(I_A|g|) \ge (\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(A).\end{aligned}$$

这表明 $\|T_g\| \ge \|g\|_\infty - \varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故有 $\|T_g\| \ge \|g\|_\infty$，最终有 $\|T_g\| = \|g\|_\infty$.

现设 $T\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$. 往证存在 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 使 $T_g=T$. 令 $\mathcal{G}=\{A\in\mathcal{F}\,|\,\mu(A)<\infty\}$, 由于假定 μ 是 σ 有限的，故存在 $A_n\in\mathcal{G}$, 使 $A_n\uparrow\Omega$. 令

$$\nu_n(B)=T(I_{A_n\cap B}),\ \mu_n=\mu(A_n\cap B),\ B\in\mathcal{F},$$

并令 $g_n=\dfrac{d\nu_n}{d\mu_n}$, 则显然有 $g_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且对 $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 有

$$T_{A_n}(f)=T(fI_{A_n})=\nu_n(f)=\mu_n(fg_n)=\mu(fg_n)=T_{g_n}(f).$$

由于 $\|g_n\|_\infty=\|T_{A_n}\|\le\|T\|, g_n\uparrow g$, a.e., 故 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且有

$$T_g(f)=\mu(fg)=\lim_{n\to\infty}\mu(fg_n)=\lim_{n\to\infty}T(fI_{A_n})=T(f),$$

即有 $T_g=T$. 证毕.

注 定理 3.4.15 中关于 μ 的 σ 有限性的假定不能去掉. 例如令 $\Omega=\mathbf{R}$, $\mathcal{F}=\{A\subset\mathbf{R}\,|\,A$ 或 A^c 为至多可数集 $\}$, μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的计数测度，则 $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 当且仅当 f 在一可数集外为零，且 $\|f\|_1=\sum_x|f(x)|<\infty$. 在 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上定义一线性泛函 F: $F(f)=\sum_{x>0}f(x)$, 则 F 连续，且 $g=I_{(0,\infty)}$ 是唯一的函数 g 使得 $F(f)=\int fgd\mu$, 但 g 不是 $\mathcal{F}$ 可测函数.

3.4.16 定义 设 $1\le p,q\le\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\{f,f_n,n\ge1\}\subset L^p$. 如果 $\forall g\in L^q$, $\mu(f_ng)\to\mu(fg)$, 则称 (f_n) 在 L^p 中**弱收敛于**f.

3.4.17 定理 设 $1<p,q<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\{f,f_n,n\ge1\}\subset L^p$. 如果 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$ 且 $\{\|f_n\|_p\}$ 有界，则 (f_n) 在 L^p 中弱收敛于 f.

证 只需证明 a.e. 收敛情形. 设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 且 $\sup_n\|f_n\|_p=C$. 由 Fatou 引理, $\|f\|_p\le C$. 设 $g\in L^q$. 令 $A_n=[1/n\le|g|^q\le n]$. 给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\mu(A)<\delta$ 时有 $\|gI_A\|_q<\varepsilon$. 由

Egorov 定理 (定理 2.3.5(2)), 对每个 n 存在 $B_n\in\mathcal{F},B_n\subset A_n$, 使得 $\mu(A_n\setminus B_n)<\delta$, 且 (f_k) 在 B_n 上一致收敛于 f. 另一方面，存在 n_0 使得对一切 $n\ge n_0$ 有 $\|gI_{A_n^c}\|_q<\varepsilon$. 于是当 $n\ge n_0$ 有

$$\begin{aligned}|\mu((f_k-f)g)|&\le|\mu((f_k-f)gI_{A_n})|+|\mu((f_k-f)gI_{A_n^c})|\\&\le\mu(|f_k-f||g|I_{B_n})+\mu(|f_k-f||g|I_{A_n\setminus B_n})\\&\quad+\|f_k-f\|_p\|gI_{A_n^c}\|_q\\&\le\mu(|f_k-f||g|I_{B_n})+\|f_k-f\|_p(\|gI_{A_n\setminus B_n}\|_q+\|gI_{A_n^c}\|_q)\\&<\mu(|f_k-f||g|I_{B_n})+4C\varepsilon.\end{aligned}$$

由此推知 $\mu(f_kg)\to\mu(fg)$. 从而 (f_n) 在 L^p 中弱收敛于 f.

注 该定理对 $p=1$ 不成立. 例如设 $\Omega=[0,1],\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$, μ 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 令 $f_n=nI_{[0,1/n]}$, 则 $\|f_n\|_1=1,f_n\to0$, a.e., 但 (f_n) 不弱收敛到 0.

3.4.18 定理 设 $\Omega=\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\},\mathcal{F}$ 为 Ω 的子集全体，μ 为 $\mathbf{N}$ 上计数测度，则在 L^1 中强收敛与弱收敛等价.

证 设 (f_n) 在 L^1 中弱收敛于 f. 令

$$\mu_n(A)=\sum_{i\in A}f_n(i),\quad \mu(A)=\sum_{i\in A}f(i),$$

则 $\mu_n(A)\to\mu(A),\forall A\in\mathcal{F}$. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理 (定理 3.3.15) 知, $\sup\limits_n\sum_i|f_n(i)|<\infty$, 且对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F},\ \sum_{i\in A}\frac{1}{2^i}\le\eta\Rightarrow\sup_n\sum_{i\in A}|f_n(i)|\le\varepsilon.$$

取 m 充分大，使得

$$\sum_{i=m+1}^\infty\frac{1}{2^i}<\eta,\ \sum_{i=m+1}^\infty|f(i)|<\varepsilon,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f_n(i)-f(i)|\leq\sum_{i=1}^{m}|f_n(i)-f(i)|+\sum_{i=m+1}^{\infty}(|f_n(i)|+|f(i)|)$$
$$\leq\sum_{i=1}^{m}|f_n(i)-f(i)|+2\varepsilon.$$

由于 f_n 逐点收敛于 f, 故由上式推知 (f_n) 在 L^1 中强收敛于 f.

注 在定理的框架下, 对 $p>1$ 情形, L^p 中的强收敛与弱收敛不等价. 事实上, 令 $f_n(i)=0, i\neq n$; $f_n(n)=1$, 则 $\|f_n\|_p=1$, 但 (f_n) 弱收敛于 0.

习 题

3.4.1 证明简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 中稠密. (提示: 对任给 $\varepsilon>0$, 将 $[-\|f\|_\infty,\|f\|_\infty]$ 分成有限多个其长度小于 ε 的区间: $[a_0,a_1],\cdots,(a_{n-1},a_n]$. 令 $f_\varepsilon=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}$, 其中 $A_1=f^{-1}([a_0,a_1])$, $A_k=f^{-1}((a_{k-1},a_k]), k\geq 2$.)

3.4.2 设 $[a,b]$ 为一闭区间, μ 为 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 测度. 则对任何 $p:1\leq p<\infty$, $[a,b]$ 上的阶梯函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 由此进一步证明 $[a,b]$ 上的连续函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 此外证明 $L^\infty([a,b],\mu)$ 不是可分的 Banach 空间.

3.4.3 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $1\leq p_1<p_2<\infty$, 则 $\|f\|_{p_1}\leq\|f\|_{p_2}$. 此外, 有 $\|f\|_p\to\|f\|_\infty (p\to\infty)$.(提示: 利用 Hölder 不等式及 Jensen 不等式.)

3.4.4 (Hölder 不等式的推广) (1) 设 $1<p,q,r<\infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$, 则有 $\|fg\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$.

(2) 设 $1<p_1,p_2,\cdots,p_m<\infty, m\geq 2$, 且 $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_m}=1$, 则有

$$\|f_1\cdots f_m\|_1\leq\|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_m\|_{p_m}.$$

3.4.5 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $f\in L^1\cap L^\infty$. 试证: $\forall p\geq 1$, $f\in L^p$, 且 $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

3.4.6 设 λ 为 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $1\leq p<\infty$, $f\in L^p(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}),\lambda)$. 对每个 $x\in\mathbf{R}$, 令 $f_x(t)=f(t-x)$. 试证: $\forall x_0\in\mathbf{R}$, 有 $\lim_{x\to x_0}\|f_x-f_{x_0}\|_p=0$.

3.4.7 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, g 为一实值 μ 可积函数, 在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上定义 T_g 如下:

$$T_g(f)=\int_\Omega fgd\mu,\ f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu).$$

试证 $\|g\|_1=\sup\{|T_g(f)|\mid\|f\|_\infty\leq 1\}$.

3.5 空间 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 和 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m)$ 的对偶

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, 我们用 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有界可测函数全体. 对任一 $f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$, 令

$$\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|,$$

则 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 按此范数为一 Banach 空间.

设 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限可加集函数. 令

$$\|\mu\|_{\mathrm{var}}=\sup\left\{\sum_{i=1}^n|\mu(A_i)|\,\Big|\,A_i\in\mathcal{F},i=1,\cdots,n\right\},\tag{3.5.1}$$

称 $\|\mu\|_{\mathrm{var}}$ 为 μ 的**全变差**. 我们用 $ba(\Omega,\mathcal{F})$ 表示全变差有穷的有限可加集函数全体. 此外, 设 $\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F}), f=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}$ 为一简单可测函数, 其中 $a_i\in\mathbf{R}, A_i\in\mathcal{F}$. 令

$$\int_\Omega fd\mu=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i),\tag{3.5.2}$$

易证 $\int_\Omega fd\mu$ 不依赖于 f 的具体表达, 且有

$$\left|\int_\Omega fd\mu\right|\leq\|f\|\|\mu\|_{\mathrm{var}}.\tag{3.5.3}$$

由于简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 中按范数稠密，不等式 (3.5.3) 式允许我们将上述定义推广成为 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一连续线性泛函，且 (3.5.3) 式成立．我们称 $\int_\Omega f d\mu$ 为 f **关于 μ 的积分**，通常，我们用 $\mu(f)$ 简记 $\int_\Omega f d\mu$.

下一定理表明 $ba(\Omega,\mathcal{F})$ 可以视为 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 的对偶空间.

3.5.1 定理　设 $\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F})$，令

$$T_\mu(f)=\mu(f),\ f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}).$$

则 T_μ 为从 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})^*$ 到 $ba(\Omega,\mathcal{F})$ 上的保范线性同构映射.

证　由 (3.5.3) 式知，$T_\mu\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F})^*$，且有 $\|T_\mu\|\le\|\mu\|_{\text{var}}$. 反之，设 $l\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F})^*$. 令

$$\mu(A)=l(I_A),\quad A\in\mathcal{F},$$

则 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限可加集函数，显然有 $\|\mu\|_{\text{var}}\le\|l\|$，于是 $\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F})$，且有 $T_\mu=l$. 因此最终有 $\|T_\mu\|=\|\mu\|_{\text{var}}$. 定理证毕.

设 $(\Omega,\mathcal{F},m)$ 为一测度空间，$\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F})$. 如果 $m(A)=0\Rightarrow\mu(A)=0, A\in\mathcal{F}$，称 μ 关于 m 绝对连续，记为 $\mu\ll m$. 令

$$ba(\Omega,\mathcal{F},m)=\{\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F})\,|\,\mu\ll m\}.$$

设 $\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F},m), f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m)$，显然我们可以任选 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 中一元素 $\tilde f$ 作为 f 的代表，定义 $\mu(\tilde f)$ 为 **f关于 μ 的积分**，仍记为 $\int_\Omega f d\mu$，简记为 $\mu(f)$. 这时有

$$\left|\int_\Omega f d\mu\right|\le\|f\|_\infty\|\mu\|_{\text{var}}. \tag{3.5.4}$$

下一定理表明 $ba(\Omega,\mathcal{F},m)$ 可以视为 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m)$ 的对偶空间，其证明与定理 3.5.1 类似，留给读者完成.

3.5.2 定理　设 $\mu\in ba(\Omega,\mathcal{F},m)$，令

$$T_\mu(f)=\mu(f),\ f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m).$$

则 T_μ 为从 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},m)^*$ 到 $ba(\Omega,\mathcal{F},m)$ 上的保范线性同构映射.

3.6 Daniell 积分

积分的一个基本性质是线性性，因此积分可视为 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的线性泛函．这一思想可以用来给出定义积分的另一途径 —— Daniell 积分.

3.6.1 定义　设 Ω 为一抽象集合，$\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族实值函数组成的线性空间．如果

$$f\in\mathcal{H}\Rightarrow|f|\in\mathcal{H}, f\wedge 1\in\mathcal{H}, \tag{3.6.1}$$

则称 $\mathcal{H}$ 为**一向量格**.

3.6.2 注　在上述定义中，条件 $f\in\mathcal{H}\Rightarrow|f|\in\mathcal{H}$ 等价于下列条件之一：

$$f,g\in\mathcal{H}\Rightarrow f\wedge g\in\mathcal{H}; \tag{3.6.2}$$

$$f,g\in\mathcal{H}\Rightarrow f\vee g\in\mathcal{H}. \tag{3.6.3}$$

事实上，$|f|=f\vee 0+(-f)\vee 0$，故 (3.6.3) 式 $\Rightarrow$(3.6.1) 式．又由于

$$f\wedge g=\frac{g+f-|g-f|}{2},$$

故 (3.6.1) 式 $\Rightarrow$(3.6.2) 式．由于 $f\vee g=f+g-f\wedge g$，故 (3.6.2) 式 $\Rightarrow$(3.6.3) 式.

3.6.3 定义　设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格，I 为 $\mathcal{H}$ 上的**正线性泛函**：即 $f,g\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbf{R}\Rightarrow I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g); f\in\mathcal{H}, f\ge$

$0 \Rightarrow I(f) \geq 0$. 如果 I 满足如下条件:

$$f_n \in \mathcal{H}, f_n \downarrow 0 \Rightarrow I(f_n) \to 0, \tag{3.6.4}$$

或者等价地

$$f_n \in \mathcal{H}, f_n \uparrow f \in \mathcal{H} \Rightarrow I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \tag{3.6.5}$$

则称 I 为 $\mathcal{H}$ 上的 **Daniell积分**.

3.6.4 例 设 $\mathcal{A}$ 为 Ω 上的一代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一测度, 令

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \,|\, a_i \in \mathbf{R}, A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty, 1 \leq i \leq n, n \geq 1 \right\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一向量格. 设 $f = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \in \mathcal{H}$, 令 $I(f) = \sum_i a_i \mu(A_i)$, 则 I 为 $\mathcal{H}$ 上的 Daniell 积分.

3.6.5 例 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $\mathcal{H} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu), I(f) = \mu(f), f \in \mathcal{H}$. 则 $\mathcal{H}$ 为向量格, I 为 $\mathcal{H}$ 上的 Daniell 积分.

下面我们将证明: Daniell 积分可以延拓成为通常的可测函数关于测度的积分. 为此我们先引进若干记号.

3.6.6 记号 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格, 令

$$\mathcal{H}_+ = \{f \in \mathcal{H} \,|\, f \geq 0\},$$
$$\mathcal{H}_+^* = \{f \,|\, \exists f_n \in \mathcal{H}_+, \text{使} f_n \uparrow f\},$$
$$\mathcal{C} = \{C \subset \Omega \,|\, I_C \in \mathcal{H}_+^*\}.$$

3.6.7 引理 我们有:

(1) $f, g \in \mathcal{H}_+^*, a, b \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{H}_+^*, f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{H}_+^*$;

(2) $f_n \in \mathcal{H}_+^*, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}_+^*$;

(3) $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭, 对有限交运算封闭;

(4) $f \in \mathcal{H}_+ \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}, [f > \alpha] \in \mathcal{C}$;

(5) $f \in \mathcal{H}_+^* \Rightarrow \forall \alpha \geq 0, [f > \alpha] \in \mathcal{C}$;

(6) $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(f \,|\, f \in \mathcal{H})$.

证 (1) 及 (2) 显然. (3) 由 (1) 及 (2) 推得. 往证 (4). 设 $f \in \mathcal{H}_+, \alpha \in \mathbf{R}$, 则 $(f - \alpha)^+ = f - f \wedge \alpha \in \mathcal{H}_+$. 但

$$[n(f - \alpha)^+] \wedge 1 \uparrow I_{[f > \alpha]}, \ n \to \infty,$$

故 $I_{[f>\alpha]} \in \mathcal{H}_+^*$, 即 $[f > \alpha] \in \mathcal{C}$.

现证 (5). 设 $f \in \mathcal{H}_+^*$, 令 $f_n \in \mathcal{H}_+, f_n \uparrow f$, 则由 (4) 知

$$[f > \alpha] = \bigcup_n [f_n > \alpha] \in \mathcal{C}.$$

最后, (6) 容易由 (4) 看出. 证毕.

3.6.8 定理 (Daniell-Stone 定理) 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格, I 为 $\mathcal{H}$ 上的一 Daniell 积分, 则存在 $\mathcal{F} \doteq \sigma(f \,|\, f \in \mathcal{H})$ 上的一测度 μ 使得 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 且对一切 $f \in \mathcal{H}$ 有 $I(f) = \mu(f)$. 若进一步 $1 \in \mathcal{H}_+^*$, 这样的测度 μ 是唯一确定的, 且为 σ 有限的.

证 我们将证明分为三个步骤.

1° 对 $f \in \mathcal{H}_+^*$, 令

$$I^*(f) = \sup\{I(g) \,|\, g \leq f, g \in \mathcal{H}_+\},$$

则易知有如下事实:

$$f_n \in \mathcal{H}_+, f_n \uparrow f \Rightarrow I^*(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n);$$
$$f, g \in \mathcal{H}_+^*, a, b \geq 0 \Rightarrow I^*(af + bg) = aI^*(f) + bI^*(g);$$
$$f_n \in \mathcal{H}_+^*, f_n \uparrow f \Rightarrow I^*(f) = \lim_{n\to\infty} I^*(f_n);$$
$$f, g \in \mathcal{H}_+^*, f \leq g \Rightarrow I^*(f) \leq I^*(g).$$

此外，对 $f\in\mathcal{H}_+$, 有 $I^*(f)=I(f)$. 现令

$$\mu^*(C)=I^*(I_C), C\in\mathcal{C},$$
$$\mu^*(A)=\inf\{\mu^*(C)\,|C\supset A, C\in\mathcal{C}\}, A\subset\Omega \tag{3.6.6}$$

(约定 $\inf\emptyset=+\infty$). 往证 μ^* 为 Ω 上的外测度.

首先，$\mu^*(\emptyset)=0$. 此外，设 $C_n\in\mathcal{C}, n\geq 1$, 则 $\bigcup_n C_n\in\mathcal{C}$, 故有

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_n C_n)&=I^*(I_{\bigcup_n C_n})\leq I^*(\sum_{n=1}^{\infty}I_{C_n})\\&=\sum_{n=1}^{\infty}I^*(I_{C_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(C_n).\end{aligned}$$

现设 $A_n\subset\Omega, n\geq 1, A=\bigcup_n A_n$. 对给定 $\varepsilon>0$, 存在 $C_n\in\mathcal{C}, C_n\supset A_n$, 使 $\mu^*(C_n)\leq\mu^*(A_n)+\dfrac{\varepsilon}{2^n}$. 令 $C=\bigcup_n C_n$, 则 $C\in\mathcal{C}, C\supset A$, 且有

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(C)\leq\sum_n\mu^*(C_n)\leq\sum_n\mu^*(A_n)+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有 $\mu^*(A)\leq\sum_n\mu^*(A_n)$, 这表明 μ^* 为外测度.

2° 令 $\mathcal{M}^*$ 为 μ^* 可测集全体，往证 $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}^*$(从而有 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{M}^*$). 由于 $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭，由 (3.6.6) 式易知，若将 μ^* 在 $\mathcal{C}$ 上的限制记为 μ', 则 μ^* 为 μ' 引出的外测度. 于是设 $A\in\mathcal{C}$, 由引理 1.4.5 知，为证 $A\in\mathcal{M}^*$, 只需证 $\forall C\in\mathcal{C}, \mu^*(C)<\infty$, 有

$$\mu^*(C)\geq\mu^*(A\cap C)+\mu^*(A^c\cap C). \tag{3.6.7}$$

令 $g_n\in\mathcal{H}_+$, 使 $g_n\uparrow I_{A\cap C}$, 令 $h_n\in\mathcal{H}_+$, 使 $h_n\uparrow I_C$, 则对固定 n, 当 $m\to\infty$ 时有

$$(h_m-g_n)^+\uparrow I_C-g_n\in\mathcal{H}_+^*.$$

令 $f_n=I_C-g_n$, 则 $f_n\downarrow I_C-I_{A\cap C}=I_{A^c\cap C}$. 设 $0<\varepsilon<1$, 令 $G_n=[f_n>1-\varepsilon]$, 则由引理 3.6.7(5) 知 $G_n\in\mathcal{C}$, 且有 $G_n\supset A^c\cap C, f_n\geq(1-\varepsilon)I_{G_n}$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(A^c\cap C)\leq\mu^*(G_n)&\leq\frac{1}{1-\varepsilon}I^*(f_n)\\&=\frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(C)-I(g_n)).\end{aligned}$$

注意到 $I(g_n)\uparrow I^*(I_{A\cap C})=\mu^*(A\cap C)$, 我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(A^c\cap C)&\leq\lim_{n\to\infty}\mu^*(G_n)\\&\leq\frac{1}{1-\varepsilon}[\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C)].\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$, 得

$$\mu^*(A^c\cap C)\leq\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C),$$

故 (3.6.7) 式得证.

3° 令 μ 为 μ^* 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的限制，则 μ 为测度，往证定理的结论成立. 设 $f\in\mathcal{H}_+$, 令

$$f_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}(I_{[f>\frac{k}{2^n}]}-I_{[f>\frac{k+1}{2^n}]})=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}I_{[f>\frac{k}{2^n}]},$$

则 $f_n\in\mathcal{H}_+^*$, 且 $f_n\uparrow f$. 我们有

$$\begin{aligned}I(f)&=\lim_{n\to\infty}I^*(f_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu([f>\frac{k}{2^n}])\\&=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f).\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{H}_+\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且对 $f\in\mathcal{H}_+$, 有 $I(f)=\mu(f)$. 再由线性性推知对一般 $f\in\mathcal{H}$, 有 $I(f)=\mu(f)$.

最后，若 $1\in\mathcal{H}_+^*$, 则存在 $f_n\in\mathcal{H}_+$ 使 $f_n\uparrow 1$, 于是 $[f_n>\frac{1}{2}]\uparrow\Omega$, 但 $\mu([f_n>\frac{1}{2}])\leq\frac{1}{2}\mu(f_n)=\frac{1}{2}I(f_n)<\infty$, 故 μ 为 σ 有限测度. 此

外，设 ν 为一测度，使得

$$\mu(f)=I(f)=\nu(f), f\in\mathcal{H}_+,$$

则由积分单调收敛定理推知： $\mu(f)=\nu(f),\forall f\in\mathcal{H}_+^*$，特别， ν 与 μ 在 $\mathcal{C}$ 上一致. 由于 $\mathcal{C}$ 是 π 类，且存在 $C_n\in\mathcal{C}$，使 $C_n\uparrow\Omega,\mu(C_n)<\infty, n\geq 1$，故 μ 与 ν 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致 (见引理 1.4.6)，μ 的唯一性得证. 证毕.

3.6.9 注 在定理中，如果不假定 $1\in\mathcal{H}_+^*$，但要求测度 μ 满足：

$$\mu(A)=\inf\{\mu(C)\,|C\supset A, C\in\mathcal{C}\}, A\in\mathcal{F} \tag{3.6.8}$$

则 μ 也是唯一确定的. 事实上，设另有测度 ν 使对一切 $f\in\mathcal{H}$ 有 $I(f)=\nu(f)$，且满足 (3.6.8) 式 (以 ν 代替 μ)，则 $\forall C\in\mathcal{C}$，令 $f_n\in\mathcal{H}^+, f_n\uparrow I_C$，我们有

$$\nu(C)=\lim_{n\to\infty}\nu(f_n)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(C).$$

于是由 (3.6.8) 式知， ν 与 μ 在 $\mathcal{F}$ 上一致.

习 题

3.6.1 设 M 为一个 n 维 Riemann 流形， $\mathcal{U}$ 是 M 的一个坐标邻域， $\{x^i\}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的坐标函数， $\{g_{ij}\}$ 为在 $\mathcal{U}$ 中的 Riemann 度量系数，$G=\det[g_{ij}]$(det 表示矩阵的行列式). 令 $C_c(M)$ 表示 M 上具紧支撑的连续泛函全体. 设 $f\in C_c(M)$，其支撑含于 $\mathcal{U}$，定义

$$\int_{\mathcal{U}}f=\int_{\mathcal{U}}f\sqrt{G}dx^1\cdots dx^n.$$

对一般的 $f\in C_c(M)$，可利用上式及 M 的一个单位分解来定义 $\int_M f$. 试证 $f\mapsto\int_M f$ 为 $C_c(M)$ 上的 Daniell 积分.

3.6.2 设 ν 为 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上一非负有限可加集函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\nu([-n,n])=1$，则存在 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上唯一的概率测度 μ，使得对 $\mathbf{R}$ 上任何有界连续函数 f 有 $\nu(f)=\mu(f)$.

3.7 Bochner 积分和 Pettis 积分

本节介绍两种常用的 Banach 空间值函数的积分 ——Bochner 积分和 Pettis 积分. 以下恒假定 E 为数域 $I\!\!K$(实域 $\mathbf{R}$ 或复域 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间， $\|\cdot\|$ 为 E 上的范数， $\mathcal{B}(E)$ 为 E 上的 Borel σ 代数， E^* 为 E 的对偶空间. 此外，我们用 s-lim 表示 E 中的强收敛.

3.7.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， $X:\Omega\longrightarrow E$ 为 Ω 上的 E 值函数. 如果 X 关于 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{B}(E)$ 可测 (即 $X^{-1}(\mathcal{B}(E))\subset\mathcal{F}$)，则称 X 为**Borel 可测**; 如果 $\forall f\in E^*, f(X)$ 为 Ω 上 $\mathcal{F}$ 可测 ($I\!\!K$ 值) 函数，则称 X 为**弱可测**; 如果 X 为弱可测且有可分的值域 (即 $X(\Omega)$ 在 E 中有可数稠子集)，则称 X 为**强可测**; 如果 X 只取有限多个值 (即 $X(\Omega)$ 为 E 的有限子集)，则称 X 为**简单函数**.

令 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度， $\overline{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的完备化. 如果在上述定义中将 $\mathcal{F}$ 换成 $\overline{\mathcal{F}}$，则相应的 Borel 可测 (弱可测) 称为 **μ 可测 (弱 μ 可测)**. 这时，称 $X:\Omega\longrightarrow E$ 为**强 μ 可测**，是指 X 为弱 μ 可测，且有 μ 可分的值域 (即存在 μ 零测集 N，使得 $X(\Omega\setminus N)$ 在 E 中有可数稠子集).

显然： Borel 可测蕴含弱可测；对简单函数而言， Borel 可测与弱可测等价；若 E 为可分 Banach 空间，则弱可测与强可测等价. 若 X 为 Borel 可测，则作为 X 与 E 上连续函数 $x\mapsto\|x\|$ 的复合， $\|X\|$ 为 $\mathcal{F}$ 可测实值函数.

下面我们将证明强可测函数必为 Borel 可测，并且研究强可测函数的结构. 为此，先证明一个引理.

3.7.2 引理 设 E 为可分 Banach 空间, $S_1(E^*)$ 为 E^* 的单位球. 则存在 $S_1(E^*)$ 中一序列 $\{f_n\}$, 满足如下条件: $\forall f \in S_1(E^*)$, 可选取 $\{f_n\}$ 的一子列 $\{f_{n'}\}$, 使得 $\forall x \in E$ 有 $\lim\limits_{n'} f_{n'}(x) = f(x)$.

证 令 $\{x_n, n \geq 1\}$ 为 E 的可数稠子集. $\forall n \geq 1$, 考虑 $S_1(E^*)$ 到 $I\!K^n$ 中的连续映射: $f \mapsto \varphi_n(f) = \{f(x_1), \cdots, f(x_n)\}$. 由于 $I\!K^n$ 可分, 存在 $S_1(E^*)$ 中序列 $\{f_{n,k}, k \geq 1\}$, 使得 $\{\varphi_n(f_{n,k}), k \geq 1\}$ 在 $\varphi_n(S_1(E^*))$ 中稠. 现设 $f \in S_1(E^*)$. 对每个 $n \geq 1$, 选取 m_n, 使得

$$|f_{n,m_n}(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

则有 $\lim\limits_n f_{n,m_n}(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \cdots$. 由于 $\|f_{n,m_n}\| \leq 1, \forall n \geq 1$, 故容易推知: $\forall x \in E$, 有 $\lim\limits_n f_{n,m_n}(x) = f(x)$. 证毕.

3.7.3 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, $X : \Omega \longrightarrow E$ 强可测, 则存在 Borel 可测简单函数序列 $\{X_n\}$, 使得

$$\|X_n(\omega)\| \leq 2\|X(\omega)\|, \ n \geq 1, \ \text{s-}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \ \omega \in \Omega. \tag{3.7.1}$$

特别, X 为 Borel 可测. 此外, 强可测函数全体构成一向量空间, 且对序列的逐点强极限封闭.

证 首先证明 $\omega \mapsto \|X(\omega)\|$ 为 $\mathcal{F}$ 可测函数. 令 E_0 为包含 $X(\Omega)$ 的 E 的最小闭子空间, 则 E_0 为可分 Banach 空间. 由于 E_0^* 的元素是 E^* 的元素在 E_0 上的限制 (由 Hahn-Banach 定理知), 易知 $X : \Omega \longrightarrow E_0$ 亦为弱可测的. 设 $a \in \mathbf{R}_+$. 令

$$A = \{\omega \mid \|X(\omega)\| \leq a\}, \ A_f = \{\omega \,|\, |f(X(\omega))| \leq a\}, \ f \in S_1(E_0^*),$$

则有 $A \subset \bigcap_{f \in S_1(E_0^*)} A_f$. 另一方面, $\forall \omega \in \Omega$, 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $f \in E_0^*, \|f\| = 1$, 使得 $f(X(\omega)) = \|X(\omega)\|$. 于是有 $A \supset \bigcap_{f \in S_1(E_0^*)} A_f$, 从而最终有 $A = \bigcap_{f \in S_1(E_0^*)} A_f$. 设序列 $\{f_n\} \subset$

$S_1(E_0^*)$ 满足引理 3.7.2 中的条件, 则易知 $A = \bigcap_n A_{f_n} \in \mathcal{F}$. 这表示 $\|X\|$ 为 $\mathcal{F}$ 可测的.

由于 $X(\Omega)$ 可分, 对任意 $n \geq 1, X(\Omega)$ 可被可数多个半径不超过 $1/n$ 的开球 $S_{j,n}(j = 1, 2, \cdots)$ 覆盖. 设 $x_{j,n}$ 为 $S_{j,n}$ 的球心, $r_{j,n}$ 为 $S_{j,n}$ 的半径, 令 $B_{j,n} = \{\omega \,|X(\omega) \in S_{j,n}\}$, 则 $\cup_{j=1}^\infty B_{j,n} = \Omega$, 且由前面所证, $B_{j,n} = \{\omega \,|\|X(\omega) - x_{j,n}\| < r_{j,n}\}$ 为 $\mathcal{F}$ 可测. 令 $B'_{1,n} = B_{1,n}, B'_{i,n} = B_{i,n} - \cup_{j=1}^{i-1} B_{j,n}, i \geq 2$, 定义

$$Y_n(\omega) = x_{i,n}, \ \text{如果 } \omega \in B'_{i,n},$$

则 $\{Y_n\}$ 为 Borel 可测简单函数序列, 且 $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} Y_n(\omega) = X(\omega)$. 当 $\|Y_n(\omega)\| \leq 2\|X(\omega)\|$ 时, 令 $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$, 当 $\|Y_n(\omega)\| > 2\|X(\omega)\|$ 时, 令 $X_n(\omega) = 0$, 其中 0 是 E 中的 0 元素, 则 Borel 可测简单函数序列 $\{X_n\}$ 满足 (3.7.1) 式. 定理中的另一结论显然成立. 证毕.

有了上述准备后, 现在可定义强 μ 可测函数关于测度的积分.

3.7.4 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间 $X : \Omega \longrightarrow E$ 为一强 μ 可测函数. 如果 $\|X\|$ 为 μ 可积函数, 则存在 E 中唯一的元素, 记为 $\int_\Omega X d\mu$, 使得

$$f\Big(\int_\Omega X d\mu\Big) = \int_\Omega f(X) d\mu, \ \forall f \in E^*. \tag{3.7.2}$$

这时有

$$\|\int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X\| d\mu. \tag{3.7.3}$$

我们称 X 关于 μ 为 **Bochner 可积**, 并称 $\int_\Omega X d\mu$ 为 X 关于 μ 的 **Bochner 积分**, 简记为 $\mu(X)$.

证 如果在完备测度空间 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mu)$ 中考虑, 则存在一强可测函数 $\widetilde{X}$, 它与 X μ-a.e. 相等. 因此, 为证明定理, 不妨假定 X 本身是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上一强可测函数. 首先设 $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$ 为简单可

测函数，其中 $x_i\neq 0, A_i\in\mathcal{F}_i, 1\leq i\leq n, A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$，则 $\|X\|=\sum_{i=1}^n\|x_i\|I_{A_i}$. 如果 $\|X\|$ 为 μ 可积，则对每个 $1\leq i\leq n, \mu(A_i)<\infty$. 这时令

$$\int_\Omega Xd\mu=\sum_{i=1}^n\mu(A_i)x_i, \tag{3.7.4}$$

易知它不依赖 X 的具体表示. 对一般的强可测函数 X, 令 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为满足 (3.7.1) 式的简单可测函数序列. 假定 $\|X\|$ 为 μ 可积，则每个 $\|X_n\|$ 为 μ 可积，且有

$$\|\int_\Omega X_nd\mu-\int_\Omega X_md\mu\|\leq\int_\Omega\|X_n-X_m\|d\mu. \tag{3.7.5}$$

由于 $\|X_n-X_m\|\leq 4\|X\|$, 故由上式及控制收敛定理知，$\{\int_\Omega X_nd\mu\}$ 为 E 中基本列, 从而强收敛于一元素, 记为 $\int_\Omega Xd\mu$. 显然，$\int_\Omega Xd\mu$ 不依赖于满足 (3.7.1) 式的序列 $\{X_n\}$ 的选取. 现设 $f\in E^*$, 显然有

$$f\Big(\int_\Omega X_nd\mu\Big)=\int_\Omega f(X_n)d\mu,$$

两边令 $n\to\infty$ 即得 (3.7.2) 式. 由于 $f(x)=0, \forall f\in E^*\Rightarrow x=0$, 故满足 (3.7.2) 式的 $\int_\Omega Xd\mu$ 是唯一的.

最后，对简单可测函数 X_n, 显然有

$$\|\int_\Omega X_nd\mu\|\leq\int_\Omega\|X_n\|d\mu,$$

故两边令 $n\to\infty$ 即得 (3.7.3) 式.

3.7.5 注 (1) 设 F 为另一 Banach 空间，T 为 E 到 F 中的有界线性算子. 由上述证明中关于 $\int_\Omega Xd\mu$ 的定义容易推知

$$T\Big(\int_\Omega Xd\mu\Big)=\int_\Omega TXd\mu, \tag{3.7.6}$$

其中右端为 TX 关于 μ 的 Bochner 积分.

(2) 由 (3.7.2) 式推知，Bochner 积分具有通常积分的线性性.

(3) 设 X 关于 μ 为 Bochner 可积，则 $\forall A\in\mathcal{F}, XI_A$ 仍为 Bochner 可积，其 Bochner 积分记为 $\int_A Xd\mu$. 令

$$\nu(A)=\int_A Xd\mu,\ A\in\mathcal{F}, \tag{3.7.7}$$

则 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的下述意义下的 **E 值测度**: (i)$\nu(\emptyset)=0$; (ii) 对 $\mathcal{A}$ 中两两不相交集合序列 $\{A_i\}$, 有 $\nu(\sum_{i=1}^\infty A_i)=\sum_{i=1}^\infty\nu(A_i)$. 我们称 ν 为 X 关于 μ 的**不定积分**. 显然 ν 关于 μ 在下述意义下是**绝对连续**的，即 $\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$. 此外，令

$$\|\nu\|_{\text{var}}=\sup\Big\{\sum_{i=1}^\infty\|\nu(A_i)\|\,|\{A_i\}\subset\mathcal{F}\text{ 为 }\Omega\text{ 的可数划分}\Big\}, \tag{3.7.8}$$

称 $\|\nu\|_{\text{var}}$ 为 ν 的**全变差**, 则有

$$\|\nu\|_{\text{var}}=\int_\Omega\|X\|d\mu. \tag{3.7.9}$$

(4) 对 Bochner 积分，我们有相应的控制收敛定理 (见习题 3.7.2), 但没有相应的 Radon-Nikodym 定理 (见习题 3.7.3).

最后，作为本节的结束，我们定义弱 μ 可测函数的 Pettis 积分.

3.7.6 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，$X:\Omega\longrightarrow E$ 为一弱 μ 可测函数，$A\in\mathcal{F}$. 如果 $\forall f\in E^*, f(X)$ 为 μ 可积函数，且存在 $x_A\in E$, 使得

$$f(x_A)=\int_A f(X)d\mu,\ \forall f\in E^*,$$

则称 X 为关于 μ**在 A 上 Pettis 可积**, 并称 x_A 为 X 关于 μ**在 A 上的 Pettis 积分**, 记为 $(\text{P})\int_A Xd\mu$. 设 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，在每个 $\mathcal{F}_0$ 可测集上可积的弱 μ 可测函数称为**在$\mathcal{F}_0$上 Pettis 可积**.

特别，在 $\mathcal{F}$ 上 Pettis 可积的弱 μ 可测函数简称为 **Pettis 可积**. 这时称 $x \mapsto x_A$ 为 X 的 Pettis 不定积分.

显然，Bochner 可积的函数必为 Pettis 可积，且 $\forall A \in \mathcal{F}$, 在 A 上的两种积分一致.

习 题

3.7.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间，$X: \Omega \longrightarrow E$ 为一强 μ 可测函数. 则为要 X 为 Bochner 可积, 必须且只需存在一列简单可测函数 $\{X_n, n \geq 1\}$, 使得对 a.e.$\omega \in \Omega$, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

3.7.2 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间，$\{X_n\}$ 为一列 Bochner 可积函数, X 为一强 μ 可测函数. 如果对 a.e.ω, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且存在一非负 μ 可积函数 g, 使得 $\|X_n\| \leq g$, a.e.$,\forall n \geq 1$, 则 X 为 Bochner 可积，且有 s-$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu$. (提示：$\|X_n - X\| \leq 2g$, a.e.)

3.7.3 设 μ 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度，$E = L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$. 对 $A \in \mathcal{B}([0,1])$, 令 $\nu(A) = I_A$. 试证:

(1) ν 为关于 μ 绝对连续的 E 值测度;

(2) 不存在 Bochner 可积函数 $X: [0,1] \longrightarrow E$, 使得

$$\nu(A) = \int_A X d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{B}([0,1]).$$

3.7.4 证明注 3.7.5(3).

3.7.5 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间，E 为一自反的 Banach 空间 (即 $E^{**} = E$), $X: \Omega \longrightarrow E$ 为一弱 μ 可测函数. 如果 $\forall f \in E^*, f(X)$ 为 μ 可积，则 X 为 Pettis 可积.

3.7.6 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间，E 为一 Banach 空间，$X: \Omega \longrightarrow E$ 为一 μ Pettis 可积函数，则 X 的 Pettis 不定积分为一 E 值测度.

第 4 章　乘积可测空间上的测度与积分

4.1　乘积可测空间

4.1.1 定义　设 Ω_1, Ω_2 为两个集合，令

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\},$$

称 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 为 Ω_1 与 Ω_2 的**乘积**. 若 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 及 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 为两个可测空间，我们在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上定义如下 σ 代数:

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\},$$

称 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 为**乘积 σ 代数**,$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ 为**乘积可测空间**.

上述定义容易推广到任意有限多个可测空间的乘积情形，下面我们将进一步定义一族可测空间的乘积.

4.1.2 定义　设 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 为一族集合，$\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, Ω^I 表示 I 到 Ω 中的映射全体. 我们令

$$\prod_{i\in I} \Omega_i = \{\omega \in \Omega^I \mid \omega(i) \in \Omega_i, \forall i \in I\},$$

称 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 为 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 的**乘积**. 此外，对每个 $i \in I$, 令

$$\pi_i(\omega) = \omega(i), \quad \omega \in \prod_{i\in I} \Omega_i,$$

称 π_i 为 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 到 Ω_i 上的**投影 (映射)**. 更一般地，设 $\emptyset \neq S \subset I$, 令 π_S 为 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 到 $\prod_{i\in S} \Omega_i$ 上的**投影 (映射)**, 即令

$$\pi_S(\omega) = (\omega(i), i \in S), \omega \in \prod_{i\in I} \Omega_i,$$

这里 $(\omega(i), i\in S)$ 表示 $\prod_{i\in S}\Omega_i$ 中的一个元素，它在指标 i 处取值为 $\omega(i)$.

设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间，则在 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上定义一 σ 代数如下：

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i)).$$

称 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 为**乘积 σ 代数**, $(\prod_{i\in I}\Omega_i,\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ 为**乘积可测空间.**

显然，乘积 σ 代数是使每个投影 π_i 为可测的最小 σ 代数.

4.1.3 定理 设 $\emptyset\neq S\subset I$, 则 π_S 为 $(\prod_{i\in I}\Omega_i,\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ 到 $(\prod_{i\in S}\Omega_i,\prod_{i\in S}\mathcal{F}_i)$ 上的可测映射.

证 由于 $\prod_{i\in S}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in S}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i))$(这里 π_i^S 表示 $\prod_{i\in S}\Omega_i$ 到 Ω_i 上的投影), 故由命题 2.1.3 知，只需证

$$\pi_S^{-1}(\bigcup_{i\in S}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i))\subset\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i.$$

但这由如下等式推得

$$\pi_S^{-1}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i)=\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i).$$

4.1.4 定理 令 $\mathcal{P}_0$(相应地，$\mathcal{P}$) 表示 I 的非空有穷 (相应地，至多可数) 子集全体，则：

(1) **可测矩形**全体

$$\mathcal{I}=\left\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}A_i)\mid A_i\in\mathcal{F}_i, i\in S;\ S\in\mathcal{P}_0\right\}$$

为 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上的一半代数，且 $\sigma(\mathcal{I})=\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$;

(2) **可测柱集**全体

$$\mathcal{Z}=\left\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}\mathcal{F}_i)\mid S\in\mathcal{P}_0\right\}$$

为 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上的一代数，且 $\sigma(\mathcal{Z})=\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$;

(3) $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i=\{\pi_S^{-1}(\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i)\mid S\in\mathcal{P}\}$.

我们将这一定理的证明留给读者完成.

习 题

4.1.1 设 I 为一可数集，$(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 为一族可测空间. 若每个 $\mathcal{F}_i$ 可分，则 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 也可分.

4.1.2 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间， $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{F}_i$ 的子类， $i\in I$. 若对每个 $i\in I,\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i$, 则有 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$.

4.2 乘积测度与 Fubini 定理

设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ 有限测度空间. 本节将在乘积可测空间 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上定义一乘积测度 $\mu\times\nu$, 并讨论关于测度 $\mu\times\nu$ 的积分.

4.2.1 定义 设 X 及 Y 是两个集合， E 是 $X\times Y$ 的子集. 令

$$E_x=\{y\in Y\mid(x,y)\in E\},$$
$$E^y=\{x\in X\mid(x,y)\in E\},$$

分别称 E_x 及 E^y 为 E 在 x 及 y 处的**截口**.

设 $f(x,y)$ 为 $X\times Y$ 上的一函数，我们将使用如下记号：

$$f_x(y)=f(x,y),\ f^y(x)=f(x,y).$$

4.2.2 引理 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间.

(1) 若 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则 $\forall x\in X,y\in Y$, 有 $E_x\in\mathcal{B},E^y\in\mathcal{A}$.

(2) 若 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数，则对一切 $x\in X,y\in Y,f_x$ 为 Y 上的 $\mathcal{B}$ 可测函数， f^y 为 X 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数.

证 (1) 令 $\mathcal{C}=\{A\times B\,|\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$. 则对一切 $E\in\mathcal{C}$, 引理的结论显然成立. 令 $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\,|\,\forall x\in X,y\in Y,E_x\in\mathcal{B},E^y\in\mathcal{A}\}$, 则 $\mathcal{G}$ 为 λ 类. 由于 $\mathcal{C}$ 为 π 类, 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 故由单调类定理 (定理 1.2.2) 知, 对一切 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 引理结论成立.

(2) 容易由定理 2.2.1 推得.

4.2.3 引理 令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ 有限测度空间. 设 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathcal{A}$ 可测, 函数 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 $\mathcal{B}$ 可测.

证 首先设 ν 为有限测度, 令 $\mathcal{C}=\{A\times B\,|\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$, 令 $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\,|\,x\mapsto\nu(E_x)$为$\mathcal{A}$ 可测$\}$, 则显然有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$(因 $\nu((A\times B)_x)=I_A(x)\nu(B)$), 且 $\mathcal{G}$ 为 λ 类. 故由单调类定理知 $\mathcal{G}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{G}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. 现设 ν 为 σ 有限测度, 任取 Y 的可数划分 $\{D_n\}$, 使 $D_n\in\mathcal{B},\nu(D_n)<\infty,n\geq1$, 令 $\nu_n(B)=\nu(B\cap D_n),B\in\mathcal{B}$, 则 ν_n 为有限测度, $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$. 于是

$$\nu(E_x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(E_x),\ E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$

从而函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathcal{A}$ 可测, 同理可证函数 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 $\mathcal{B}$ 可测.

4.2.4 定理 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ 有限测度空间. 则在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上存在唯一的测度 $\mu\times\nu$, 使得

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}.\tag{4.2.1}$$

(从而 $\mu\times\nu$ 亦为 σ 有限.) 此外, 对任何 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 有

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy).\tag{4.2.2}$$

测度 $\mu\times\nu$ 称为 μ 与 ν 的**乘积**.

证 由引理 4.2.3, 我们可在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上定义如下集函数 λ_1 及 λ_2:

$$\lambda_1(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx),\qquad E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$
$$\lambda_2(E)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy),\qquad E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$

显然, λ_1 及 λ_2 均为测度, 且有

$$\lambda_1(A\times B)=\lambda_2(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}.\tag{4.2.3}$$

令 $\mathcal{C}=\{A\times B\,|\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$, 则 $\mathcal{C}$ 为半代数 (见定理 4.1.4). 依假定, μ 及 ν 为 σ 有限测度, 故满足 (4.2.1) 式的测度在 $\mathcal{C}$ 上也是 σ 有限的. 因此, 由测度扩张的唯一性 (见定理 1.4.7) 知, 满足 (4.2.1) 式的测度是唯一的. 特别, 我们有 $\lambda_1=\lambda_2$, 令 $\mu\times\nu=\lambda_1=\lambda_2$, 即有 (4.2.2) 式. 证毕.

下面我们研究关于乘积测度的积分.

4.2.5 定理 令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ 有限测度空间, f 为 $X\times Y$ 上的非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数. 则函数 $x\mapsto\int_Y f_x d\nu$ 为 $\mathcal{A}$ 可测, $y\mapsto\int_X f^y d\mu$ 为 $\mathcal{B}$ 可测, 且有

$$\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu)=\int_Y(\int_X f^y d\mu)\nu(dy)=\int_X(\int_Y f_x d\nu)\mu(dx).\tag{4.2.4}$$

证 不妨假定 μ 及 ν 均为有限测度. 令 $\mathcal{C}=\{A\times B\,|\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$. 由定理 4.2.4 知: $\mathcal{C}$ 中集合的示性函数满足定理的结论. 故由定理 2.2.1 知: 对一切有界的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数 f, 定理的结论成立. 因此, 对一切非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数 f, 定理结论亦成立.

4.2.6 系 在定理 4.2.5 的假设下, 若 f 是一非负可积函数, 则 $\mu\{x\,|\,\nu(f_x)=\infty\}=\nu\{y\,|\,\mu(f^y)=\infty\}=0$.

证 直接由 (4.2.4) 式看出.

下一定理称为 **Fubini 定理**. 它使我们可以用叠积分来表达关于乘积测度的积分.

4.2.7 定理 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ 有限测度空间，f 为 $X\times Y$ 上一 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数. 若 f 关于 $\mu\times\nu$ 可积 (相应地，积分存在), 则有下列结论:

(1) 对 μ-a.e. x, f_x 为 ν 可积 (相应地，关于 ν 积分存在); 对 ν-a.e. y, f^y 为 μ 可积 (相应地，关于 μ 积分存在);

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x d\nu, & \text{若} f_x \text{ 为} \nu \text{ 可积 (相应地，积分存在)},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

$$I^f(y)=\begin{cases}\int_X f^y d\mu, & \text{若} f^y \text{ 为} \mu \text{ 可积 (相应地，积分存在)},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 I_f 为 μ 可积 (相应地，积分存在), I^f 为 ν 可积 (相应地，积分存在). 且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X I_f(x)\mu(dx)=\int_Y I^f(y)\nu(dy). \tag{4.2.5}$$

证 首先设 f 为非负且为 $\mu\times\nu$ 可积. 则由系 4.2.6 知结论 (1) 成立，且有

$$I_f(x)=\nu(f_x),\quad \mu\text{-a.e. } x,$$
$$I^f(y)=\mu(f^y),\quad \nu\text{-a.e. } y.$$

于是结论 (2) 由 (4.2.4) 式推得. 对一般 f, 分别考虑 f^+ 及 f^-, 即得定理结论.

注 由于 $\nu(f_x)$ 是 μ-a.e. 有定义的，$\mu(f^y)$ 是 ν-a.e. 有定义的，所以通常也将 (4.2.5) 式写成 (4.2.4) 式的形式.

Fubini 定理有很多的应用. 我们将通过下面的习题向读者介绍一些应用的例子.

习 题

4.2.1 设 $\mathbf{R}$ 为实直线，试证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$. (注意: 对一般拓扑空间 X, 不一定有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X\times X)$, 一般只有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{B}(X\times X)$, 参见引理 5.6.4.)

4.2.2 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ 有限测度空间，$E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则下列条件等价:

(1) $(\mu\times\nu)(E)=0$;

(2) $\mu(E^y)=0, \nu$-a.e. y;

(3) $\nu(E_x)=0$, μ-a.e. x.

4.2.3 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间，μ_1 及 ν_1 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度，μ_2 及 ν_2 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的 σ 有限测度. 若 $\nu_1\ll\mu_1$ 且 $\nu_2\ll\mu_2$, 则 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$, 且有

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}(x,y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y),\quad \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}.$$

4.2.4 设 $\sum_{m,n}a_{m,n}$ 为绝对收敛的双重级数. 试用 Fubini 定理证明

$$\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty a_{m,n}=\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty a_{m,n}.$$

4.2.5 试用 Fubini 定理证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{x^2}{2})dx=1$.(提示: 考虑

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{x^2}{2})dx\int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{y^2}{2})dy,$$

并令 $r^2=x^2+y^2$.)

4.2.6 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为 σ 有限测度空间，f 为 X 上的一非负 $\mathcal{A}$ 可测函数. 试证

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^\infty \mu([f>y])dy.$$

(提示: 设 λ 为 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上的 Lebesgue 测度，令

$$E=\{(x,y)\in X\times\mathbf{R}\mid 0\le y<f(x)\},$$

则 $\lambda(E_x)=f(x)$.)

4.2.7 设 $f(t)$ 及 $g(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上的两个右连续增函数. 我们用 μ_f 及 μ_g 分别表示它们在 $[0,\infty)$ 上诱导出的测度 (见定理 1.5.4). 试证: 对 $0\le a<b<\infty$, 有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds),$$

其中 $g(s-)=\lim_{t\uparrow\uparrow s}g(t)$(记号 $t\uparrow\uparrow s$ 表示 $t\to s$, 且 $t<s$).(提示: 将 $(a,b]\times(a,b]$ 表为 $\{(x,y)\,|\,a<x\le y\le b\}\cup\{(x,y)\,|\,a<y<x\le b\}$ 并分别计算它们的 $\mu_f\times\mu_g$ 测度.)

4.2.8 设 $f\in L^1(\mathbf{R})$, $g\in L^p(\mathbf{R})$, 则有下列结论:

(1) $(x,t)\mapsto f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ 可测, 且 Lebesgue 可积;

(2) 对 a.e. x, $t\mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

定义 f 与 g 的**卷积**如下: $\forall x\in\mathbf{R}$, 令

$$f*g(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt, & \text{可积情形},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 $f*g\in L^p(\mathbf{R})$, 且有如下的 **Young 不等式**: $\|f*g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p$. (提示: 对 $1\le p\le\infty$ 情形, 利用 Hölder 不等式及 Fubini 定理.)

(3) 若 g 有界, 则 $f*g$ 连续. (提示: 利用习题 3.4.8.)

4.2.9 (Steinhaus 引理) 设 E 为 $\mathbf{R}$ 的一 Borel 子集, 令 $D(E)=\{x-y\,|\,x,y\in E\}$, 若 E 的 Lebesgue 测度 $\lambda(E)>0$, 则 $D(E)$ 包含一含原点的开区间. (提示: 不妨设 $\lambda(E)<\infty$, 以 $x+E$ 表示 $\{x+y\,|\,y\in E\}$, 以 $-E$ 表示 $\{-x\,|\,x\in E\}$. 令 $F(x)=\lambda(E\cap(x+E))$, 则 $F(x)=I_{-E}*I_E(x)$. 由习题 4.2.8(3) 知 $F(x)$ 连续, 又依假定 $F(0)>0$.)

4.2.10 (Steinhaus 引理的推广) 设 A,B 为 $\mathbf{R}$ 的两个 Borel 子集, 令 $D(A,B)=\{y-z\,|\,y\in A,z\in B\}$, 若 $\lambda(A)>0$, 且 $\lambda(B)>0$, 则 $D(A,B)$ 包含一非空开区间. (提示: 不妨设 $\lambda(A)<\infty,\lambda(B)<\infty$, 令 $F(x)=\lambda(A\cap(x+B))$, 则 $F(x)=I_{-A}*I_B(x)$, 且由 Fubini 定理知 $\int F(x)\lambda(dx)=\lambda(A)\lambda(B)$. 于是存在某 x, 使 $F(x)>0$.)

4.2.11 设 $f(x,y)$ 为定义于 $V=(a,b)\times(c,d)$ 上的一实值连续函数. 如果 f 满足下列条件:

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 V 上存在且连续;

(2) 对某个 $x_0\in(a,b)$, $\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]$ 对一切 $y\in(c,d)$ 存在;

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 V 上存在且连续,

则 $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 V 上存在, 且有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.(提示: 任取 $y_0\in(c,d)$, 由 Fubini 定理得

$$f(\overline{x},\overline{y})-f(x_0,\overline{y})-f(\overline{x},y_0)+f(x_0,y_0)=\int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy,$$

其中对每个 $\overline{x}\in(a,b)$, $\int_{x_0}^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx$ 为 y 的连续函数.)

4.3 由 σ 有限核产生的测度

本节将推广 4.2 节的结果.

4.3.1 定义 令 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为两个可测空间. 一函数 $K:X\times\mathcal{B}\longrightarrow[0,\infty]$ 称为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个**核**(kernel), 如果它满足下列二条件:

(1) $\forall x\in X$, $K(x,\cdot)$ 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的测度;

(2) $\forall B\in\mathcal{B}$, $K(\cdot,B)$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数.

称 K 为**有限核**, 如果 $\forall x\in X$, $K(x,Y)<\infty$; 称 K 为**概率核**, 如果 $\forall x\in X$, $K(x,Y)=1$; 称 K 为 **σ有限的**, 如果存在 Y 的一个可数划分 $Y=\sum_n B_n$, 使得 $B_n\in\mathcal{B},n\ge1$, 且对一切 $x\in X$ 及 $n\ge1$, 有 $K(x,B_n)<\infty$.

4.3.2 命题 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个核, μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的一测度, f 为 Y 上的一非负 $\mathcal{B}$ 可测函数.

(1) 令 $\nu(B)=\int_X K(x,B)\mu(dx)$, $B\in\mathcal{B}$, 则 ν 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的一测度.

(2) $x\mapsto\int_Y f(y)K(x,dy)$ 为 X 上的一 $\mathcal{A}$ 可测函数.

(3) 我们有

$$\int f(y)\nu(dy)=\int\Big[\int f(y)K(x,dy)\Big]\mu(dx). \tag{4.3.1}$$

证 (1) 显然. 为证 (2) 及 (3), 首先考虑非负简单可测函数 f, 然后利用定理 2.1.8(2).

下一定理推广了定理 4.2.4.

4.3.3 定理 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ 有限核, μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的一测度.

(1) 令 $N(x,E)=K(x,E_x), E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则 N 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 的一个 σ 有限核.

(2) 令

$$\mu K(E)=\int_X K(x,E_x)\mu(dx),\ E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}, \tag{4.3.2}$$

则 μK 为 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上的一测度, 且有

$$\mu K(A\times B)=\int_A K(x,B)\mu(dx),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}. \tag{4.3.3}$$

(3) 若 μ 为 σ 有限测度, 则 μK 亦为 σ 有限测度, 且它是 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上唯一满足 (4.3.3) 式的测度.

证 (1) 首先, 对任何 $x\in X, N(x,\cdot)$ 显然是 $(X\times Y,\mathcal{A}\times B)$ 上的测度. 令 $\{B_n,n\geq 1\}$ 为 Y 的一可数划分, 使得 $B_n\in\mathcal{B},n\geq 1$, 且对一切 $x\in X$, 及 $n\geq 1$, 有 $K(x,B_n)<\infty$. 令

$$\mathcal{B}_n=B_n\cap\mathcal{B},\quad \mathcal{C}_n=\{A\times C\,|\,A\in\mathcal{A},C\in\mathcal{B}_n\},$$
$$\mathcal{G}_n=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n\,|\ N(\cdot,E)\text{ 为 }\mathcal{A}\text{ 可测}\},$$

则 $\mathcal{C}_n$ 为 $X\times B_n$ 上的 π 类, 且生成 σ 代数 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$. 显然 $\mathcal{G}_n$ 为 $X\times B_n$ 上的 λ 类, 且 $\mathcal{G}_n\supset\mathcal{C}_n$, 故由单调类定理知 $\mathcal{G}_n=\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$. 现设 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 令 $E_n=E\cap(X\times B_n)$, 则易知 $E_n\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$, 且 $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$. 于是我们有

$$N(x,E)=\sum_n N(x,E_n),\ x\in X,$$

从而 $N(\cdot,E)$ 为 $\mathcal{A}$ 可测. 此外, 我们有 $N(x,X\times B_n)=K(x,B_n)<\infty$, 因此 N 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 的 σ 有限核.

(2) 显然. 往证 (3). 设 μ 为 σ 有限测度, 令 $\{A_n,n\geq 1\}$ 为 X 的一可数划分, 使得 $A_n\in\mathcal{A},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$. 令 $\{B_n\}$ 如在 (1) 的证明中所取的 Y 的划分, 再令

$$A_{m,k,l}=[l-1\leq K(\cdot,B_k)<l]\cap A_m,\quad m,k,l\geq 1,$$

则对一切 $k\geq 1$, 我们有 $\sum_{m,l}A_{m,k,l}=X$, 且有

$$\mu K(A_{m,k,l}\times B_k)=\int_{A_{m,k,l}}K(x,B_k)\mu(dx)<\infty.$$

由于 $\sum_{m,k,l}A_{m,k,l}\times B_k=X\times Y$, 故 μK 限于半代数 $\mathcal{C}=\{A\times B|\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$ 为 σ 有限. 因此由定理 1.4.7 知, 满足 (4.3.3) 式的测度 μK 是唯一的. 证毕.

如果对每个 $x\in X$ 有 $K(x,\cdot)=\nu$, 则 $\mu K=\mu\times\nu$. 因此, 下一定理推广了定理 4.2.5.

4.3.4 定理 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ 有限核, μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的一 σ 有限测度, f 为 $X\times Y$ 上的一非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数, 则:

(1) $x\mapsto\int_Y f(x,y)K(x,dy)$ 为 $\mathcal{A}$ 可测函数;

(2) 我们有

$$\int_{X\times Y}fd(\mu K)=\int_X\Big[\int_Y f(x,y)K(x,dy)\Big]\mu(dx). \tag{4.3.4}$$

证 令 $\mathcal{C}=\{A\times B\,|\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$, 不妨假定 μ 为有限测度, 且对一切 $x\in X,K(x,\cdot)$ 也为有限测度 (否则, 分别取 X 及 Y 的可数划分 $\{A_n\}$ 及 $\{B_n\}$, 使得 $\forall x\in X,n\geq 1$ 有 $K(x,B_n)<\infty,\mu(A_n)<\infty$, 并在每个 $A_n\times B_m$ 上考虑问题). 由命题 4.3.2 及

(4.3.3) 式易知：对 $\mathcal{C}$ 中集合的示性函数定理的结论成立. 故由定理 2.2.1 知：对一切有界的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数 f 结论成立. 最后，由积分的单调收敛定理推知：对一切非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数 f 结论成立. 证毕.

习 题

4.3.1 (Fubini 定理的推广形式) 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 (Y,B) 的一个 σ 有限核，μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度，μK 为 (4.3.2) 式定义的测度. 若 f 为 $X\times Y$ 上一 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数, 它关于 μK 可积 (相应地, 积分存在), 则有下列结论:

(1) 对 μ-a.e. x, f_x 关于 $K(x,\cdot)$ 可积 (相应地，积分存在);

(2) $\forall x\in X$, 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x(y)K(x,dy), & \text{可积 (相应地，积分存在) 情形},\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 I_f 为 μ 可积 (相应地，积分存在), 且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu K)=\int_X I_f(x)\mu(dx).$$

4.3.2 设 $(X_j,\mathcal{A}_j), j=1,\cdots,n$ 为可测空间，μ_1 为 $(X_1,\mathcal{A}_1)$ 上的一 σ 有限测度. 对 $2\le i\le n$, 设 $K(x_1,\cdots,x_{i-1},dx_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1}X_j,\prod_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_i)$ 到 $(X_i,\mathcal{A}_i)$ 的一个 σ 有限核. 证明下列结论:

(1) 在 $(\prod_{j=1}^{n}X_j,\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j)$ 上存在唯一的测度 μ, 使得对一切可测矩形 $\prod_{j=1}^{n}A_j\in\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j$ 有

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}A_j)=\int_{A_1}\mu_1(dx_1)\cdots\int_{A_n}K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

此外，μ 是 σ 有限测度;

(2) 设 f 为 $(\prod_{j=1}^{n}X_j,\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j)$ 上的非负可测函数，则有

$$\int fd\mu=\int_{X_1}\mu_1(dx_1)\int_{X_2}K(x_1,dx_2)\cdots\int_{X_{n-1}}K(x_1,\cdots,x_{n-2},dx_{n-1})$$

$$\cdot\int_{X_n}f(x_1,\cdots,x_n)K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

4.3.3 设 K_1,K_2 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的 σ 有限核，μ_1,μ_2 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的测度. 为要 μ_1K_1 关于 μ_2K_2 绝对连续，必须且只需 μ_1 关于 μ_2 绝对连续，且对 μ_1-a.e. $x\in X$, $K_1(x,\cdot)$ 关于 $K_2(x,\cdot)$ 绝对连续. 此外，这时有

$$\frac{d(\mu_1K_1)}{d(\mu_2K_2)}(x,y)=\frac{dK_1(x,\cdot)}{dK_2(x,\cdot)}(y)\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x).$$

4.4 无穷乘积空间上的概率测度

在概率论中，我们经常要讨论任意有限多个试验 (不一定相互独立). 为了能在同一概率空间中考虑它们，我们需要在无穷乘积可测空间上构造概率测度. 下一定理 (**Tulcea 定理**) 解决了这一问题.

4.4.1 定理 令 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j), j=1,2,\cdots$ 为一列可测空间，$\Omega=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j, \mathcal{F}=\prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_j, P_1$ 为 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 上的一概率测度. 对每个 $i\ge 2$, 设 $P(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},d\omega_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1}\Omega_j,\prod_{j=1}^{i-1}\mathcal{F}_j)$ 到 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 的一个概率核. 则存在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上唯一的概率测度 P, 使得对一切 $n\ge 1$, 有

$$P(B^n\times\prod_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j)=P_n(B^n),\quad B^n\in\prod_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j, \tag{4.4.1}$$

其中 P_n 为 $\prod_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j$ 上如下定义的概率测度 (见习题 4.3.2):

$$P_n(B^n)=\int_{\Omega_1}P(d\omega_1)\int_{\Omega_2}P(\omega_1,d\omega_2)\cdots\int_{\Omega_{n-1}}P(\omega_1,\cdots,\omega_{n-2},d\omega_{n-1})$$

$$\cdot\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1,\cdots,\omega_n)P(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

证 设 $n > m$ 为两个自然数，则显然有

$$P_n(B^m \times \prod_{j=m+1}^{n} \Omega_j) = P_m(B^m),$$

于是按 (4.4.1) 式可在可测柱集全体 $\mathcal{Z}$ 上唯一定义一集函数 P. 令 $\mathcal{F}^n = \{B^n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j \mid B^n \in \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j\}$, 则 $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}^{n+1}$, 且 $\bigcup_n \mathcal{F}^n = \mathcal{Z}$. 由于 P 限于每个 $\mathcal{F}^n$ 为概率测度，故 P 在代数 $\mathcal{Z}$ 上是有限可加的. 往证 P 为 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度，为此只需证 P 在空集 $\emptyset$ 处连续. 我们用反证法. 假定有 $A_n \in \mathcal{Z}, n \geq 1, A_n \downarrow \emptyset$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) > 0$. 必要时在序列 (A_n) 首项前添加若干项 Ω, 且在两个集 A_n 及 A_{n+1} 之间适当重复若干项 A_n, 我们可以进一步假定 $A_n \in \mathcal{F}^n$. 因此有 $A_n = B^n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j$. 由于 $A_{n+1} \subset A_n$, 我们有 $B^{n+1} \subset B^n \times \Omega_{n+1}$. 此外，对每个 $n > 1$,

$$P(A_n) = \int_{\Omega_1} g_n^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1),$$

其中

$$g_n^{(1)}(\omega_1) = \int_{\Omega_2} P(\omega_1, d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1, \cdots \omega_n) P(\omega_1, \cdots, d\omega_n).$$

由于 $I_{B^{n+1}}(\omega_1,\cdots,\omega_{n+1}) \leq I_{B^n}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 故对固定的 $\omega_1, g_n^{(1)}(\omega_1)$ 单调下降趋于某极限 $h_1(\omega_1)$. 由控制收敛定理，我们有

$$\int_{\Omega_1} h_1(\omega_1) P_1(d\omega_1) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) > 0.$$

于是存在 $\omega_1' \in \Omega_1$, 使 $h_1(\omega_1') > 0$. 实际上，必有 $\omega_1' \in B^1$. 否则，对一切 $n > 1$ 有 $I_{B^n}(\omega_1', \omega_1, \cdots, \omega_n) = 0$, 从而 $g_n^{(1)}(\omega_1') = 0$, 这导致 $h_1(\omega_1') = 0$.

现设 $n > 2$, 则

$$g_n^{(1)}(\omega_1') = \int g_n^{(2)}(\omega_2) P(\omega_1', d\omega_2),$$

其中

$$g_n^{(2)}(\omega_2) = \int_{\Omega_3} P(\omega_1', \omega_2, d\omega_3) \cdots \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1', \omega_2, \cdots, \omega_n) \cdot P(\omega_1', \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}, d\omega_n).$$

如上所证，可知 $g_n^{(2)}(\omega_2) \downarrow h_2(\omega_2)$. 由于 $g_n^{(1)}(\omega_1') \to h_1(\omega_1') > 0$, 故存在 $\omega_2' \in \Omega_2$, 使 $h_2(\omega_2') > 0$. 如上所证，可知 $(\omega_1', \omega_2') \in B^2$.

最后，由归纳法可得到一点列 $\{\omega_1', \omega_2', \cdots\}$, 使得 $\omega_j' \in \Omega_j$ 且 $(\omega_1', \cdots, \omega_n') \in B^n$. 因此最终有 $(\omega_1', \omega_2', \cdots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 这导致矛盾. 这样，我们证明了 P 为代数 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度. 由测度扩张定理知，它可唯一地扩张成为 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z})$ 上的概率测度. 证毕.

4.4.2 系 (Kolmogrov 定理) 设 $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$ 为一列概率空间，令 $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$, 则存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度 P, 使得对一切 $n \geq 1$, 对一切 $A_j \in \mathcal{F}_j, 1 \leq j \leq n$, 有

$$P(\prod_{j=1}^{n} A_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j) = \prod_{j=1}^{n} P_j(A_j). \tag{4.4.2}$$

习 题

4.4.1 设 $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i), i \in I\}$ 为一族概率空间，令 $\mathcal{P}_0(I)$ 表示 I 的非空有限子集全体，则在 $(\prod_{i\in I} \Omega_i, \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得对任何 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P(\prod_{i\in S} A_i \times \prod_{i\in I\setminus S} \Omega_i) = \prod_{i\in S} P_i(A_i), \ A_i \in \mathcal{F}_i, i \in S.$$

(提示：利用定理 4.1.4(3).)

4.4.2 试将定理 4.4.1 推广到任意无穷多个可测空间乘积情形.

4.5 Kolmogorov 相容性定理及 Tulcea 定理的推广

本节将给出 Kolmogorov 相容性定理及 Tulcea 定理的一个推广形式，为此我们先引入紧类概念，它是 Hausdorff 空间中的紧集类概念的抽象化.

4.5.1 定义 设 $\mathcal{C}$ 为 E 上一集类. 如果下列条件满足:

$$\{C_n, n\geq 1\}\subset\mathcal{C},\ \bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\emptyset\Rightarrow \text{对某个 } m,\ \bigcap_{n=1}^{m}C_n=\emptyset,$$

则称 $\mathcal{C}$ 为**紧类**.

4.5.2 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 E 上的紧类，则 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 及 $\mathcal{C}_\delta$ 都是紧类. 这里 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 及 $\mathcal{C}_\delta$ 分别表示用有限并及可列交运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类.

证 $\mathcal{C}_\delta$ 显然是紧类，只需证 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 是紧类. 设 $D_n=\bigcup\limits_{m=1}^{M_n}C_n^m\in\mathcal{C}_{\cup f}, n\geq 1$, 使得对一切 $p\geq 1$, $\bigcap\limits_{n\leq p}D_n\neq\emptyset$. 令 J 表示那些对每个 n 满足 $1\leq m_n\leq M_n$ 的自然数序列 $\{m_1,m_2,\cdots,\}$ 全体. 令

$$J_p=\{\{m_n,n\geq 1\}\in J \mid \bigcap_{n\leq p}C_n^{m_n}\neq\emptyset\}.$$

由于

$$\bigcap_{n\leq p}D_n=\bigcap_{n\leq p}\bigcup_{m=1}^{M_n}C_n^m=\bigcup_{\{m_n\}\in J}(\bigcap_{n\leq p}C_n^{m_n}),$$

于是对每个 $p\geq 1, J_p$ 非空. 显然有 $J_p\supset J_{p+1}, p\geq 1$, 往证 $\bigcap\limits_p J_p\neq\emptyset$. 对每个 $n\geq 1$, 任取 J_q 中一元素 $\{m_n^{(q)},n\geq 1\}$. 由于对固定的 $n, 1\leq m_n^{(q)}\leq M_n$ 对一切 q 成立，从而对任一由无穷多个自然数组成的集合 Λ, 必有无穷多个 q 属于 Λ, 使得 $m_n^{(q)}$ 取相同值. 因此，由归纳法可构造一序列 $\{m_n^*,n\geq 1\}$, 使得它属于 J, 且对一切 $p\geq 1$, 及 $1\leq n\leq p, m_n^*=m_n^{(q)}$ 对无穷多个 q 成立. 这样一

来，对任一 $p\geq 1$, 存在 $q>p$, 使 $m_n^*=m_n^{(q)}, 1\leq n\leq p$. 由于 $\{m_n^*,n\geq 1\}\in J_q\subset J_p$, 故由 J_p 的定义知 $\{m_n^*,n\geq 1\}\in J_p$, 于是 $\{m_n^*,n\geq 1\}\in\bigcap\limits_p J_p$. 从而对一切 p, $\bigcap\limits_{n\leq p}C_n^{m_n^*}\neq\emptyset$. 但依假定，$\mathcal{C}$ 为紧类，故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n^{m_n^*}\neq\emptyset$, 从而 $\bigcap\limits_n D_n\neq\emptyset$(注意：$\bigcap\limits_n D_n\supset\bigcap\limits_n D_n^{m_n^*}$). 这表明 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 为紧类. 证毕.

4.5.3 引理 设 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}_1$ 为 E 上的半代数，$\mathcal{A}_1\supset\mathcal{A},\mathcal{C}$ 为 E 上一紧类，且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}_1$. 令 μ 为 $\mathcal{A}_1$ 上的一非负有限可加集函数，且 $\mu(E)<\infty$. 若对一切 $A\in\mathcal{A}$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C)\mid C\subset A,\ C\in\mathcal{C}\},$$

则 μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ 可加的.

证 首先假定 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}_1$ 为 E 上的代数. 由定理 1.3.4 知：为了证 μ 在 $\mathcal{A}$ 上为 σ 可加，只需证 μ 在空集 $\emptyset$ 处连续. 设 $A_n\in\mathcal{A}, A_n\downarrow\emptyset$. 给定 $\varepsilon>0$, 依假定，对每个 n, 存在 $C_n\subset A_n, C_n\in\mathcal{C}$, 使 $\mu(A_n)\leq\mu(C_n)+\varepsilon/2^n$. 由于 $\bigcap_n C_n\subset\bigcap_n A_n=\emptyset$, 故由 $\mathcal{C}$ 是紧类的假定，存在正整数 m, 使 $\bigcap_{n=1}^m C_n=\emptyset$, 即有 $\bigcup_{n=1}^m C_n^c=E$, 于是有

$$A_m=\bigcap_{n=1}^m A_n=(\bigcap_{n=1}^m A_n)\cap(\bigcup_{n=1}^m C_n^c)\subset\bigcup_{n=1}^m(A_n\setminus C_n).$$

因此，对 $k\geq m$, 我们有

$$\mu(A_k)\leq\mu(A_m)\leq\sum_{n=1}^m\mu(A_n\setminus C_n)<\varepsilon.$$

这表明 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_k)<\varepsilon$. 但 $\varepsilon>0$ 是任意的，故 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(A_n)=0$, 因此 μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ 可加的.

现设 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}_1$ 为 E 上的半代数. 令 $\overline{\mathcal{A}}_1$ 及 $\overline{\mathcal{A}}$ 为分别由 $\mathcal{A}_1$ 及 $\mathcal{A}_2$ 产生的代数，则 μ 可以唯一地扩张成为 $\overline{\mathcal{A}}_1$ 上的有限可加集函

数，且对一切 $A \in \overline{\mathcal{A}}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A,\ C \in \mathcal{C}_{\cup f}\}.$$

但由引理 4.5.2 知，$\mathcal{C}_{\cup f}$ 为紧类，故由已证结果知：μ 限于 $\overline{\mathcal{A}}$ 为 σ 可加的. 特别，μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ 可加的. 证毕.

4.5.4 定义 设 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 为一测度空间. 称 μ 为 $\mathcal{E}$ 上的**紧测度**, 如果存在紧类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, 使得对一切 $A \in \mathcal{E}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, C \in \mathcal{C}\}.$$

下一定理是经典的 Kolmogorov 相容性定理的推广形式.

4.5.5 定理 设 I 为一无穷集，$\mathcal{P}_0(I)$ 为 I 的非空有限子集全体. 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间. 对每个 $T \in \mathcal{P}_0(I)$, 设 P_T 为 $(\prod\limits_{i\in T}\Omega_i, \prod\limits_{i\in T}\mathcal{F}_i)$ 上的一概率测度. 假定：(1) 每个 P_i 为 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 上的紧概率测度；(2) $\{P_T, T \in \mathcal{P}_0(I)\}$ 满足如下相容性条件：对 $T_1 \subset T_2$, 有

$$P_{T_1}(A_{T_1}) = P_{T_2}\Big(A_{T_1} \times \prod_{i\in T_2\setminus T_1}\Omega_i\Big),\ A_{T_1} \in \prod_{i\in T_1}\mathcal{F}_i, \tag{4.5.1}$$

则在 $(\prod\limits_{i\in JU}\Omega_i, \prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ 上存在唯一概率测度 P, 使得对一切 $T \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P\Big(A_T \times \prod_{i\in I\setminus T}\Omega_i\Big) = P_T(A_T),\ A_T \in \prod_{i\in T}\mathcal{F}_i. \tag{4.5.2}$$

证 令

$$\mathcal{S} = \bigcup_{T\in\mathcal{P}_0(I)}\Big\{\prod_{i\in T}A_i \times \prod_{i\notin T}\Omega_i \,\Big|\, A_i \in \mathcal{F}_i, i \in T\Big\},$$

则 $\mathcal{S}$ 为半代数，且 $\sigma(\mathcal{S}) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 令

$$P\Big(\prod_{i\in T}A_i \times \prod_{i\notin T}\Omega_i\Big) = P_T\Big(\prod_{i\in T}A_i\Big),$$

由 $\{P_T, T \in \mathcal{P}_0\}$ 的相容性知，如上定义的 P 在 $\mathcal{S}$ 上唯一确定，有限可加，且有 $P(\prod\limits_{i\in I}\Omega_i) = 1$. 因此，由引理 4.5.3, 为证 P 在 $\mathcal{S}$ 上 σ 可加，只需证存在一紧类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, 使得对一切 $A \in \mathcal{S}$, 有

$$P(A) = \sup\{P(C) \mid C \subset A, C \in \mathcal{C}\}. \tag{4.5.3}$$

依假定，对每个 $i \in I$, 存在 Ω_i 上一紧类 $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}_i$, 使得对一切 $A_i \in \mathcal{F}_i$, 有 $P_i(A_i) = \sup\{P_i(C) \mid C \subset A_i, C \in \mathcal{C}_i\}$. 不妨设每个 $\mathcal{C}_i$ 对可列交运算封闭. 令

$$\mathcal{D} = \Big\{C \times \prod_{j\neq i}\Omega_j, C \in \mathcal{C}_i,\ i \in I\Big\},$$

则 $\mathcal{D}$ 为紧类. 事实上，设 $A_n = C_n \times \prod_{j\neq i_n}\Omega_j, C_n \in \mathcal{C}_{i_n}$, 则 $\bigcap\limits_n A_n$ 有如下形式：$\prod\limits_{i\in S}B_i \times \prod_{i\notin S}\Omega_i$, 其中 S 为一可数集，且 $B_i \in \mathcal{C}_i, i \in S$. 若 $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$, 则存在某 $s \in S$, 使 $B_s = \emptyset$. 由于 $B_s = \bigcap\limits_{i_n=s} C_n$, 故由 $\mathcal{C}_s$ 的紧性知，存在 $\{n \mid i_n = s\}$ 的有限子集 J, 使 $\bigcap\limits_{n\in J} C_n = \emptyset$, 从而 $\bigcap\limits_{n\in J} A_n = \emptyset$. 因此，$\mathcal{D}$ 为紧类. 现令 $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{\cap f}$, 则 $\mathcal{C}$ 为紧类，且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. 设 $A = \prod\limits_{i\in T}A_i \times \prod\limits_{i\in T}\Omega_i \in \mathcal{S}$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $C_i \in \mathcal{C}_i, C_i \subset A_i$, 使得

$$P_i(A_i) \leq P_i(C_i) = \frac{\varepsilon}{|T|},$$

这里 $|T|$ 表示 T 中元素的个数. 令

$$C = \prod_{i\in T}C_i \times \prod_{i\notin T}\Omega_i = \bigcap_{i\in T}(C_i \times \prod_{j\neq i}\Omega_j) \in \mathcal{C},$$

则 $C \subset A$, 且有 $A \setminus C \subset \bigcup_{i\in T}\{(A_i \setminus C_i) \times \prod_{j\neq i}\Omega_i\}$. 故由 P 的半有限可加性得

$$P(A) - P(C) \leq \sum_{i\in T} P_i(A_i \setminus C_i) \leq \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故有 (4.5.3) 式. 因此， P 在 $\mathcal{S}$ 上是 σ 可加的，从而可唯一地扩张成为 $\sigma(\mathcal{S}) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 上的一概率测度，仍记为 P. 显然 P 满足 (4.5.2) 式 (利用单调类定理). P 的唯一性显然. 证毕.

在随机过程理论中，有时遇到如下的概率测度的扩张问题：设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间， $(\mathcal{F}_n)$ 为 $\mathcal{F}$ 的一列上升的子 σ 代数，使得 $\sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$. 令 P_n 为 $\mathcal{F}_n$ 上的概率，使得 P_{n+1} 限于 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致. 是否存在 $\mathcal{F}$ 上的唯一概率测度，使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致？

下一定理回答了这一问题，它推广了 Tulcea 定理 (定理 4.4.1).

4.5.6 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间， $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ 为 $\mathcal{F}$ 的一列上升子 σ 代数，使得 $\sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$. 令 P_n 为 $\mathcal{F}_n$ 上的概率测度， $n \geq 1$, 如果对一切 $n \geq 2$, 存在 $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1})$ 到 $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ 的概率核 (见定义 4.3.1)$Q_n(\omega, \cdot)$, 使得

$$P_n(B_n) = \int Q_n(\omega, B_n) P_{n-1}(d\omega), \quad \forall B_n \in \mathcal{F}_n, \tag{4.5.4}$$

$$G \in \mathcal{F}_n, Q_n(\omega, G) > 0 \Rightarrow A_{n-1}(\omega) \cap G \neq \emptyset, \tag{4.5.5}$$

这里 $A_k(\omega)$ 表示包含 ω 的 $\mathcal{F}_k$ 原子，则对一切 $n \geq 1$,P_{n+1} 限于 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致. 如果进一步有

$$\{\omega^{(n)}, n \geq 1\} \subset \Omega,\ A_n(\omega^{(n)}) \downarrow \Rightarrow \bigcap_n A_n(\omega^{(n)}) \neq \emptyset, \tag{4.5.6}$$

则存在 $\mathcal{F}$ 上的唯一概率测度，使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致.

证 容易由 (4.5.5) 式推知，对一切 $n \geq 2$ 及 $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, 有 $Q_n(\omega, B) = I_B(\omega)$. 由此再由 (4.5.4) 式推知，对一切 $n \geq 1$,P_{n+1} 限于 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致. 于是若令 $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$, 则 $(P_n, n \geq 1)$ 在代数 $\mathcal{A}$ 上唯一确定一可加集函数 P, 使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致.

现在假定条件 (4.5.5) 和 (4.5.6) 成立. 为证 P 在 $\mathcal{A}$ 上是 σ 可加的，只需证 P 在空集处连续. 设 $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \downarrow \emptyset$, 我们用反证法证明 $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. 假定 $\lim_{n\to\infty} P(B_n) > 0$. 不妨设对每个 $n \geq 1$, 有 $B_n \in \mathcal{F}_n$(否则，可以在序列 $\{B_n, n \geq 1\}$ 中添加某些相同的 B_n, 使新序列具有这一性质). 由 (4.5.4) 式知，对每个 $n \geq 2$,

$$P(B_n) = \int_\Omega q_n^{(1)}(\omega) P_1(d\omega),$$

其中 $q_2^{(1)}(\omega) = Q_2(\omega, B_2)$,

$$q_n^{(1)}(\omega) = \int_\Omega Q_2(\omega, d\omega^{(2)}) \cdots Q_n(\omega^{(n-1)}, B_n), \ n \geq 3.$$

由于 $B_n \downarrow$, 故 $q_n^{(1)}(\omega) \downarrow h_1(\omega)$. 由控制收敛定理，我们有

$$\int_\Omega h_1(\omega) P_1(d\omega) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) > 0,$$

于是存在 $\omega^{(1)}$, 使 $h_1(\omega^{(1)}) > 0$. 实际上，必有 $\omega^{(1)} \in B_1$, 因为不然的话，由 (4.5.5) 式知

$$q_2^{(1)}(\omega^{(1)}) = Q_2(\omega^{(1)}, B_2) \leq Q_2(\omega^{(1)}, B_1) = 0,$$

这将导致 $h_1(\omega^{(1)}) = 0$.

现设 $n > 2$, 则

$$q_n^{(1)}(\omega^{(1)}) = \int_\Omega q_n^{(2)}(\omega) Q_2(\omega^{(1)}, d\omega),$$

其中 $q_3^{(2)}(\omega) = Q_3(\omega, B_3)$,

$$q_n^{(2)}(\omega) = \int_\Omega Q_3(\omega, d\omega^{(3)}) \cdots Q_n(\omega^{(n-1)}, B_n), \ n \geq 4.$$

于是 $q_n^{(2)}(\omega)\downarrow h_2(\omega)$, 且

$$\int_\Omega h_2(\omega)\,Q_2(\omega^{(1)},d\omega)=h_1(\omega^{(1)})>0.$$

因此, $Q_2(\omega^{(1)},[h_2>0])>0$. 从而由 (4.5.5) 式知, 存在 $\omega^{(2)}$, 使 $\omega^{(2)}\in A_1(\omega^{(1)})$, 且 $h_2(\omega^{(2)})>0$. 与上述同理可证 $\omega^{(2)}\in B_2$.

这样, 由归纳法我们得到 Ω 中的一列点 $\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots$, 使得 $\omega^{(n)}\in B_n$, 且 $\omega^{(n+1)}\in A_n(\omega^{(n)}),n\geq 1$. 由于 $\mathcal{F}_n\downarrow$, 故易知 $A_{n+1}(\omega^{(n+1)})\subset A_n(\omega^{(n)})$. 因此, 由条件 (3) 知 $\bigcap\limits_n A_n(\omega^{(n)})\neq\emptyset$. 但显然有 $A_n(\omega^{(n)})\subset B_n$, 故 $\bigcap\limits_n B_n\neq\emptyset$. 这与假定矛盾. 这表明, 必须有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=0$, 因此, P 在 $\mathcal{A}$ 上是 σ 可加的, 从而 P 可以唯一扩张成为 $\mathcal{F}$ 上的一概率测度. 定理证毕.

习　题

4.5.1 为什么说定理 4.5.6 是 Tulcea 定理的推广形式?

4.6 概率测度序列的投影极限

4.6.1 定义 设 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j),j=1,2,\cdots$ 为一列可测空间, 且对 $j>k,p_k^j$ 为 Ω_j 到 Ω_k 上的可测满射, 使得对 $j>k>l$ 有 $p_l^k\circ p_k^j=p_l^j$, 则称 $((\Omega_j,\mathcal{F}_j),p_k^j)$ 为一 **投影序列**. 设 $\Omega=\prod_{j=1}^\infty\Omega_j,\mathcal{F}=\prod_{j=1}^\infty\mathcal{F}_j$, 令

$$E=\{(\omega_j)\in\Omega\,|\,p_k^j(\omega_j)=\omega_k,\forall j>k\},\quad \mathcal{E}=\mathcal{F}\cap E,\tag{4.6.1}$$

称 $(E,\mathcal{E})$ 为 **投影可测空间**.

4.6.2 引理 设 $((\Omega_j,\mathcal{F}_j),p_k^j)$ 为一投影序列, $(E,\mathcal{E})$ 为相应的投影可测空间. 令 π_j 为从 Ω 到 Ω_j 上的投影映射, p_j 为 π_j 到 E

上的局限, 令

$$\mathcal{G}=\bigcup_{j=1}^\infty p_j^{-1}(\mathcal{F}_j),\tag{4.6.2}$$

则 $\mathcal{G}$ 为 E 上的代数, 且 $\sigma(\mathcal{G})=\mathcal{E}$.

证 首先由 (4.6.1) 式知, p_j 为 E 到 Ω_j 上的满射. 事实上对任何给定的 $\omega_j\in\Omega_j$, 对 $n<j$, 令 $\omega_n=p_n^j\omega_j$; 对 $m\geq j$, 依次选取 $\omega_{m+1}\in\Omega_{m+1}$, 使得 $\omega_m=p_m^{m+1}\omega_{m+1}$, 则 $\omega=(\omega_k)\in E$, 且 $p_j(\omega)=\omega_j$. 再由 (4.6.1) 式知, 对 $j>k$, $p_k=p_k^j\circ p_j$, 从而有 $p_k^{-1}(\mathcal{F}_k)=p_j^{-1}(p_k^j)^{-1}(\mathcal{F}_k)\subset p_j^{-1}(\mathcal{F}_j)$. 这表明 σ 代数序列 $p_j^{-1}(\mathcal{F}_j)$ 单调增, 故 $\mathcal{G}$ 为代数. 此外我们有

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{G})&=\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^\infty p_j^{-1}(\mathcal{F}_j)\Big)=\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^\infty(\pi_j^{-1}(\mathcal{F}_j)\cap E)\Big)\\&=\sigma\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^\infty\pi_j^{-1}(\mathcal{F}_j)\Big)\cap E\Big)=\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^\infty\pi_j^{-1}(\mathcal{F}_j)\Big)\cap E=\mathcal{F}\cap E=\mathcal{E}.\end{aligned}$$

引理证毕.

如果对每个 $j\geq 1,P_j$ 为 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j)$ 上的一概率测度, 且满足如下相容性条件: $P_k=P_j(p_k^j)^{-1},\forall j>k$, 则通过映射 p_j 可在 $p_j^{-1}(\mathcal{F}_j)$ 上定义测度 Q_j: $Q_j(p_j^{-1}(A))=P_j(A),A\in\mathcal{F}_j$. 对 $j>k$, Q_j 限于 $p_k^{-1}(\mathcal{F}_k)$ 显然与 Q_k 一致, 因此我们在 $\mathcal{G}$ 上得到了一个有限可加的非负集函数, 记为 Q. 如果 Q 可唯一扩张成 $\mathcal{E}$ 上的一个概率测度 (即 Q 在 $\mathcal{G}$ 上是可列可加的), 则有 $P_j=Q\circ p_j^{-1},\forall j\geq 1$. 这时称 Q 是 Q_j 的 **投影极限**.

一个自然的问题是: 在什么条件下 Q 可唯一扩张成 $\mathcal{E}$ 的一个概率测度? 下面我们利用 Kolmogorov 相容性定理给出一个答案.

4.6.3 定理 设 $((\Omega_j,\mathcal{F}_j),p_k^j)$ 为一投影序列, $(E,\mathcal{E})$ 为相应的投影可测空间, p_j 为 Ω 到 Ω_j 上的投影映射 π_j 在 E 上的局限. 如果对每个 $j\geq 1,P_j$ 为 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j)$ 上的一紧概率测度, 且满足如下

相容性条件: $P_k = P_j(p_k^j)^{-1}, \forall j > k$, 则存在 $(E,\mathcal{E})$ 上的唯一概率测度 Q, 使得 $P_j = Q \circ p_j^{-1}, \forall j \geq 1$.

证 令

$$E_n = \prod_{j=1}^{n} \Omega_j, \ \ \mathcal{E}_n = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j, \ n \geq 1.$$

定义 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 到 $(E_n, \mathcal{E}_n)$ 的可测映射 f_n:

$$f_n(\omega_n) = (p_1^n(\omega_n), p_2^n(\omega_n), \cdots, p_{n-1}^n(\omega_n), \omega_n).$$

令 $\mu_n = P_n \circ f_n^{-1}, n \geq 1$, 则 μ_n 为 $(E_n, \mathcal{E}_n)$ 上的概率测度, 且 $\forall A_n \in \mathcal{E}_n$, 有

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}(A_n \times \Omega_{n+1}) &= P_{n+1}(f_{n+1}^{-1}(A_n \times \Omega_{n+1}) \\ &= P_{n+1} \circ (p_n^{n+1})^{-1}(f_n^{-1}(A_n) = P_n \circ f_n^{-1}(A_n) = \mu_n(A_n).\end{aligned}$$

于是由定理 4.5.5 知存在 $(\Omega, \mathcal{F}) = (\prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j)$ 上的唯一概率测度 μ, 使得 $P_j = \mu \circ \pi_j^{-1}, \forall j \geq 1$. 由 f_n 及 μ_n 的定义容易推知, 集合 E 关于 μ 的外测度为 1, 又由于 $\mathcal{E} = \mathcal{F} \cap E$, 故由习题 1.4.1 知, 若令 Q 为 μ 到 $(E,\mathcal{E})$ 上的限制, 则 Q 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的唯一概率测度, 使得 $P_j = Q \circ p_j^{-1}, \forall j \geq 1$. 定理证毕.

4.7 随机 Daniell 积分及其核表示

本节我们将引进随机 Daniell 积分, 给出 Daniell-Stone 定理的随机版本和随机 Daniell 积分的核表示. 本节内容取自参考文献 14.

4.7.1 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, $\mathcal{P}$ 为其上的一族概率测度. 令

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} \,|\, P(A) = 0, \forall P \in \mathcal{P}\}, \tag{4.7.1}$$

我们指定 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{F}$ 中 "可略集" 全体, 称三元体 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ 为一 (由 $\mathcal{P}$ 确定的)**随机空间**. 一依赖 $\omega \in \Omega$ 的性质称为 $\mathcal{N}$-a.e. 成立, 如果除去某个可略集外它处处成立. 我们用 $L(\Omega, \mathcal{F})$(相应地, $\overline{L}(\Omega, \mathcal{F})$) 表示 Ω 上实值 (数值) 函数全体.

4.7.2 定义 设 E 为一抽象集合, $\mathcal{A}$ 为 E 上的一代数, μ 为一从 $\mathcal{A}$ 到 $\overline{L}_+(\Omega, \mathcal{F})$ 中的映射, 满足如下条件: (1) $\mu(\emptyset) = 0, \mathcal{N}$-a.e.;(2) 如果 $(A_n) \subset \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset, \forall n \neq m$, 则 $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \mathcal{N}$-a.e.. 我们称 μ 为一 $\mathcal{N}$**随机测度**. 如果 $\mathcal{P}$ 只有单个元素 P, 则称 $\mathcal{N}$ 随机测度为 P**随机测度**. 有限随机测度和 σ 有限随机测度概念是不讲自明的.

4.7.3 定义 设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可测空间, μ 为 $\mathcal{E}$ 上一 $\mathcal{N}$ 随机测度, f 为 E 上一非负 $\mathcal{E}$ 可测函数. 令

$$\mu(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \mu([f > \frac{k}{2^n}]),$$

称 $\mu(f)$ 为 f 关于 μ 的积分. 对一般 f, 可令 $\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$.

4.7.4 定义 设 $\mathcal{H}$ 为 E 上的一向量格, T 为 $\mathcal{H}$ 到 $L(\Omega, \mathcal{F})$ 中的映射. 称 T 为 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{N}$**随机 Daniell 积分**, 如果 T 是 $\mathcal{N}$-a.e. 线性的, 保正的, 且在 0 处从上连续的, 即 T 满足如下条件: (i)$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g), \mathcal{N}\text{-}a.e., \forall f, g \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$; (ii)$f \geq 0, f \in \mathcal{H} \Longrightarrow T(f) \geq 0, \mathcal{N}\text{-}a.e.$; (iii) $f_n \in \mathcal{H}, f_n \downarrow 0 \Longrightarrow T(f_n) \to 0, \mathcal{N}\text{-}a.e.$.

下一定理是 Carathéodory 测度扩张定理 (定理 1.4.7) 的随机版本.

4.7.5 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{N})$ 为一随机空间, $\mathcal{A}$ 为 E 上的一代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一 σ 有限 $\mathcal{N}$ 随机测度, 则 μ 可以唯一地 (在 $\mathcal{N}$ 等价意义下) 扩张成为 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的 $\mathcal{N}$- 随机测度.

证 与引理 1.3.5 类似, 我们可以把与 σ 有限 $\mathcal{N}$ 随机测度有关

的问题化为有限 $\mathcal{N}$ 随机测度情形来处理, 因此不妨假定 μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一有限 $\mathcal{N}$ 随机测度. 由于 $\mathcal{N}$ 由 (4.7.1) 式给出, 对每个 $P\in\mathcal{P}$, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一有限 P 随机测度. 这时容易证明 μ 可以唯一地扩张成为 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的 P 随机测度 (习题 4.7.1), 记为 μ_P. 令 $\mathcal{X}$ 为 E 上那些包含 $\mathcal{A}$ 但含于 $\sigma(\mathcal{A})$ 的代数 $\mathcal{A}'$ 全体, 使得限于 $\mathcal{A}'$ $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 有一个统一的版本. 我们在 $\mathcal{X}$ 上按集合的包含关系定义一个半序. 如果 $\{A_\alpha,\alpha\in\wedge\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一个全序子集, 令 $\overline{\mathcal{A}}=\cup_{\alpha\in\wedge}\mathcal{A}_\alpha$, 则易知 $\overline{\mathcal{A}}\in\mathcal{X}$. 于是由集合论中著名的 Zorn 引理知, $\mathcal{X}$ 有一极大元 $\widetilde{\mathcal{A}}$. 往证 $\widetilde{\mathcal{A}}=\sigma(\mathcal{A})$. 事实上, 如果 $\widetilde{\mathcal{A}}\neq\sigma(\mathcal{A})$, 则 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 不是 σ 代数, 因为 $\sigma(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数. 令 $\mathcal{B}=\{A\cap B^c|A,B\in\widetilde{\mathcal{A}}_\delta\}$, $\mathcal{A}'=\mathcal{B}_{\Sigma f}$, 则 $\mathcal{A}'$ 为 E 上的一代数, 且 $\widetilde{\mathcal{A}}\neq\mathcal{A}'$, 因为如果相等就可证明 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是一 σ 代数. 对每个 $B\in\widetilde{\mathcal{A}}_\delta$, 我们选取一个叙列 $(B_n)\subset\mathcal{A}$, 使得 $B_n\downarrow B$, 且令

$$\overline{\mu}(B)=\limsup_{n\to\infty}\mu(B_n).$$

则容易看出 $\overline{\mu}(B)$ 可以扩张成为 $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{A}'$ 上的一个统一版本. 这表明 $\mathcal{A}'\in\mathcal{X}$. 这与 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是极大元矛盾. 定理证毕.

下一定理是 Daniell-Stone 定理的随机版本.

4.7.6 定理 令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N})$ 为一随机空间, 其中 $\mathcal{N}$ 如 (4.7.1) 式给出, $\mathcal{H}$ 为 E 上的一向量格. 假定存在 $\mathcal{H}_+$ 中一处处单调上升于 1 的序列, 则对 $\mathcal{H}$ 上的任一 $\mathcal{N}$ 随机 Daniell 积分 T, 存在 $\sigma(\mathcal{H})$ 上的一 $\mathcal{N}$ 随机测度 μ, 使得 $\mu(f)=T(f),\mathcal{N}$-a.e., $\forall f\in\mathcal{H}$.

证 对每个固定的 $P\in\mathcal{P}$, T 可视为 $\mathcal{H}$ 上的 P 随机 Daniell 积分. 在 Daniell-Stone 定理的证明中用将在第 7 章定义 7.5.1 给出的 ess.inf 和 ess.sup 代替 inf 和 sup, 可以证明: 存在 $\sigma(\mathcal{H})$ 上的一 P 随机测度 μ_P, 使得 $\mu_P(f)=T(f),P$-a.e., $\forall f\in\mathcal{H}$. 因此, 由定理 4.7.5 知, 为了证明定理的结论, 只要证明存在生成 $\sigma(\mathcal{H})$ 的

一代数 $\mathcal{A}$ 使得 $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{A}$ 上有一个统一的版本 μ. 令

$$\mathcal{H}_+^*=\{f\,|\,\exists f_n\in\mathcal{H}_+,\text{使}f_n\uparrow f\},\quad \mathcal{D}=\{A\subset E\,|\,I_A\in\mathcal{H}_+^*\}.$$

对每个 $f\in\mathcal{H}_+^*$, 我们选取一个序列 $(f_n)\subset\mathcal{H}_+$, 使得 $f_n\downarrow f$, 且令

$$T^*(f)=\limsup_{n\to\infty}T(f_n),$$
$$\mathcal{D}_1=\{A\in\mathcal{D}\,|\,T^*(I_A)<\infty,\mathcal{N}\text{-a.e.}\}.$$

则 $(\mathcal{D}_1)_\sigma=\mathcal{D}$, 并由引理 3.5.7 知 $\sigma(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{H})$. 令

$$\mathcal{C}=\{A\cap B^c\,|\,A,B\in\mathcal{D}\},\quad \mathcal{A}=\mathcal{C}_{\Sigma f}.$$

则 $\mathcal{A}$ 为 E 上的代数, 且有 $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{H})$. 令

$$\overline{\mu}(A)=T^*(I_A),\quad A\in\mathcal{D}.$$

则易见 $\overline{\mu}$ 为 $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{D}$ 上的一个统一版本. 设 $C\in\mathcal{C},C=A\cap B^c,A,B\in\mathcal{D}$. 任取 $A_n\in\mathcal{D}_1,n\geq 1$, 使得 $A_n\uparrow A$. 对一切 $P\in\mathcal{P}$, 显然有

$$\mu_P(C)=\lim_{n\to\infty}\mu_P(A_n\cap B^c)=\lim_{n\to\infty}[\mu_P(A_n)-\mu_P(A_n\cap B^c)],\quad \text{P-a.e.},$$

于是若令

$$\mu(C)=\limsup_{n\to\infty}[\overline{\mu}_P(A_n)-\overline{\mu}_P(A_n\cap B^c)],$$

则如此定义的 μ 是 $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{C}$ 上的一个统一版本. 从而 μ 可唯一地延拓到 $\mathcal{A}$ 上成为 $\{\mu_P,P\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的一个统一版本. 定理证毕.

4.7.7 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N})$ 为一由概率族 $\mathcal{P}$ 确定的随机空间, 其中 $\mathcal{N}$ 由 (4.7.1) 给出. 又设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间. 称从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到

$(E,\mathcal{E})$ 的两个核 K_1 和 K_2 是 $\mathcal{N}$ 等价的，如果存在 $N\in\mathcal{N}$, 使得对每个 $\omega\in\Omega\setminus N$, 有 $K_1(\omega,\cdot)=K_2(\omega,\cdot)$ 成立.

4.7.8 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N})$ 为一随机空间，其中 $\mathcal{N}$ 由 (4.7.1) 给出.

(1) 设 μ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的 $\mathcal{N}$ 随机测度. 如果存在从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的一个核 K 和 $N\in\mathcal{N}$, 使得对每个 $\omega\in\Omega\setminus N$, 对一切 $A\in\mathcal{E}$, 有 $K(\omega,A)=\mu(A)(\omega)$, 则称 K 为 μ 的**核表示**.

(2) 设 $\mathcal{H}$ 为 E 上的一向量格，T 为 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{N}$ 随机 Daniell 积分，如果存在从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的一个核 K, 使得对一切 $f\in\mathcal{H}$, 有 $T(f)=K(\cdot,f),\mathcal{N}$-a.e., 则称 K 为 T 的**核表示**.

在概率论和马氏过程理论中，构造概率转移核是一个重要问题. 一个自然的问题是：在什么条件下 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{N}$ 随机 Daniell 积分有核表示？为了回答这一问题，我们首先给出 $\mathcal{N}$ 随机测度有核表示的一个充分条件.

4.7.9 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N})$ 为一随机空间，$(E,\mathcal{E})$ 为一可分可测空间，μ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的 $\mathcal{N}$ 随机测度. 如果存在 E 上一紧类 $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$, 满足如下条件：(1) 对任何 $(E,\mathcal{E})$ 上的有限测度 ν, 对一切 $A\in\mathcal{E}$, 有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(C):C\subset A,C\in\mathcal{D}\};$$

(2)$\mathcal{D}_\sigma$ 包含生成 $\mathcal{E}$ 的一可数代数 $\mathcal{A}=A_1,A_2,\cdots$, 则 μ 有核表示，且在 $\mathcal{N}$ 等价意义下是唯一的.

证 不妨假定 μ 为有限 $\mathcal{N}$ 随机测度. 对每个 $i\geq 1$, 选取 $\mathcal{D}_{\cup f}$ 中的一列元素 $\{C_{i,k},k\geq 1\}$, 使得 $C_{i,k}$ 单调上升趋于 A_i. 令 $\mathcal{C}=\{C_{i,k},i,k\geq 1\}$, $\mathcal{A}_1$ 为由 $\mathcal{A}\cup\mathcal{C}$ 生成的代数. 于是存在 $N\in\mathcal{N}$, 使得对每个 $\omega\in\Omega\setminus N$, $\mu(E)(\omega)<\infty$, 且 $\mu(\cdot)(\omega)$ 为有限可加的. 由于 $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}_1$, 且有

$$\mu(A)(\omega)=\sup\{\mu(C)(\omega):C\subset A,C\in\mathcal{C}\},\quad\forall A\in\mathcal{A}.$$

于是由引理 4.5.3 知，对每个 $\omega\in\Omega\setminus N$, $\mu(\cdot)(\omega)$ 可以扩张成为 $(E,\sigma(\mathcal{A}))=(E,\mathcal{E})$ 上的一有限测度，记为 $K(\omega,\cdot)$. 对 $\omega\in N$, 令 $K(\omega,\cdot)$ 为零测度，则 K 为从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的一个核，且由单调类定理知，K 是随机测度 μ 在 $(E,\mathcal{E})$ 上的限制的核表示. 定理证毕.

基于这一定理，由 Daniell-Stone 定理的随机版本立刻得到如下的

4.7.10 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{N})$ 为一随机空间，其中 $\mathcal{N}$ 由 (4.7.1) 给出，$\mathcal{H}$ 为 E 上的一向量格. 令 $\mathcal{E}=\sigma(\mathcal{H})$. 假定 $(E,\mathcal{E})$ 满足定理 4.7.9 的条件，且存在 $\mathcal{H}_+$ 中一处处单调上升于 1 的序列，则 $\mathcal{H}$ 上的任一 $\mathcal{N}$ 随机 Daniell 积分都有核表示，且在 $\mathcal{N}$ 等价意义下是唯一的.

习 题

4.7.1 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{A}$ 为 E 上的一代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一有限 P 随机测度. 则 μ 可以唯一地扩张成为 $\sigma(\mathcal{A})$ 上的 P 随机测度.

第 5 章　Hausdorff 空间上的测度与积分

5.1 拓 扑 空 间

本节介绍拓扑空间的一些基本概念和结果，这是为本章其余各节作准备的. 这里我们已假定读者熟悉有关距离空间的概念和基本结果.

5.1.1 设 X 为一非空集合，$\mathcal{G}$ 为 X 的一子集族. 如果 $X, \emptyset \in \mathcal{G}$，且 $\mathcal{G}$ 对有限交及任意并运算封闭，则称 $\mathcal{G}$ 为 X 的一个**拓扑**，称序偶 $(X,\mathcal{G})$ 为**拓扑空间**. 当拓扑 $\mathcal{G}$ 自明或无需指出时，直接称 X 为拓扑空间. $\mathcal{G}$ 中的元素称为**开集**. 设 F 为 X 的一子集，若其补集 F^c 为开集，则称 F 为**闭集**. 我们用 $\mathcal{F}$ 表示 X 中的闭集全体，则 $\mathcal{F}$ 对有限并及任意交运算封闭.

5.1.2 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{G}$ 的子类，如果 $\mathcal{G}$ 中每一元素都是 $\mathcal{B}$ 中某些元素的并，则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的**基**. 若有 $\mathcal{G}$ 的可数子类 $\mathcal{B}$ 成为拓扑 $\mathcal{G}$ 的基，称 $(X,\mathcal{G})$ 为**具可数基**或满足**第二可数性公理**的拓扑空间.

若集类 $\mathcal{D}$ 中元素的有限交全体 $\mathcal{D}_{\cap f}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的基，则称 $\mathcal{D}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的**子基**.

5.1.3 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，Y 为 X 的一子集，令 $\mathcal{G}_Y = \{G\cap Y \mid G \in \mathcal{G}\}$，则 $\mathcal{G}_Y$ 为 Y 的一个拓扑，我们称 $(Y,\mathcal{G}_Y)$ 为 $(X,\mathcal{G})$ 的 (拓扑)**子空间**，称拓扑 $\mathcal{G}_Y$ 为由拓扑 $\mathcal{G}$ 在 Y 上**诱导出的拓扑**.

5.1.4 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，A 为 X 的一子集，称包含 A 的最小闭集为 A 的**闭包**，并以 $\overline{A}$ 记之；称含于 A 的最大开集为 A 的**内核**，并以 A° 记之. 令 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$，称 ∂A 为 A 的**边界**. 容易证明：

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B},\quad (A\cap B)^\circ = A^\circ\cap B^\circ,\quad (A^\circ)^c = \overline{A^c}. \tag{5.1.1}$$

5.1.5 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间. 设 $x \in V \subset X$，称 V 为 x 的一个**邻域**，如果存在 $U \in \mathcal{G}$，使 $x \in U \subset V$；如果 V 是开集，称 V 为 x 的一个**开邻域**. 点 $x \in X$ 的所有邻域构成的集类称为点 x 的**邻域系**，记为 $\mathcal{U}_x$.

设 $\mathcal{V}_x$ 为 $\mathcal{U}_x$ 的子类，如果对每一 $U \in \mathcal{U}_x$，存在 $V \in \mathcal{V}_x$，使 $V \subset U$，则称 $\mathcal{V}_x$ 为点 x 的**邻域系的基**(或**局部基**). 若 X 中的每个点有可数局部基，则称 X 满足**第一可数性公理**. 满足第二可数性公理的空间必满足第一可数性公理.

5.1.6 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，A 为 X 的一子集. 如果 $\overline{A} = X$，则称 A 在 X 中**稠密**. 若 X 有可数稠子集，则称 X 为**可分 (拓扑) 空间**. 满足第二可数性公理的空间必为可分空间.

5.1.7 设 $\mathcal{A}$ 为 X 上一集类，B 为 X 的一子集. 如果 $B \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$，则称 $\mathcal{A}$ 为 B 的一个**覆盖**. 若 $\mathcal{A}$ 为可数或有限类，分别称 $\mathcal{A}$ 为 B 的可数或有限覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 是 B 的覆盖，$\mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}$ 的子类且也是 B 的覆盖，则称 $\mathcal{A}_1$ 为 $\mathcal{A}$ 的 (关于 B 的)**子覆盖**.

5.1.8 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，如果 X 的每一开覆盖都有有限 (相应地，可数) 子覆盖，则称 X 为**紧空间**(相应地，**Lindelöf 空间**). 设 K 为 X 的子集，若 K 的每一开覆盖都有有限子覆盖，则称 K 为**紧集**. 如果 X 的每个点有一紧邻域，则称 X 为**局部紧空间**. 如果 X 可表为紧集的可数并，则称 X 为 **σ紧空间**. 紧空间中的闭集必为紧集. 但在一般拓扑空间中，紧集未必是闭集.

5.1.9 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，令 Δ 为任一不属于 X 的元素，令 $X^\Delta = X\cup\{\Delta\}$，令 $\mathcal{G}^\Delta = \mathcal{G}\cup\mathcal{G}_1$，其中

$$\mathcal{G}_1 = \{E \subset X^\Delta \mid X^\Delta\backslash E \text{ 为 } X \text{ 的紧闭集}\},$$

则 $(X^\Delta, \mathcal{G}^\Delta)$ 为紧拓扑空间，$(X,\mathcal{G})$ 为其子空间. 我们称 $(X^\Delta, \mathcal{G}^\Delta)$ 为 $(X,\mathcal{G})$ 的**单点紧化**.

5.1.10 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，如果 X 的任意两个不同的点 x 及 y 都可以用两个不交开集 U 及 V 分离 (即 $x \in U, y \in V$, 且 $U \cap V = \emptyset$), 则称 X 为 **Hausdorff 空间**. 如果 X 是 Hausdorff 空间，且任意两个不交闭集可用两个不交开集分离，则称 X 为**正规空间**. 在一 Hausdorff 空间中，紧集必为闭集.

5.1.11 设 $(X,\mathcal{G})$ 及 $(Y,\mathcal{H})$ 为两个拓扑空间， $f: X \to Y$ 为从 X 到 Y 的一映射，若 $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$(即开集的原象为开集), 则称 f 为**连续映射**. 设 $x \in X$, 若 $f(x)$ 在 Y 中的任意邻域 W 的原象 $f^{-1}(W)$ 为 x 在 X 中的邻域，则称 f **在点** x **处连续**.

设 $f: X \to Y$ 为 X 到 Y 上的一对一映射，若 f 及 f^{-1} 都是连续映射，则称 f 为从 X 到 Y 上的**同胚映射**. 如果在两个拓扑空间中存在同胚映射，则称这两个拓扑空间**同胚**.

5.1.12 设 X 为一拓扑空间. 函数 $f: X \to (-\infty, +\infty]$ 称为**下半连续的**, 如果对每个实数 a, $[f > a]$ 为开集；称函数 $f: X \to [-\infty, +\infty)$ 为**上半连续的**, 如果 $-f$ 为下半连续. 上 (下) 半连续函数为 Borel 可测.

显然，既下半连续又上半连续的函数为连续函数，反之亦然. 此外，一族下半连续函数的上端为下半连续函数，一族上半连续函数的下端为上半连续函数.

5.1.13 定理 (Dini 定理) 设 X 为一紧拓扑空间， f_n 为 X 上的一列非负上半连续函数，且 $f_n \downarrow 0$, 则 f_n 一致收敛于 0.

证 $\forall \varepsilon > 0$, $G_n = \{x \mid f_n(x) < \varepsilon\}$ 为覆盖 X 的单调非降的开集列. 由于 X 为一紧拓扑空间，故存在某 N, 使 $X = G_N$. 于是 $\forall n \geq N$, 有 $X = G_n$. 这表明 f_n 一致收敛于 0.

5.1.14 设 f 为拓扑空间 X 上的实值函数. 称集合 $\{x \in$

$X \mid f(x) \neq 0\}$ 的闭包为 f 的**支撑**, 记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集，则称 f 为**具紧支撑的**.

5.1.15 为方便起见，我们引入下列记号：设 X 为一拓扑空间，我们分别用 $\mathcal{G}$ 、 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{K}$ 表示 X 中的全体开集、全体闭集及全体紧集所成的集类. 我们用 $\mathcal{G}_\delta$ 表示 $\mathcal{G}$ 中元素的可列交全体，用 $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{K}_\sigma)$ 表示 $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ 中元素的可列并全体. $\mathcal{G}_\delta$ 中的元称为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, $\mathcal{F}_\sigma$ 中的元称为 $\mathcal{F}_\sigma$ 集， $\mathcal{K}_\sigma$ 中的元称为 $\mathcal{K}_\sigma$ 集 (或称为 σ 紧集). 此外，我们用 $C(X)$ 、 $C_b(X)$ 及 $C_c(X)$ 分别表示 X 上的连续函数、有界连续函数及具紧支撑的连续函数全体.

5.1.16 引理 (Urysohn 引理) 设 X 为一正规空间， E 及 F 为 X 的两个不交闭子集. 则存在 X 上的一连续函数 f, 使得 $0 \leq f \leq 1$, 且 f 在 E 上取值为 0, 在 F 上取值为 1.

证 令 D 为区间 (0,1) 中二进小数全体 (即 $D = \{\frac{m}{2^n} \mid 1 \leq m < 2^n, n = 1, 2, \cdots\}$), 由 X 的正规性，存在不交开集 $U_{1/2}$ 及 $V_{1/2}$ 使 $E \subset U_{1/2}, F \subset V_{1/2}$. 由于 $V_{1/2}^c$ 为闭集，且 $U_{1/2} \subset V_{1/2}^c$, 故 $\overline{U}_{1/2} \subset V_{1/2}^c \subset F^c$. 因此我们有 $E \subset U_{1/2} \subset \overline{U}_{1/2} \subset F^c$. 同理，存在开集 $U_{1/4}$ 及 $U_{3/4}$ 使得

$$E \subset U_{1/4} \subset \overline{U}_{1/4} \subset U_{1/2}, \ \overline{U}_{1/2} \subset U_{3/4} \subset \overline{U}_{3/4} \subset F^c.$$

由归纳法知，存在一族开集 $\{U_r\}_{r \in D}$, 使得

$$E \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset F^c, \ r < s, \ r, s \in D.$$

令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \bigcup_r U_r, \\ \inf\{r \mid x \in U_r\}, & x \in \bigcup_r U_r, \end{cases}$$

则 $0 \leq f \leq 1$. 显然 f 在 E 上为 0, 在 F 上为 1. 往证 f 为连续函

数. 设 $0 \le \alpha < 1, 0 < \beta \le 1$, 我们有

$$f^{-1}([0,\beta)) = \bigcup_{r<\beta} U_r,$$
$$f^{-1}((\alpha,1]) = f^{-1}([0,\alpha])^c = (\bigcap_{r>\alpha} U_r)^c = (\bigcap_{r>\alpha} \overline{U}_r)^c.$$

这表明 $f^{-1}([0,\beta))$ 及 $f^{-1}((\alpha,1])$ 为开集, 从而对 $0<\alpha<\beta<1$, $f^{-1}((\alpha,\beta))$ 也为开集. 但 $[0,\beta),(\alpha,1]$ 及 (α,β) 这三种类型开集全体构成 $[0,1]$ 的基 (即 $[0,1]$ 作为一拓扑空间, 其中开集都可表为这三类开集的并), 故 f 为连续函数. 证毕.

5.1.17 定理 (Tietze 扩张定理) 令 X 为一正规空间, E 为 X 的一闭子集, 如果 f 为定义于 E 的一有界实值连续函数 (E 按 X 诱导出的拓扑为一拓扑空间), 则存在 X 上的有界连续函数 g, 使 g 在 E 上的限制为 f, 且使 $\sup_{x\in X}|g(x)| = \sup_{x\in E}|f(x)|$.

证 不妨假定 $\sup|f(x)|=1$. 令 $E_1=[f\le -\frac{1}{3}], F_1=[f\ge \frac{1}{3}]$, 由 Urysohn 引理, 可取 X 上的一连续函数 g_1 使得 $-\frac{1}{3}\le g_1\le \frac{1}{3}$, 且 g_1 在 E_1 上为 $-\frac{1}{3}$, 在 F_1 上为 $\frac{1}{3}$. 这时显然有

$$|f(x)-g_1(x)| \le \frac{2}{3}, \ \forall x\in E.$$

依归纳法, 可取 X 上的连续函数 $g_2, g_3, \cdots$, 使得 $|g_n|\le 2^{n-1}/3^n$, 且有

$$|f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)| \le (\frac{2}{3})^n, \ \forall x\in E.$$

令 $g=\sum_{i=1}^\infty g_i$, 则 g 即为满足定理要求的连续函数. 证毕.

下面我们研究局部紧 Hausdorff 空间的性质.

5.1.18 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间, K 及 L 为 X 的两个不交紧子集, 则存在 X 的两个不交开子集 U 及 V, 使得 $K\subset U, L\subset V$.

证 不妨设 K 及 L 皆非空. 首先任意取定某 $x\in K$, 则对任何 $y\in L$, 存在不交开集 U_y 及 V_y, 使 $x\in U_y, y\in V_y$, 由于 L 为紧集, 故存在 $y_1,\cdots,y_n\in L$, 使 $L\subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. 令

$$U_x = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}, \quad V_x = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i},$$

则 U_x 和 V_x 为不交开集, 且 $x\in U_x, L\subset V_x$. 对每个 $x\in K$, 我们可以找到这样的一对开集. 由于 K 是紧集, 故存在 $x_1,\cdots,x_m\in K$, 使 $K\subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$. 令

$$U = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}, \ V = \bigcap_{i=1}^m V_{x_i},$$

则 $K\subset U, L\subset V$, 且 U 和 V 为不交开集. 证毕.

作为该引理的一个推论, 我们有如下命题.

5.1.19 命题 紧 Hausdorff 空间为正规空间.

5.1.20 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, K 为 X 的紧子集, U 为包含 K 的一开集, 则有如下结论:

(1) 存在开集 V, 其闭包为紧集, 使得

$$K\subset V\subset \overline{V}\subset U;$$

(2) 存在一具紧支撑的连续函数 f, 使得 $\mathrm{supp}(f)\subset U$, 且 $I_K\le f\le I_U$;

(3) 如果 $K\in\mathcal{G}_\delta$, 则 (2) 中的 f 在 K^c 上可取为 <1;

(4) 存在紧集 K_1 及开集 U_1, 使得 $K_1\in\mathcal{G}_\delta, U_1$ 为 $\mathcal{G}_\delta$ 中紧集的可列并, 且使 $K\subset U_1\subset K_1\subset U$.

证 (1) 设 $x\in K$, 由于 X 的局部紧性, 存在 x 的开邻域 W_x, 其闭包为紧集. 不妨设 $W_x\subset U$, 对紧集 $\{x\}$ 及 $\overline{W}_x\backslash W_x$ 应用引理 5.1.18, 存在不交开集 V_1 及 V_2, 使 $x\in V_1, \overline{W}_x\backslash W_x\subset V_2$. 令

$V_x = V_1 \cap W_x$. 由于 $\overline{V}_1 \subset V_2^c$, 故易知 $\overline{V}_x \cap U^c = \emptyset$, 即 $\overline{V}_x \subset U$. 显然 $x \in V_x$, 且 $\overline{V}_x$ 为紧集. 由于 K 是紧集, 故存在 $x_1, \cdots, x_n \in K$, 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. 令 $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, 则 $\overline{V}$ 为紧集, 且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(2) 令 V 为 (1) 中的开集, 作为子空间, $\overline{V}$ 为紧 Hausdorff 空间, 从而为正规空间. 由 Urysohn 引理, 存在 $\overline{V}$ 上的连续函数 g, 使 $0 \le g \le 1$, 且 g 在 K 上为 1, 在 $\overline{V} \backslash V$ 为 0. 令

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overline{V}, \\ 0, & x \in X \backslash \overline{V}, \end{cases}$$

则 f 在 $\overline{V}$ 上连续, 在 $X \backslash V$ 上为 0(从而连续). 由于 $\overline{V}$ 及 $X \backslash V$ 为闭集, 且 $\overline{V} \cup (X \backslash V) = X$, 故 f 在 X 上连续. 显然有 $I_K \le f \le I_U$, 且 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{V} \subset U$.

(3) 令 V 为 (1) 中的开集, 设 $K \in \mathcal{G}_\delta$, 则存在一列下降开集 $G_n \subset V$, 使得 $\bigcap_n G_n = K$. 由 (2), 存在连续函数 f_n, 使 $0 \le f_n \le 1$, 且 f_n 在 K 上为 1, 在 G_n^c 上为 0. 令

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n,$$

则 f 为连续函数, $0 \le f \le 1$, 且 f 在 K 上为 1, 在 K^c 上 < 1. 此外有 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{V} \subset U$.

(4) 由 (1) 不妨设 $\overline{U}$ 为紧集, 令 f 为 (2) 中的函数, 使得 $0 \le f \le 1$, f 在 K 上为 1, 在 V^c 上为 0. 令

$$K_1 = [f \ge \frac{1}{2}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}],$$

$$U_1 = [f > \frac{1}{2}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \ge \frac{1}{2} + \frac{1}{n}],$$

则 K_1 及 U_1 满足 (4) 的要求.

5.1.21 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间, K 为 X 的一紧子集, U_1 及 U_2 为 X 的开子集, 使得 $K \subset U_1 \cup U_2$, 则存在紧集 K_1 及 K_2, 使得 $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$.

证 令 $L_1 = K \backslash U_1, L_2 = K \backslash U_2$, 则 L_1 和 L_2 为不交紧集. 由引理 5.1.18, 存在不交开集 V_1 及 V_2, 使 $V_1 \supset L_1, V_2 \supset L_2$. 令 $K_1 = K \backslash V_1, K_2 = K \backslash V_2$, 则易证 K_1 及 K_2 满足引理要求.

5.1.22 命题 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间, $f \in C_c(X)$, $U_1, \cdots, U_n$ 为 X 的开子集, 使得 $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. 则存在 $C_c(X)$ 中的函数 $f_1, \cdots, f_n$, 使得 $f = f_1 + \cdots + f_n$, 且 $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i, 1 \le i \le n$. 进一步, 若 f 非负, 则每个 f_i 也可取为非负.

证 由归纳法, 只需考虑 $n = 2$ 情形. 由引理 5.1.21, 存在紧集 K_1 及 K_2, 使 $\mathrm{supp}(f) = K_1 \cup K_2, K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$. 由命题 5.1.20(2), 存在 $h_1, h_2 \in C_c(X)$, 使得

$$I_{K_i} \le h_i \le I_{U_i}, \ \mathrm{supp}(h_i) \subset U_i, \ i = 1, 2.$$

令 $g_1 = h_1, g_2 = h_2 - (h_1 \wedge h_2)$, 则 g_1 及 g_2 非负, 其支撑分别含于 U_1 及 U_2, 且在 $\mathrm{supp}(f)$ 上, $g_1(x) + g_2(x) = h_1(x) \vee h_2(x) = 1$. 最后, 令 $f_i = f g_i, i = 1, 2$, 则 $f = f_1 + f_2, \mathrm{supp}(f_i) \subset U_i, i = 1, 2$. 证毕.

5.1.23 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $K_1, \cdots, K_n$ 为 X 的不交紧子集, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为实数. 则存在一具紧支撑的连续函数 f, 使得:

(1) $f(x) = \alpha_i$, 如果 $x \in K_i, i = 1, \cdots, n$;

(2) $\|f\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|\}$, 其中 $\|f\|_\infty \hat{=} \sup_{x \in X} |f(x)|$.

证 由引理 5.1.18 不难归纳证明: 存在不交开集 $U_1, \cdots, U_n$, 使 $K_i \subset U_i, 1 \le i \le n$. 由命题 5.1.20(2) 知, 对每个 i, 存在 $f_i \in C_c(X), 0 \le f_i \le 1$, 使得 $I_{K_i} \le f_i \le I_{U_i}$. 令 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, 则 f

满足命题要求. 证毕.

5.1.24 系 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, K 及 L 为 X 的两个不交紧子集, 则存在两个不交的 $\mathcal{F}_\sigma$ 开集 U 及 V, 使得 $K\subset U, L\subset V$.

证 由命题 5.1.23, 存在 $f\in C_c(X)$, 使 $0\le f\le 1$, 且 f 在 K 上为 1, 在 L 上为 0. 令

$$U=\left[f>\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$$

$$V=\left[f<\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\le\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]$$

则 U 及 V 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 开集, $U\cap V=\emptyset$, 且 $U\supset K, V\supset L$. 证毕.

5.1.25 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, K 为 X 的一紧子集, $U_1,\cdots,U_n$ 为 X 的开子集, 使得 $K\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$. 如果 $K\in\mathcal{G}_\delta$, 则存在 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集 $K_1,\cdots,K_n$, 使得 $K_i\subset U_i, 1\le i\le n$, 且 $K=\bigcup_{i=1}^n K_i$.

证 由归纳法知, 只需对 $n=2$ 情形证明结论. 令 $L_1=K\backslash U_1, L_2=K\backslash U_2$, 则 L_1 和 L_2 为不相交紧集. 由系 5.1.24 知, 存在不相交 $\mathcal{F}_\sigma$ 开集 V_1 及 V_2, 使 $V_1\supset L_1, V_2\supset L_2$. 令 $K_1=K\setminus V_1, K_2=K\setminus V_2$, 则 K_1 及 K_2 满足引理要求. 证毕.

5.1.26 定义 设 (X,ρ) 为一距离空间. 令 A 为 X 的一子集. 称 A 为**有界集**, 如果 $\sup_{x,y\in A}\rho(x,y)<\infty$; 称 A 为**全有界集**, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在 X 的有穷子集 B, 满足如下条件: $\forall x\in A, \exists y\in B$, 使 $\rho(x,y)<\varepsilon$; 称 A 为**列紧集**, 如果 A 中任一点列在 X 中有一收敛子列. X 中的一点列 (x_n) 称为**基本列 (Cauchy 列)**, 如果 $\rho(x_n,x_m)\to 0, n,m\to\infty$. 称距离空间 (X,ρ) 为**完备的**, 如果 X 中的任一基本列皆收敛.

注意: 完备性概念不是拓扑概念. 一个完备距离空间可以改赋**以一等价距离变成非完备的.**

5.1.27 定理 (Baire 定理) 设 X 为一完备距离空间或局部紧 Hausdorff 空间. 令 (V_n) 为一列在 X 中稠密的开子集, 则其交集也在 X 中稠.

证 我们只对完备距离空间情形证明, 将另一情形的证明留给读者. 任取 X 中一非空开集 B_0, 则存在一半径小于 1 的开球 B_1, 使得 $\overline{B}_1\subset V_1\cap B_0$. 由归纳法, 对每个 $n\ge 1$, 存在半径小于 $1/n$ 的开球, 使得 $\overline{B}_n\subset V_n\cap B_{n-1}$. 令 $K=\bigcap_{n=1}^\infty\overline{B}_n$, B_n 的球心 x_n 构成 X 中的一基本列, 从而收敛于 X 中某一点 x. 显然有 $x\in K$. 但 $K\subset B_0\cap\bigcap_{n=1}^\infty V_n$, 于是 B_0 与 $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ 的交非空. 这表明 $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ 在 X 中稠.

5.1.28 定义 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, A 为 X 的一子集. 如果 $(\overline{A})^\circ=\emptyset$, 则称 A 在 X 中**无处稠密**. 称空间 X 为**第一纲的**, 如果它可表为可数多个无处稠密集的并. 称空间 X 为**第二纲的**, 如果它不能表为可数多个无处稠密集的并.

由 (5.1.1) 推知, 一集合 A 为 X 中无处稠密集, 当且仅当 $(\overline{A})^c$ 在 X 中稠.

5.1.29 定理 完备距离空间或局部紧 Hausdorff 空间为第二纲的.

证 我们用反证法来证明定理. 设 X 为一完备距离空间或局部紧 Hausdorff 空间, 假定它是第一纲的, 即它可表为一列无处稠密集 (A_n) 的并. 令 $V_n=(\overline{A}_n)^c$, 则 (V_n) 为一列在 X 中稠密的开子集, 从而由 Baire 定理知, 它们的交集也在 X 中稠. 于是有

$$X=\overline{\cap_n V_n}=\overline{\cap_n(\overline{A}_n)^c}=\overline{(\cup_n\overline{A}_n)^c}.$$

另一方面, 由假定 $\cup_n\overline{A}_n=X$, 故由 (5.1.1) 式得

$$\overline{(\cup_n\overline{A}_n)^c}=\left((\cup_n\overline{A}_n)^\circ\right)^c=\emptyset.$$

这导致矛盾. 定理证毕.

习 题

5.1.1 试证: (1) 紧空间中每个闭集为紧集; (2) Hausdorff 空间中的紧集为闭集 (提示: 利用引理 5.1.18); (3) 含于一紧集的闭集为紧集.

5.1.2 设 X 和 Y 为拓扑空间, f 为 X 到 Y 中的连续映射, K 为 X 的紧子集, 则 $f(K)$ 为 Y 的紧子集. 设 X 为一紧空间, Y 为一 Hausdorff 空间, f 为 X 到 Y 上的一对一连续映射, 则 f 为 X 到 Y 上的同胚映射.

5.1.3 设 X 和 Y 为拓扑空间, 令 $F_1,\cdots,F_n$ 为 X 的闭子集, 使得 $X=\bigcup_{i=1}^n F_i$. 设 f 为 X 到 Y 中的一个映射, 若 f 限于每个 F_i 为连续, 则 f 在 X 上连续.

5.1.4 证明 5.1.9, 并证明: 为要一拓扑空间 X 为紧空间, 必须且只需单点集 $\{\Delta\}$ 是单点紧化 $X\cup\{\Delta\}$ 中的开集.

5.1.5 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, F 为 X 的一闭子集或开子集, 则作为 X 的子空间, F 是局部紧 Hausdorff 空间.

5.1.6 (Lindelöf 定理) 具有可数基的空间为 Lindelöf 空间.

5.1.7 设 X 为一距离空间, 则下列三个断言等价: (1)X 具可数基; (2) X 为可分的; (3)X 为 Lindelöf 空间.

5.1.8 具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间必为 σ 紧空间. (提示: 利用 Lindelöf 定理.)

5.1.9 设 X 为一 σ 紧的局部紧 Hausdorff 空间, 则存在一列 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集 K_n, 使 $K_n\subset K_{n+1}^\circ$, $n\geq 1$, 且 $X=\bigcup_n K_n$.(提示: 利用命题 5.1.20(4).)

5.1.10 (Urysonh 嵌入定理) 具有可数基的正规 Hausdorff 空间必同胚于 Hilbert 空间 R^∞ 的某一子空间. 这里 $\mathbf{R}^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots),x_i\in\mathbf{R},i\geq 1,\sum_{i=1}^\infty x_i^2<\infty\}$, 内积 (x,y) 为: $(x,y)=\sum_{i=1}^\infty x_iy_i$. (提示: 分以下三个步骤证明定理: (1) 设 $\mathcal{C}$ 为 X 的可数基 (假定 $\emptyset\notin\mathcal{C}$). 令 $\mathcal{A}=\{(U,V)\,|\,U,V\in\mathcal{C},\overline{U}\subset V\}$, 将 $\mathcal{A}$ 的成员排列为: $(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots$. 由 Urysohn 引理, 对每个 $i\geq 1$, 存在连续映射 $f_i:X\longrightarrow[0,1]$, 使 f_i 在 $\overline{U}$ 上为 0, 在 V^c 上为 1. (2) 在 X 上定义映射: $f(x)=\left(f_1(x),\frac{1}{2}f_2(x),\frac{1}{3}f_3(x),\cdots\right)$, 证明 f 为 X 到 $\mathbf{R}^\infty$ 中的一对一连续映射. (3) 证明对 X 的每一开集 W,$f(W)$ 是

$f(X)$ 的开集.)

5.1.11 具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间 X 必可距离化 (即其拓扑可由一距离引出).(提示: X 的单点紧化 $X\cup\{\Delta\}$ 仍具可数基.)

5.1.12 距离空间中列紧集是全有界集, 完备距离空间中的全有界集为列紧集.

5.1.13 距离空间为紧的, 当且仅当它是全有界的和完备的.

5.2 局部紧 Hausdorff 空间上的测度与 Riesz 表现定理

设 X 为一拓扑空间, 我们用 $C_c(X)$ 表示 X 上具有紧支撑的连续函数全体. 易知 $C_c(X)$ 为一向量格 (见定义 4.6.1). 本节将用 Daniell 积分研究当 X 为局部紧 Hausdorff 空间时 $C_c(X)$ 上的正线性泛函的积分表示 (即 Riesz 表现定理).

首先, 我们研究拓扑空间上由某些集类生成的 σ 代数及它们之间的关系.

5.2.1 定义 设 X 为一拓扑空间. 令

$$C_c(X)_+^*=\{f\,|\,\exists f_n\in C_c(X)_+,\ 使f_n\uparrow f\},$$
$$\mathcal{O}_c=\{C\subset X\,|\ I_C\in C_c(X)_+^*\},$$

称 $\mathcal{O}_c$ 中的元素为 $C_c(X)$**开集**. 类似定义 $C(X)$ 开集及 $C_b(X)$ 开集.

由引理 3.5.7(6) 知, 我们有 $\sigma(\mathcal{O}_c)=\sigma(C_c(X))$.

当 X 为局部紧 Hausdorff 空间时, 下一命题给出了 $C_c(X)$ 开集的一个刻画.

5.2.2 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间. 则 X 的一子集为 $C_c(X)$ 开集, 当且仅当它为 $\mathcal{K}_\sigma$ 开集. 特别, 我们有 σ ($\mathcal{K}_\sigma$ 开集)$=\sigma(C_c(X))$.

证 设 G 为 $C_c(X)$ 开集. 依定义, 存在 $C_c(X)$ 中一列非负函

数 f_n 单调上升趋于 I_G. 于是我们有

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n>0]=\bigcup_{n,k=1}^{\infty}[f_n\geq\frac{1}{k}]\in\mathcal{K}_\sigma.$$

反之, 设 G 为一 $\mathcal{K}_\sigma$ 开集, 即 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$, 其中每个 K_n 为紧集. 由命题 5.1.20(2), 对每个 n, 存在 $f_n\in C_c(X), 0\leq f_n\leq 1$, 使 f_n 在 K_n 上为 1, 且 $\text{supp}(f_n)\subset G$. 令 $g_n=\bigvee_1^n f_i$, 则 $g_n\in C_c(X)$, $g_n\uparrow I_G$, 于是 G 为 $C_c(X)$ 开集. 证毕.

5.2.3 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则有 $\sigma(C_c(X))=\sigma(\mathcal{G}_\delta$ 紧集).

证 设 $f\in C_c(X)$, 则对一切 $a\in\mathbf{R}$,

$$[f\geq a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[f>a-\frac{1}{n}\right]\in\mathcal{G}_\delta,$$

故 $[f\geq a]$ 为 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集, 从而 $\sigma(C_c(X))\subset\sigma(\mathcal{G}_\delta$ 紧集). 反之, 设 K 为 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集, 则由命题 5.1.20(3), 存在 $f\in C_c(X)$, 使 $K=[f=1]$, 故有 $\sigma(\mathcal{G}_\delta$ 紧集$)\subset\sigma(C_c(X))$. 证毕.

5.2.4 定义 设 X 为一拓扑空间, 由全体开集生成的 σ 代数称为 Borel **σ代数**, 记为 $\mathcal{B}(X)$. $\mathcal{B}(X)$ 中的元称为 **Borel 集**. 由全体 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集生成的 σ 代数称为**强 Baire σ 代数**, 记为 $\mathcal{B}_a(X)$. $\mathcal{B}_a(X)$ 中的元称为**强 Baire 集**. 使全体连续函数为可测的最小 σ 代数称为 **Baire σ 代数**, 记为 $\mathcal{B}_0(X)$. $\mathcal{B}_0(X)$ 中的元称为 **Baire 集**.

5.2.5 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则每个强 Baire 紧集为 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证 设 C 为强 Baire 紧集, 由于 $\mathcal{B}_a(X)=\sigma$ ($\mathcal{G}_\delta$ 紧集), 故存在一列 $\mathcal{G}_\delta$ 紧集 (C_n), 使 $C\in\sigma(C_1,C_2,\cdots)$(习题 1.2.3). 由命题 5.1.20(3), 对每个 n, 存在 $f_n\in C_c(X)$, 使 $0\leq f_n\leq 1$, 且 $C_n=[f_n=1]$. 令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)|.$$

对每个 $x\in X$, 令 $[x]=\{y\in X\mid d(x,y)=0\}$, 则 $[x]$ 是 x 的等价类, 其等价关系是: $x\sim y$ 当且仅当 $d(x,y)=0$. 令 $\widehat{X}$ 表示等价类全体, 在 $\widehat{X}$ 上定义距离 δ:

$$\delta([x],[y])=d(x,y),$$

则 $(\widehat{X},\delta)$ 为距离空间. 令 $\eta(x)=[x]$. 设 $r>0, E=\{[y]\mid\delta([y],[x])<r\}$, 则 $\eta^{-1}(E)=\{y\mid d(y,x)<r\}$ 为 X 中的开集 (因 $d(\cdot,x)$ 为 X 上的连续函数). 由习题 5.1.2, $\eta(C)$ 为 $\widehat{X}$ 的紧子集. 由于 $\widehat{X}$ 是距离空间, $\eta(C)$ 为 $\widehat{X}$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 即 $\eta(C)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\widehat{O}_n$, 其中每个 $\widehat{O}_n$ 为 $\widehat{X}$ 的开子集. 令 $O_n=\eta^{-1}(\widehat{O}_n)$, 则 O_n 为 X 的开子集, 且 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$, 即 C 为 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 证毕.

下面我们研究 $C_c(X)$ 上的正线性泛函的积分表示. 为此, 我们先回顾 Daniell 积分的定义 (见定义 3.6.3). 设 X 为一拓扑空间, $C_c(X)$ 上的一线性泛函 I 称为**正的**, 如果 $f\in C_c(X), f\geq 0\Rightarrow I(f)\geq 0$. $C_c(X)$ 上一正线性泛函 I 称为 Daniell 积分, 如果

$$f_n\in C_c(X),\ f_n\geq 0,\ f_n\downarrow 0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I(f_n)=0.$$

5.2.6 引理 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间, I 为 $C_c(X)$ 上的一正线性泛函, 则 I 为 $C_c(X)$ 上的 Daniell 积分.

证 设 $f_n\in C_c(X), f_n\geq 0, f_n\downarrow 0$, 令 $S_1=\text{supp}(f_1)$, 则 $\text{supp}(f_n)\subset S_1$. 由 Dini 定理 (定理 5.1.13), f_n 在 S_1 上一致趋于 0, 从而在 X 上一致趋于 0. 因此, 对给定 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使当 $n\geq N$ 时, $f_n(x)<\varepsilon$, 对一切 $x\in X$ 成立. 另一方面, 由命题 5.1.20(2), 存在 $g\in C_c(X), 0\leq g\leq 1$, 使 g 在 S_1 上为 1. 于是当 $n\geq N$, 我们有 $f_n\leq\varepsilon g$, 从而有 $I(f_n)\leq\varepsilon I(g)$. 由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 故 $\lim_{n\to\infty}I(f_n)=0$, 这表明 I 为 $C_c(X)$ 上的 Daniell 积分.

5.2.7 定义 设 X 为一拓扑空间, A 为一子集. 称 A 为**有界**

集, 如果存在一紧集 K, 使 $K \supset A$; 称 A 为 **σ有界集**, 如果存在一列紧集 (K_n), 使 $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

下一定理的第 (2) 部分是所谓的 **Riesz 表现定理**(也见下面的定理 5.3.2).

5.2.8 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, I 为 $C_c(X)$ 上的一正线性泛函. 则有下列结论:

(1) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的唯一测度 μ_1, 满足如下条件:

(i) $C_c(X) \subset L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu_1)$, 且 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu_1(f)$;

(ii) 对任意 σ 有界开集 O, 有

$$\mu_1(O) = \sup\{\mu_1(K) \mid K \subset O, K \in \mathcal{K}\}, \tag{5.2.1}$$

对一切 Borel 集 A, 有

$$\mu_1(A) = \inf\{\mu_1(O),\ O \supset A,\ O \text{ 为} \sigma \text{ 有界开集}\}. \tag{5.2.2}$$

此外, 对任一紧集 K, 有 $\mu_1(K) < \infty$.

(2) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的唯一测度 μ_2, 满足如下条件:

(i)′ $C_c(X) \subset L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu_2)$, 且 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu_2(f)$;

(ii)′ 对任何开集 O, 有

$$\mu_2(O) = \sup\{\mu_2(K) \mid K \subset O,\ K \in \mathcal{K}\}, \tag{5.2.3}$$

对一切 Borel 集 A, 有

$$\mu_2(A) = \inf\{\mu_2(O) \mid O \supset A,\ O \in \mathcal{G}\}. \tag{5.2.4}$$

此外, 对任一紧集 K, 有 $\mu_2(K) < \infty$.

证 我们分别用 $\mathcal{G}_0$ 及 $\mathcal{G}_1$ 表示 $C_c(X)$ 开集及 σ 有界开集全体. 显然有 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1$, 且 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1$ 对可列并及有限交封闭. 令

$$\mu_1^*(O) = \sup\{I(f) \mid f \in C_c(X), 0 \le f \le 1, \operatorname{supp}(f) \subset O\},\ O \in \mathcal{G}_1,$$

$$\mu_1^*(A) = \inf\{\mu^*(O) \mid O \supset A, O \in \mathcal{G}_1\},\ A \subset X.$$

往证 μ_1^* 为 X 上的外测度. 设 $O_i \in \mathcal{G}_1, i = 1, 2, \cdots$. 若 $f \in C_c(X), 0 \le f \le 1$, 且 $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, 则存在 n, 使 $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$. 故由命题 5.1.22, 存在 $f_i \in C_c(X), 1 \le i \le n$, 使得 $0 \le f_i \le 1, f = f_1 + \cdots + f_n$, 且 $\operatorname{supp}(f_i) \subset O_i$. 因此我们有

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} I(f_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mu_1^*(O_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1^*(O_i).$$

于是有

$$\mu_1^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1^*(O_i).$$

由于 $\mathcal{G}_1$ 对可列并封闭, 故由命题 1.4.3 易知 μ_1^* 为 X 上的外测度.

再证每个 Borel 集为 μ_1^* 可测集. 为此, 只需证每个开集为 μ_1^* 可测集. 设 V 为一开集, 由引理 1.4.5 知, 为证 V 为 μ_1^* 可测集, 只需证: 对一切 $O \in \mathcal{G}_1$, 有

$$\mu_1^*(O) \ge \mu_1^*(O \cap V) + \mu_1^*(O \cap V^c). \tag{5.2.5}$$

下面证明这一事实. 不妨设 $\mu_1^*(O) < \infty$, 从而 $\mu_1^*(O \cap V) < \infty$. 由于 $O \cap V \in \mathcal{G}_1$, 依定义, 对给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $f_1 \in C_c(X), 0 \le f_1 \le 1$, $\operatorname{supp}(f_1) \subset O \cap V$, 使得 $I(f_1) \ge \mu_1^*(O \cap V) - \varepsilon$. 令 $K = \operatorname{supp}(f_1)$, 则 $O \cap K^c \in \mathcal{G}_1$, 故存在 $f_2 \in C_c(X), 0 \le f_2 \le 1, \operatorname{supp}(f_2) \subset O \cap K^c$, 使得 $I(f_2) \ge \mu_1^*(O \cap K^c) - \varepsilon$. 由于 $O \cap K^c \supset O \cap V^c$, 故 $I(f_2) \ge \mu_1^*(O \cup V^c) - \varepsilon$. 令 $f = f_1 + f_2$, 则 $f \in C_c(X), 0 \le f \le 1$, 且 $\operatorname{supp}(f) \subset O$. 因此有

$$\mu_1^*(O) \ge I(f) = I(f_1) + I(f_2) \ge \mu_1^*(O \cap V) + \mu_1^*(O \cap V^c) - 2\varepsilon,$$

不等式 (5.2.5) 得证.

现令 μ_1 为 μ_1^* 在 $\mathcal{B}(X)$ 上的限制, 往证 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu_1(f)$. 首先, 由 Daniell-Stone 定理 (定理 3.6.8) 知, 存在 $\sigma(C_c(X))$ 上的测度 μ, 使对一切 $f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu(f)$. 下面先证对一切 $C_c(X)$ 开集 O, 有 $\mu(O) = \mu_1(O)$. 设 O 是 $C_c(X)$ 开集, 则存在 $f_n \in C_c(X), n \geq 1$, 使 $O \leq f_n \uparrow I_O$, 于是 $K_n \hat{=} [f_n \geq \frac{1}{n}] \uparrow O, K_n$ 为紧集. 由命题 5.1.20(2), 存在 $g_n \in C_c(X)$, 使 $I_{K_n} \leq g_n \leq I_O$, 且 $\text{supp}(g_n) \subset O$. 由于 $O \in \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1$, 于是有

$$\mu(O) = \sup_n \mu(K_n) \leq \sup_n \mu(g_n) = \sup_n I(g_n) \leq \mu_1^*(O) = \mu_1(O).$$

另一方面, 由 μ_1^* 的定义易知 $\mu_1^*(O) \leq \mu(O)$, 故 $\mu(O) = \mu_1(O)$. 现设 $f \in C_c(X)_+$, 令

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}]} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} I_{[f > \frac{k}{2^n}]},$$

则 $f_n \uparrow f$, 且 $[f > \frac{k}{2^n}]$ 为 $C_c(X)$ 开集, 于是我们有

$$I(f) = \mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu([f > \frac{k}{2^n}])$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1([f > \frac{k}{2^n}]) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(f_n) = \mu_1(f).$$

现在证明 (5.2.1) 式. 设 $O \in \mathcal{G}_1$, 令 $f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \text{supp}(f) \subset O$, 则 $I(f) = \mu_1(f) \leq \mu_1(\text{supp}(f))$, 故 (5.2.1) 式得证.

下面证明满足条件 (i) 及 (ii) 的测度唯一性. 设另有测度 ν 满足 (i) 及 (ii), 则 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $\nu(f) = I(f) = \mu_1(f)$. 设 $O \in \mathcal{G}_1$, 则对任何紧集 $K \subset O$, 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \leq f \leq I_O, \text{supp}(f) \subset O$.

故有

$$\begin{aligned}
\nu(O) &= \sup\{\nu(K) \mid K \subset O, K \in \mathcal{K}\} \\
&\leq \sup\{\nu(f) \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \ \text{supp}(f) \subset O\} \\
&= \sup\{I(f) \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \ \text{supp}(f) \subset O\} \\
&\leq \mu_1(O) \\
&= \sup\{\mu_1(K) \mid \ K \subset O, \ K \in \mathcal{K}\} \\
&\leq \sup\{\mu_1(f) \mid \ f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \ \text{supp}(f) \subset O\} \\
&= \sup\{\nu(f) \mid \ f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \ \text{supp}(f) \subset O\} \\
&\leq \nu(O).
\end{aligned}$$

于是有 $\nu(O) = \mu_1(O)$. 从而由 (5.2.2) 式知: $\nu(A) = \mu_1(A)$, 对一切 $A \in \mathcal{B}(X)$ 成立. 唯一性得证. 最后, 设 K 为一紧集, 由命题 5.1.20(2) 知 $\mu_1(K) < \infty$.

综上所证, (1) 得证. (2) 的证明完全类似 (在定义 μ_2^* 时用 $\mathcal{G}$ 代替 $\mathcal{G}_1$).

5.2.9 注 由 μ_1^* 及 μ_2^* 的定义易知, 我们有 $\mu_1 \geq \mu_2$. 此外, 由命题 5.1.20(4) 知: (5.2.1) 式及 (5.2.3) 式分别等价于

$$\mu_1(O) = \sup\{\mu_1(K) \mid \ K \subset O, K \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta \text{ 紧集}\},$$
$$\mu_2(O) = \sup\{\mu_2(K) \mid \ K \subset O, K \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta \text{ 紧集}\}.$$

最后, 若 X 为 σ 紧的, 则 $\mu_1 = \mu_2$.

习 题

5.2.1 设 X 为一拓扑空间, 则 $\sigma(C(X)) = \sigma(C_b(X)) \subset \sigma(\mathcal{G}_\delta \text{ 闭集})$.

5.2.2 设 X 为一正规拓扑空间, $\mathcal{B}_0(X)$ 为 Baire σ 代数, μ 为 $\mathcal{B}_0(X)$ 上的一 σ 有限测度, 则:

(1) $\mathcal{B}_0(X)=\sigma(\mathcal{G}_\delta$ 闭集);

(2) 为要 G 为 $\mathcal{F}_\delta$ 开集, 必须且只需存在一非负有界连续函数 f, 使得 $G=[f>0]$;

(3) 对一切 $A\in\mathcal{B}_0(X)$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B)\mid B\subset A, B \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta \text{ 闭集}\}.$$

若进一步 μ 为有限测度, 则对一切 $A\in\mathcal{B}_0(X)$, 还有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(G)\mid G\supset A, G \text{ 为 } \mathcal{F}_\sigma \text{ 开集}\}.$$

5.3 Hausdorff 空间上的正则测度

5.3.1 定义 令 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{B}(X)$ 为其 Borel σ 代数, $\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(X)$ 为 X 上的 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上一测度. 称 μ 为**内正则的**(相应地, **强内正则的**), 如果对每个开集 (相应地, $\mathcal{A}$ 可测集)O, 有 $\mu(O)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset O, K$ 为紧集 $\}$; 称 μ 为**外正则的**, 如果对每个 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\mu(A)=\inf\{\mu(O)\mid O\supset A, O$ 为开集 $\}$. 既内正则又外正则的测度称为 **正则测度**.

设 μ 为一 Hausdorff 空间上的正则测度. 若对一切非负 $f\in C_c(X)$, 有 $\mu(f)<\infty$, 则称 μ 为 **Radon 测度**. 若 μ 为一局部紧 Hausdorff 空间上的正则测度, 则由命题 5.1.20 知, μ 为 Radon 测度, 当且仅当对一切紧集 K, 有 $\mu(K)<\infty$.

由定理 5.2.8(2) 立刻推得下述定理.

5.3.2 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度与 $C_c(X)$ 上的正线性泛函之间有如下一一对应关系: 设 μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度, 令

$$L_\mu(f)=\int_X fd\mu,\quad f\in C_c(X),$$

则 L_μ 为 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 反之, $C_c(X)$ 上的正线性泛函必具有这种形式.

5.3.3 定理 设 X 为一拓扑空间, $\mathcal{G}$ 及 $\mathcal{F}$ 表示 X 的开集类和闭集类, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 σ 有限测度. 若每个开集为 $\mathcal{F}_\sigma$ 集, 则对每个 $A\in\mathcal{B}(X)$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(F)\mid F\subset A,\ F\in\mathcal{F}\}.\tag{5.3.1}$$

若进一步 μ 为有限测度, 则对每个 $A\in\mathcal{B}(X)$, 还有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(G)\mid G\supset A,\ G\in\mathcal{G}\}.\tag{5.3.2}$$

证 由于 $\mathcal{F}_\delta=\mathcal{F}$, 故由定理 1.6.3 及命题 1.6.4 推得定理的结论.

5.3.4 系 设 X 为一距离空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一有限测度, 则对一切 $A\in\mathcal{B}(X)$, (5.3.1) 式及 (5.3.2) 式成立.

证 由于距离空间中每个开集为 $\mathcal{F}_\sigma$ 集, 故由定理 5.3.3 立得系的结论.

5.3.5 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度. 若 $A\in\mathcal{A}$, 且 $\mu(A)<\infty$, 则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset A,\ K\in\mathcal{K}\}.\tag{5.3.3}$$

证 对任给 $\varepsilon>0$, 存在开集 $V\supset A$, 使 $\mu(V)<\mu(A)+\varepsilon$. 取紧集 $L\subset V$, 使 $\mu(L)>\mu(V)-\varepsilon$. 由于 $\mu(V\backslash A)<\varepsilon$, 故有开集 $W\supset V\backslash A$, 使 $\mu(W)<\varepsilon$. 令 $K=L\backslash W$, 则 $K\subset A$ 为紧集, 且有

$$\mu(K)=\mu(L)-\mu(L\cap W)>\mu(V)-2\varepsilon\geq\mu(A)-2\varepsilon,$$

故有 (5.3.3) 式.

下一定理表明: 有限测度的正则性与强内正则性等价.

5.3.6 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的有限测度. 则 μ 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度，当且仅当 μ 是强内正则的.

证 只需证充分性. 设 μ 是强内正则的，这蕴含 μ 的内正则性. 对 A^c 应用 (5.3.1) 式便得 μ 的外正则性.

5.3.7 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一测度.

(1) 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, 且 A 关于 μ 为 σ 有限集，则

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \in \mathcal{K}\}.$$

(2) 若对每个 $K \in \mathcal{H}$, 有 $\mu(K) < \infty$, 则 μ 为 Radon 测度.

证 (1) 设 G 为 X 中的一开集，则由习题 5.1.4 及 5.1.8 知，G 为 $\mathcal{K}_\sigma$ 集，故由定理 1.6.3 立得 (1) 的结论.

(2) 由于 X 中每个开集为 $\mathcal{K}_\sigma$ 集，故由 (1) 知 μ 为内正则的. 往证 μ 是外正则的. 由习题 5.1.8 及 5.1.9 知，存在一列开集 G_n, 使得 $\overline{G}_n$ 为紧集，且 $\bigcup_n G_n = X$. 于是，对每个 n, 有 $\mu(G_n) < \infty$. 令

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap G_n), \ n \geq 1,$$

则 μ_n 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度, 故由定理 5.3.3 知，μ_n 是外正则的. 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $V_n \supset A$, 使得 $\mu(G_n \cap V_n) \geq \mu(A \cap G_n) + \varepsilon/2^n$. 令 $V = \bigcup_{n=1}^\infty (G_n \cap V_n)$, 则 $V \supset A$, 且有

$$\mu(V \backslash A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(G_n \cap V_n \backslash A) \leq \varepsilon,$$

从而 $\mu(V) \leq \mu(A) + \varepsilon, \mu$ 的外正则性得证. 证毕.

下面讨论符号测度的正则性.

5.3.8 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一符号测度. 如果 μ 的变差测度 $|\mu|$ 是正则的，则称 μ 是**正则的**.

下一命题给出了有限符号测度 μ 的正则性的另一等价描述.

5.3.9 命题 为要一有限符号测度 μ 是正则的，必须且只需 μ^+ 及 μ^- 是正则的. 这里 μ^+ 及 μ^- 分别是 μ 的正部及负部.

证 充分性显然. 现证必要性. 设 $|\mu|$ 为正则测度，令 $A \in \mathcal{A}, \varepsilon > 0$, 取开集 $U \supset A$, 使 $|\mu|(U) < |\mu|(A) + \varepsilon$. 则 $\mu^-(U \backslash A) \leq |\mu|(U \backslash A) < \varepsilon$, 从而

$$\mu^-(U) = \mu^-(A) + \mu^-(U \backslash A) < \mu^-(A) + \varepsilon,$$

μ^- 的外正则性得证. μ^- 的内正则性证明类似. 同理可证 μ^+ 的正则性.

5.3.10 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上一正则符号测度. 设 $A \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(A)$ 为有限值，则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使对任何满足 $K \subset B \subset A$ 的 $B \in \mathcal{A}$, 有 $|\mu(A) - \mu(B)| < \varepsilon$.

证 由 $|\mu|$ 的正则性及定理 5.3.5 知：存在紧集 $K \subset A$, 使 $|\mu|(A \backslash K) < \varepsilon$, 于是对任何满足 $K \subset B \subset A$ 的 $B \in \mathcal{A}$, 有

$$|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A \backslash B)| \leq |\mu|(A \backslash B) \leq |\mu|(A \backslash K) < \varepsilon.$$

5.3.11 记号 设 X 为一 Hausdorff 空间，我们用 $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限符号测度全体，用 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限正则符号测度全体.

由习题 3.3.8(3) 知：$\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$ 按符号测度的全变差范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 为一 Banach 空间. 另一方面, 易知 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 是 $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}(X))$ 的闭线性子空间，故 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 按范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 也为一 Banach 空间.

下面我们研究关于正则测度的不定积分. 为此先证明一引理.

5.3.12 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一正则测度. 设 $B \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(B) < \infty$. 令 $\nu(A) = \mu(B \cap A), A \in \mathcal{A}$, 则 ν 也为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度.

证 由定理 5.3.5, 对任何 $A \in \mathcal{A}$, 我们有

$$\begin{aligned}\nu(A) = \mu(B \cap A) &= \sup\{\mu(K) \mid K \subset B \cap A, K \in \mathcal{K}\} \\ &= \sup\{\nu(K) \mid K \subset B \cap A, K \in \mathcal{K}\},\end{aligned}$$

故有

$$\nu(A) = \sup\{\nu(K) \mid K \subset A, K \in \mathcal{K}\},$$

从而由定理 5.3.6 知 ν 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度. 证毕.

5.3.13 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一正则测度. 若 $f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, 则 f 关于 μ 的不定积分 $f.\mu$ 是有限正则符号测度.

证 令 $\nu = f.\mu$, 由于 $|\nu| = |f|.\mu$, 故由符号测度正则性的定义, 为证 ν 正则, 不妨设 f 非负. 首先设 $f = I_B$, 其中 $B \in \mathcal{B}(X)$, 且 $\mu(B) < \infty$. 令 $\nu_1(A) = \mu(A \cap B), A \in \mathcal{B}(X)$, 则由引理 5.3.12 知, ν_1 为正则测度. 因此, 对 μ 可积的非负简单函数 $f, f.\mu$ 也是正则测度. 对一般的非负 μ 可积函数 f, 令 f_n 为非负简单函数, 使 $f_n \uparrow f$, 则有

$$\|f.\mu - f_n.\mu\|_{\mathrm{var}} = \int_X (f - f_n) d\mu \to 0, \ n \to \infty.$$

由 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 的完备性知 $f.\mu \in \mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$. 证毕.

5.3.14 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一 Radon 测度, ν 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一有限正则符号测度. 则下列断言等价:

(1) ν 为某 $f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ 关于 μ 的不定积分;

(2) ν 关于 μ 绝对连续;

(3) 设 K 为紧集, 且 $\mu(K) = 0$, 则有 $\nu(K) = 0$.

证 显然有 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 下证 (3)$\Rightarrow$ (2). 设 (3) 成立. 令 $A \in \mathcal{B}(X)$, 且 $\mu(A) = 0$, 则对一切紧集 $K \subset A$, 有 $\mu(K) = 0$. 往证 $\nu(A) = 0$. 假定 $|\nu(A)| = \alpha > 0$, 则由命题 5.3.10 知, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $|\nu(A) - \nu(K)| < \dfrac{\alpha}{2}$. 特别有 $\nu(K) \neq 0$, 但有 $\mu(K) = 0$, 这与 (3) 矛盾. 因此, 必须有 $\nu(A) = 0$, 这表明 $\nu \ll \mu$.

最后证 (2)$\Rightarrow$(1). 设 (2) 成立. 由 $|\nu|$ 的内正则性, 存在一列紧集 K_n, 使 $\sup_n |\nu|(K_n) = |\nu|(X)$. 令 $X_0 = \bigcup_n K_n$, 则有 $|\nu|(X \backslash X_0) = 0$. 令 $\mu_0(A) = \mu(A \cap X_0)$, 则因空间局部紧, 有 $\mu(K_n) < \infty$, 故 μ_0 为 σ 有限测度, 且 $\nu \ll \mu_0$. 于是由 Radon-Nikodym 定理知, 存在 $f_0 \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu_0)$, 使 $\nu = f_0.\mu_0$. 令 $f = f_0 I_{X_0}$, 则 $f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, 且 $\nu = f.\mu$. 证毕.

注 只在证明 (2)$\Rightarrow$(1) 时用到空间"局部紧"假定.

习 题

5.3.1 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的内正则测度. 试证:

(1) 对每个开集 O, 有

$$\begin{aligned}\mu(O) &= \sup\{\mu(f) \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1, \mathrm{supp}(f) \subset O\} \\ &= \sup\{\mu(f) \mid f \in C_c(X), 0 \leq f \leq I_O\}.\end{aligned}$$

(提示: 利用命题 5.1.20(2).)

(2) 令 $\mathcal{G}_1 = \{O \mid O \text{ 为开集, 且 } \mu(O) = 0\}$, 并令 U 为 $\mathcal{G}_1$ 中全体集合的并, 则 $\mu(U) = 0$.(注: 通常称 U^c 为 **μ 的支撑**, 记为 $\mathrm{supp}[\mu]$.)

5.3.2 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$ 为一 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的 σ 有限正则测度, 则 $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$. 这里 $\overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 关于 μ 的完备化.

5.3.3 设 X 为一紧 Hausdorff 空间, μ 为 Baire σ 代数 $\mathcal{B}_0(X)$ 上的一有限测度, 则 μ 可以唯一扩张成为 $\mathcal{B}(X)$ 上的正则测度. (提示: 用 Riesz 表现定理.)

5.3.4 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一正则测度, 则为要 μ 为 Radon 测度, 必须且只需对一切紧集 K, 有 $\mu(K)<\infty$.

5.3.5 证明 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 是 $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ 的闭线性子空间.

5.3.6 给出系 5.3.4 的一个直接证明. (提示: 令 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 中满足 (5.3.1) 式及 (5.3.2) 式的集 A 全体. 显然 $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}$. 为证 $\mathcal{C}=\mathcal{B}(X)$, 只需证 $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭, 且 $\mathcal{G}\subset\mathcal{C}$.)

5.3.7 设 X 为一 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一 Radon 测度. 令 $\mathcal{M}_r(\mu)=\{\nu\in\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))\,|\,\nu\ll\mu\}$, 则 $f\mapsto f.\mu$ 为从 $L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 到 $\mathcal{M}_r(\mu)$ 上的线性保范同构映射. (提示: $\|f.\mu\|_{\rm var}=\|f\|_{L^1(\mu)}$.)

5.4 空间 $C_0(X)$ 的对偶

设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 我们用 $C_c(X)$ 表示 X 上具紧支撑连续函数全体. X 上的一实值连续函数 f 称为**在无穷远处为零**, 是指对任给 $\varepsilon>0$, 存在紧集 K 使 f 在 K^c 上有 $|f(x)|<\varepsilon$. 我们用 $C_0(X)$ 表示在无穷远处为零的连续函数全体, 本节将证明 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 可以视为 $C_0(X)$ 的对偶.

设 $f\in C_0(X)$, 令

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in X\},$$

则 $(C_0(X),\|\cdot\|_\infty)$ 为赋范线性空间.

5.4.1 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则 $C_0(X)$ 为一 Banach 空间, 且 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密.

证 设 (f_n) 为 $C_0(X)$ 中一基本列, 则对每个 $x\in X, (f_n(x))$ 为一实数基本列, 故有极限 $f(x)$. 显然 f_n 在 X 上一致收敛于 f, 故 f 为 X 上的连续函数. 往证 f 在无穷远处为零. 任给 $\varepsilon>0$, 先取一

自然数 n, 使对一切 $x\in X$ 有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. 由于 $f_n\in C_0(X)$. 故存在紧集 K, 使 $|f_n(x)|<\varepsilon,\forall x\in K^c$. 于是有

$$|f(x)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)|<2\varepsilon,\ \ x\in K^c,$$

依定义, $f\in C_0(X)$. 这表明 $C_0(X)$ 为一 Banach 空间.

现证 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密. 设 $f\in C_0(X)$, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在紧集 K, 使 $\forall x\in K^c$ 有 $|f(x)|\le\varepsilon$. 另一方面, 由命题 5.1.20, 存在 $g\in C_c(X)$, 使 $I_K\le g\le 1$. 令 $h=gf$, 则 $h\in C_c(X)$, 且有 $\|f-h\|_\infty\le\varepsilon$. 这表明 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密. 证毕.

5.4.2 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函, 则存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-, 使 $L=L_+-L_-$.

证 设 $f\in C_0(X)$ 且 $f\ge 0$(简记为 $f\in C_0(X)_+$), 令

$$L_+(f)=\sup\{L(g)\,|\ g\in C_0(X),0\le g\le f\},\tag{5.4.1}$$

则易知 $|L_+(f)|\le\|L\|\,\|f\|_\infty$, 其中 $\|L\|$ 表示 L 的范数. 此外, 显然有 $L_+(f)\ge 0$, 且 $\forall\alpha\ge 0$, 有 $L_+(\alpha f)=\alpha L_+(f)$. 下面证明: $\forall f_1,f_2\in C_0(X)$, 有

$$L_+(f_1+f_2)=L_+(f_1)+L_+(f_2).\tag{5.4.2}$$

由 (5.4.1) 式不难看出: $L_+(f_1)+L_+(f_2)\le L_+(f_1+f_2)$. 为证相反的不等式, 取 $g\in C_0(X)$, 使 $0\le g\le f_1+f_2$. 令

$$g_1=g\wedge f_1,\ \ g_2=g-g_1,$$

则 $g_1,g_2\in C_0(X),0\le g_1\le f_1,0\le g_2\le f_2$. 于是有

$$L(g)=L(g_1)+L(g_2)\le L_+(f_1)+L_+(f_2),$$

由此得 $L_+(f_1+f_2)\le L_+(f_1)+L_+(f_2)$. 故 (5.4.2) 得证.

设 $f\in C_0(X)$, 令

$$L_+(f)=L_+(f^+)-L_+(f^-),$$

则 L_+ 为 $C_0(X)$ 上的线性泛函, 且有

$$|L_+(f)|\le L_+(f^+)\vee L_+(f^-)\le \|L\|\,\|f\|_\infty,$$

于是 L_+ 为连续线性泛函. 最后, 令 $L_-=L_+-L$, 则 L_- 为连续线性泛函, 并由 (5.4.1) 式知: 对 $f\in C_0(X)_+, L_-(f)\ge 0$. 从而 L_- 为正泛函. 证毕.

5.4.3 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间. 令 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限正则符号测度全体. 对 $\mu\in\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$, 令 $L_\mu(f)=\int f d\mu$, $f\in C_0(X)$, 则 $\mu\mapsto L_\mu$ 为从 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 到 $C_0(X)^*$ 上的保范同构映射.

证 设 $\mu\in\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$, 显然有 $L_\mu\in C_0(X)^*$, 且

$$\|L_\mu(f)\|_\infty\le\|\mu\|_{\text{var}}\|f\|_\infty,\quad f\in C_0(X),$$

于是有 $\|L_\mu\|\le\|\mu\|_{\text{var}}$. 往证等号成立. 设 $X=D\cup D^c$ 为 μ 的 Jordan 分解 (即 $\mu^+(A)=\mu(A\cap D), \mu^-(A)=-\mu(A\cap D^c)$). 对任给 $\varepsilon>0$, 由 μ^+ 及 μ^- 的正则性及定理 5.3.5 知: 存在紧集 $K_1\subset D$ 及紧集 $K_2\subset D^c$, 使得

$$\mu(K_1)-\mu(K_2)=|\mu|\,(K_1\cup K_2)>|\mu|(X)-\varepsilon=\|\mu\|_{\text{var}}-\varepsilon.$$

另一方面, 由命题 5.1.23, 存在 $f\in C_c(X)$, 使 $\|f\|_\infty=1$, 且

$$fI_{K_1\cup K_2}=I_{K_1}-I_{K_2}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\|L_\mu\|\ge L_\mu(f)&=\int fd\mu=\int fI_{K_1\cup K_2}d\mu+\int fI_{(K_1\cup K_2)^c}d\mu\\&\ge\mu(K_1)-\mu(K_2)-|\mu|((K_1\cup K_2)^c)>\|\mu\|_{\text{var}}-2\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 故有 $\|L_\mu\|\ge\|\mu\|_{\text{var}}$, 从而有 $\|L_\mu\|=\|\mu\|_{\text{var}}$.

现在证明映射 $\mu\mapsto L_\mu$ 是 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 到 $C_0(X)^*$ 的满射. 为此, 设 $L\in C_0(X)^*$, 即设 L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函. 由引理 5.4.2, 存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-, 使得 $L=L_+-L_-$. L_+ 及 L_- 限于 $C_c(X)$ 为正线性泛函, 故由 Riesz 表现定理 (定理 5.2.8(2)) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度 μ_1 及 μ_2, 使得对一切 $f\in C_c(X)$, 有 $L_+(f)=\int fd\mu_1, L_-(f)=\int fd\mu_2$. 习题 5.3.1 蕴含

$$\mu_1(X)=\sup\{L_+(f)\,|\ f\in C_c(X), 0\le f\le 1\}\le\|L_+\|<\infty,$$

同理 $\mu_2(X)<\infty$, 故 $\mu=\mu_1-\mu_2\in\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$. 显然我们有 $L=L_\mu$, 映射 $\mu\mapsto L_\mu$ 显然是线性的. 证毕.

习 题

5.4.1 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 令 X^Δ 为 X 的单点紧化 (见 5.1.11), 对 X 上的函数 f, 令

$$f_\Delta(x)=\begin{cases}f(x), & x\in X,\\ 0, & x=\Delta,\end{cases}$$

则为要 $f\in C_0(X)$, 必须且只需 f_Δ 为 X^Δ 上的连续函数.

5.4.2 设 X 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 则 $C_0(X)$ 为可分 Banach 空间. (提示: 先考虑 X 为紧空间情形, 然后利用习题 5.4.1.)

5.5 用连续函数逼近可测函数

在许多情况下, 连续函数比可测函数容易处理, 本节介绍有关用连续函数逼近可测函数的一些结果.

下一定理的一个特殊情形见习题 3.4.2.

5.5.1 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一 Radon 测度. 令 $1 \le p < \infty$, 则 $C_c(X)$ 在 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中稠密.

证 显然 $C_c(X) \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. 由于 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中的简单函数在 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中稠密 (见引理 3.4.7), 故为证定理只需证明如下事实: 若 $A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$, 则有 $f \in C_c(X)$, 使 $\|I_A - f\|_p$ 任意小. 为此, 设 $\varepsilon > 0$, 由 μ 的外正则性, 先取开集 $U \supset A$, 使 $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$, 再由定理 5.3.5, 取一紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(K) > \mu(A) - \varepsilon$. 由命题 5.1.20(2), 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \le f \le I_U$, 则 $|I_A - f| \le I_U - I_K$, 故有

$$\|I_A - f\|_p \le \|I_U - I_K\|_p = \mu(U - K)^{\frac{1}{p}} < (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

定理得证.

下一定理称为 **Lusin 定理**.

5.5.2 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一正则测度，f 为 X 上的一 $\mathcal{A}$ 可测实值函数. 如果 $A \in \mathcal{A}$, $0 < \mu(A) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$, 且 f 限于 K 连续. 若进一步，X 为局部紧，则存在 $g \in C_c(X)$, 使 g 与 f 在 K 上一致，且使

$$\sup\{|g(x)| \mid x \in X\} \le \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}. \tag{5.5.1}$$

证 首先设 f 只取可数多个值，即 $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{A_i}$, 其中 $a_i \ne a_j$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \ne j$, 且 $\sum_i A_i = X$. 取正整数 n, 使得 $\mu(A \cap (\sum_{i=1}^{n} A_i)^c) < \varepsilon/2$. 由定理 5.3.5, 存在 $A \cap A_1, \cdots, A \cap A_n$ 的紧子集 $K_1, \cdots, K_n$, 使得 $\sum_{i=1}^{n} \mu((A \cap A_i) \backslash K_i) < \varepsilon/2$. 令 $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$, 则 K 为 A 的紧子集，且有

$$\begin{aligned}\mu(A \backslash K) &= \mu\Big(A \cap (\sum_{i=1}^{n} A_i)^c\Big) + \sum_{i=1}^{n} \mu((A \cap A_i) \backslash K_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 f 限于每个 K_i 为常数, 从而 f 限于 K 为连续 (见习题 5.1.1).

现设 f 为任一实值 $\mathcal{A}$ 可测函数，令

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n}, \quad 若 \ \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

由前所证，对每个 $n \ge 1$, 存在紧集 $K_n \subset A$, 使 $\mu(A \backslash K_n) < \varepsilon/2^n$, 且 f_n 限于 K_n 为连续. 令 $K = \bigcap_n K_n$, 则由于 f 是 (f_n) 的一致极限，故 f 限于 K 连续，此外有

$$\mu(A \backslash K) \le \sum_n \mu(A \backslash K_n) < \varepsilon.$$

最后证明定理的第二部分. 假定 X 为局部紧 Hausdorff 空间，令 $X^{\Delta} = X \cup \{\Delta\}$ 为 X 的单点紧化，则 X^{Δ} 是正规空间 (见命题 5.1.19). 故由 Tietze 扩张定理，存在 X^{Δ} 上的连续函数 h^*, 使 h^* 在 K 上与 f 一致，且使 $\sup\{|h^*(x)| \mid x \in X\} = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$. 取 $p \in C_c(X)$, 使得 $I_K \le p \le 1$(见命题 5.1.20(2)), 并令 $g = ph$, 其中 h 为 h^* 在 X 上的限制，则 $g \in C_c(X)$, g 与 f 在 K 上一致，且使 (5.5.1) 式成立. 证毕.

习 题

5.5.1 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一有限正则测度，f 为 X 上的一实值函数. 则下列三断言等价:

(1) f 为 $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ 可测 (即 $\overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$ 可测，见习题 5.3.2);

(2) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(A \backslash K) < \varepsilon$, 且 f 限于 K 连续;

(3) 存在 X 的划分： $X=(\sum_n K_n)\cup N$, 其中每个 K_n 为紧集， N 为 μ 零测集，使得 f 限于每个 K_n 为连续函数.

5.5.2 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的实函数，且对一切 $a,b\in\mathbf{R}$, 有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$. 试证： (1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续当且仅当它在一点连续； (2) 若 f 为 Lebesgue 可测，则 f 连续. （提示：利用 Lusin 定理.）

5.6 乘积拓扑空间上的测度与积分

本节研究的中心问题是: 给定两个局部紧 Hausdorff 空间 X 和 Y 及其上的两个 Radon 测度 μ 和 ν, 如何在乘积拓扑空间 $X\times Y$ 上构造一 Radon 测度 $\mu\times\nu$, 使其在 X 及 Y 上的边缘测度分别是 μ 及 ν? 进一步，是否有相应的 Fubini 定理？这里遇到的困难是: μ 及 ν 一般并非 σ 有限，且 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$ 一般严格比 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 小. 因此，第四章的结果不再适用. 为了克服这一困难，我们将求助于 Riesz 表现定理.

下面首先研究拓扑空间的乘积.

5.6.1 定义 设 $(X_1,\mathcal{G}_1),\cdots,(X_n,\mathcal{G}_n)$ 为拓扑空间，令 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$,

$$\mathcal{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathcal{G}_i,\ i=1,2,\cdots,n\},$$

则 $\mathcal{B}$ 对有限交运算封闭. 以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑 $\mathcal{G}$ 称为 X 的**乘积拓扑**; $(X,\mathcal{G})$ 称为 $(X_1,\mathcal{G}_1),\cdots,(X_n,\mathcal{G}_n)$ 的**乘积拓扑空间**.

令 $\mathcal{B}_0=\{\pi_i^{-1}(U_i)\mid U_i\in\mathcal{G}_i, i=1,2,\cdots,n\}$, 其中 π_i 为 X 到 X_i 的投影映射，则易见 $\mathcal{B}_0$ 为 $\mathcal{G}$ 的子基，且 $\mathcal{G}$ 是使每个投影映射为连续的最小拓扑.

5.6.2 定义 设 $\{(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha),\alpha\in\wedge\}$ 为一族拓扑空间， $X=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$, $\mathcal{G}$ 为 X 上使每个投影映射 π_α 为连续的最小拓扑, 称 $(X,\mathcal{G})$ 为 $(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha),\alpha\in\Lambda$ 的**乘积拓扑空间**.

设 $\mathcal{P}_0$ 为 Λ 的非空有穷子集全体，令

$$\mathcal{B}=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_0}\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}U_i)\mid\ U_i\in\mathcal{G}_i,\ i\in S\},$$

则易知 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的基.

5.6.3 定理 (Tychonoff 定理) 设 $(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha)$ 为一族紧拓扑空间，则其乘积拓扑空间 $(X,\mathcal{G})$ 亦为紧拓扑空间.

关于该定理的证明，读者可以参看任何一本有关点集拓扑的书，这里从略.

下面我们研究乘积拓扑空间上的 Borel σ 代数. 为方便起见，我们只讨论两个拓扑空间乘积情形. 关于集合和函数的截口概念见 4.2 节.

5.6.4 引理 设 X 及 Y 为 Hausdorff 空间， $X\times Y$ 为其乘积拓扑空间 (它也是 Hausdorff 空间).

(1) 我们有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)\subset\mathcal{B}(X\times Y)$. 若 X 及 Y 都有可数基，则 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)=\mathcal{B}(X\times Y)$;

(2) 设 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 则对每个 $x\in X$ 及每个 $y\in Y$, 有 $E_x\in\mathcal{B}(Y),E^y\in\mathcal{B}(X)$. 这里 $E_x=\{y\in Y\mid(x,y)\in E\},E^y=\{x\in X\mid(x,y)\in E\}$;

(3) 设 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 可测函数，则对每个 $x\in X$ 及 $y\in Y,f_x$ 为 Y 上的 $\mathcal{B}(Y)$ 可测函数， f^y 为 X 上的 $\mathcal{B}(X)$ 可测函数. 这里记号 f_x 及 f^y 见定义 4.2.1.

证 (1) 第一部分显然. 现设 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{D}$ 分别为 X 及 Y 的可数基. 令 $\mathcal{H}=\{U\times V\mid U\in\mathcal{C},V\in\mathcal{D}\}$, 则 $\mathcal{H}$ 为 $X\times Y$ 的可数基. 由于 $\mathcal{H}\subset\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$, 且 $X\times Y$ 的每个开集为 $\mathcal{H}$ 中元素的可列并，故有 $\mathcal{B}(X\times Y)\subset\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$. 从而有 $\mathcal{B}(X\times Y)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$.

(2) 设 $x\in X$, 令 $g_x(y)=(x,y)$, 则 g_x 为 Y 到 $X\times Y$ 上的连续函数，从而关于 $\mathcal{B}(Y)$ 及 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 可测. 但 $E_x=g^{-1}(E)$, 故

$E_x \in \mathcal{B}(Y)$. 同理可证 $E^y \in \mathcal{B}(X)$.

(3) 注意: $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x, (f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$, 故 (3) 由 (2) 推得.

下一引理的证明留给读者完成.

5.6.5 引理 设 S 及 T 为拓扑空间, T 为紧空间. 令 f 为 $S \times T$ 上的实值连续函数. 则对任一 $s_0 \in S$ 及任一 $\varepsilon > 0$, 存在 s_0 的一开邻域 U, 使得对一切 $s \in U$ 及一切 $t \in T$, 有 $|f(s,t) - f(s_0,t)| < \varepsilon$.

5.6.6 命题 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间, μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度, 令 $f \in C_c(X \times Y)$, 则:

(1) 对任何 $x \in X, y \in Y$, 有 $f_x \in C_c(Y), f^y \in C_c(X)$;

(2) 函数 $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy)$ 及 $y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx)$ 分别属于 $C_c(X)$ 及 $C_c(Y)$;

(3) $\int_X \int_Y f(x,y)\nu(dy)\mu(dx) = \int_Y \int_X f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

证 (1) 令 $K = \mathrm{supp}(f)$, 设 K_1 及 K_2 分别为 K 在 X 及 Y 上的投影, 则 K_1 及 K_2 为紧集. 显然 f_x 在 Y 上连续, 且 $\mathrm{supp}(f_x) \subset K_2$, 故 $f_x \in C_c(Y)$. 同理 $f^y \in C_c(X)$.

(2) 分别对 $X \times K_2$ 及 $K_1 \times Y$ 应用引理 5.6.5 即可推得 (2) 的结论 (注意 $\nu(K_2) < \infty, \mu(K_1) < \infty$).

(3) 对任给 $\varepsilon > 0$, 由引理 5.6.5 知: 对每个 $x \in K_1$, 存在 x 的开邻域 U_x, 使对一切 $x' \in U_x$ 及一切 $y \in K_2$ 有 $|f(x',y) - f(x,y)| < \varepsilon$. 由于 K_1 为紧集, 故存在 K_1 的有限覆盖 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. 令 $(A_i, 1 \le i \le n)$ 为两两不交的 Borel 集, 使得 $A_i \subset U_{x_i}, 1 \le i \le n$, 且 $\sum_{i=1}^n A_i = K_1$. 令 $g(x,y) = \sum_{i=1}^n f(x_i,y)I_{A_i}(x)$, 则容易验证

$$\int\int g(x,y)\mu(dx)\nu(dy) = \int\int g(x,y)\nu(dy)\mu(dx)$$
$$= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \int f(x_i,y)\nu(dy).$$

此外, f 及 g 在 $K_1 \times K_2$ 的余集上为 0, 且 $|f-g| < \varepsilon$. 于是有

$$\begin{aligned}
&\left|\int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy) - \int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)\right| \\
&\le \left|\int\int (f(x,y) - g(x,y))\mu(dx)\nu(dy)\right| \\
&\quad + \left|\int\int (f(x,y) - g(x,y))\nu(dy)\mu(dx)\right| \\
&\le 2\varepsilon\mu(K_1)\nu(K_2).
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故 (3) 得证.

命题 5.6.6 导致如下的

5.6.7 定义 设 μ 及 ν 分别为局部紧 Hausdorff 空间 X 及 Y 上的 Radon 测度. 由命题 5.6.6(3) 知, 我们可在 $C_c(X \times Y)$ 上定义一正线性泛函 I:

$$I(f) = \int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy) = \int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx).$$

由于 $X \times Y$ 是局部紧 Hausdorff 空间, 故由 Riesz 表现定理知, 有 $X \times Y$ 上唯一的 Radon 测度与 I 对应. 我们称此 Radon 测度为 μ 与 ν 的 **Radon 乘积**, 记为 $\mu \times \nu$.

注 若 X 及 Y 都有可数基, 则 Radon 乘积 $\mu \times \nu$ 即为通常的乘积测度 (见习题 5.6.5).

下面的任务是要证明与 Radon 乘积测度 $\mu \times \nu$ 有关的 Fubini 定理. 为此, 我们需要有关下半连续函数积分的一个结果.

5.6.8 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一 Radon 测度. 设 $\mathcal{H}$ 为一族非负下半连续函数, 使得 $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, 存在 $h \in \mathcal{H}$, 满足 $h \ge h_1 \vee h_2$. 令

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in \mathcal{H}\}, \ x \in X,$$

则 $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu \mid h \in \mathcal{H}\}$.

证 显然对 $h\in\mathcal{H}$ 有 $\int hd\mu\le\int fd\mu$. 为证引理, 只需证: 对任一实数 $a<\int fd\mu$, 存在 $h\in\mathcal{H}$, 使 $a<\int hd\mu$. 为此, 先用简单函数逼近 f. 令 $U_{n,i}=[f>\frac{i}{2^n}]$,

$$f_n=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}I_{U_{n,i}}=\sum_{i=1}^{n2^n-1}\frac{i}{2^n}I_{[\frac{i}{2^n}<f\le\frac{i+1}{2^n}]}+nI_{[f>n]},$$

则 f_n 为 Borel 可测, $f_n\uparrow f$, 故有 $\int f_nd\mu\uparrow\int fd\mu$. 于是存在自然数 N, 使 $\int f_Nd\mu>a$. 由于 $\int f_Nd\mu=\dfrac{1}{2^N}\sum_i\mu(U_{N,i})$, 故由 μ 的正则性, 存在 $U_{N,i}$ 的紧子集 $K_i, i=1,2,\cdots,N2^N$, 使得 $\dfrac{1}{2^N}\sum_i\mu(K_i)>a$. 令 $g=\dfrac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N2^N}I_{K_i}$, 则对每个 $x\in\bigcup_{i=1}^{N2^N}K_i$, 有 $g(x)\le f_N(x)<f(x)$. 于是由 f 的定义, 对每个 $x\in\bigcup_{i=1}^{N2^N}K_i$, 存在 $h_x\in\mathcal{H}$, 使 $g(x)<h_x(x)$. 由于 h_x-g 为下半连续 (见习题 5.6.2), 故存在 x 的一开邻域 U_x, 使对一切 $y\in U_x$, 有 $h_x(y)-g(y)>0$. 现取 $U_{x_1},\cdots,U_{x_m}$, 使 $\bigcup_{i=1}^mU_{x_i}\supset\bigcup_{i=1}^{N2^N}K_i$, 并取 $h\in\mathcal{H}$, 使 $h\ge\bigvee_{i=1}^mh_{x_i}$, 则 $h\ge g$, 从而有

$$a<\frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N2^N}\mu(K_i)=\int gd\mu\le\int hd\mu.$$

引理得证.

5.6.9 命题 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间, μ 及 ν 分别是 X 及 Y 上的 Radon 测度, $\mu\times\nu$ 为其 Radon 乘积. 令 U 为 $X\times Y$ 的开子集, 则:

(1) 函数 $x\mapsto\nu(U_x)$ 及 $y\mapsto\mu(U^y)$ 为下半连续函数;

(2) $(\mu\times\nu)(U)=\int_X\nu(U_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(U^y)\nu(dy)$.

证 (1) 令

$$\mathcal{H}_x=\{f_x\,|\ f\in C_c(X\times Y)\,|\ 0\le f\le I_U\},$$
$$\mathcal{H}^y=\{f^y\,|\ f\in C_c(X\times Y)\,|\ 0\le f\le I_U\},$$

则 $\mathcal{H}_x\subset C_c(Y),\mathcal{H}^y\subset C_c(X)$, 且 $\mathcal{H}_x$ 及 $\mathcal{H}^y$ 满足引理 5.6.8 的条件. 故由引理 5.6.8 得

$$\nu(U_x)=\sup\{\int_Yf_xd\nu\,|\ f_x\in\mathcal{H}_x\},\tag{5.6.1}$$
$$\mu(U^y)=\sup\{\int_Xf^yd\mu\,|\ f^y\in\mathcal{H}^y\}.\tag{5.6.2}$$

但由命题 5.6.6, $x\mapsto\int f_xd\nu$ 及 $y\mapsto\int f^yd\mu$ 是连续函数, 故 $x\mapsto\nu(U_x)$ 及 $y\mapsto\mu(U^y)$ 是下半连续函数.

(2) 令 $\mathcal{H}=\{f\in C_c(X\times Y)\,|\ 0\le f\le I_U\}$, 则相继由习题 5.3.1, 引理 5.6.8 及 (5.6.1) 式得

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(U)&=\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu)\\&=\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_X\int_Yf(x,y)\nu(dy)\mu(dx)\\&=\int_X(\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_Yf_xd\nu)\mu(dx)\\&=\int_X\nu(U_x)\mu(dx).\end{aligned}$$

(2) 的第一部分得证. 同理可证 (2) 的另一半. 证毕.

下一定理是有关 Radon 乘积测度 $\mu\times\nu$ 积分的 **Fubini 定理**.

5.6.10 定理 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间, μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度, $\mu\times\nu$ 为其 Radon 乘积. 设 $f\in L^1(X\times Y,\mathcal{B}(X\times Y),\mu\times\nu)$, 且存在分别关于 μ 及 ν 为 σ 有限的 Borel 集 X_0 及 Y_0, 使 f 在 $X_0\times Y_0$ 的余集上为 0, 则:

(1) 对 μ-a.e. x, f_x 为 ν 可积, 对 ν-a.e. y, f^y 为 μ 可积;

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x d\nu, & \text{若} f_x\in L^1(Y,\mathcal{B}(Y),\nu),\\ 0, & \text{其他情形};\end{cases}$$

$$I^f(y)=\begin{cases}\int_X f^y d\mu, & \text{若} f^y\in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu),\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 I_f 为 μ 可积, I^f 为 ν 可积, 且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X I_f(x)\mu(dx)=\int_Y I^f(y)\nu(dy).$$

证 首先假定 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 并假定存在 $A\in\mathcal{B}(X)$, $B\in\mathcal{B}(Y)$, 使 $\mu(A)<\infty,\nu(B)<\infty$, 且 $E\subset A\times B$. 往证:

(a) 函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 及 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 Borel 可测;

(b) $(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy)$.

由 μ 及 ν 的外正则性, 存在开集 $U\supset A$ 及开集 $V\supset B$, 使 $\mu(U)<\infty,\nu(V)<\infty$. 令 $W=U\times V$,

$$\mathcal{S}=\{D\in\mathcal{B}(X\times Y)\mid D\subset W, D \text{ 满足性质 (a) 及 (b)}\},$$

则易见 $\mathcal{S}$ 为 W 上的 λ 类. 另一方面, 由命题 5.6.9, W 的一切开子集属于 $\mathcal{S}$, 故由单调类定理 (定理 1.2.2), $\mathcal{S}=\mathcal{B}(W)=W\cap\mathcal{B}(X)$ (后一等号见习题 1.2.1). 特别 $E\in\mathcal{S}$.

由上所证容易推知: 对 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 假定存在关于 μ 的 σ 有限集 $A\in\mathcal{B}(X)$ 及关于 ν 的 σ 有限集 $B\in\mathcal{B}(Y)$, 使 $E\subset A\times B$, 则 E 满足性质 (a) 及 (b). 于是, 用通常的方法从简单函数过渡到非负可测函数, 即可推得定理的结论. 证毕.

习 题

5.6.1 设 X 为一拓扑空间, A 为 X 的一子集, 则为要 I_A 为下半连续函数 (相应地, 上半连续函数), 必须且只需 A 为开集 (相应地, 闭集).

5.6.2 设 X 为一拓扑空间, f 及 g 为下半连续函数, 则 $f+g$ 为下半连续函数.

5.6.3 设 X,Y,μ,ν 及 $\mu\times\nu$ 如定理 5.6.10. 令 f 为 $X\times Y$ 上的非负下半连续函数, 则:

(1) 函数 $x\mapsto\int f(x,y)\nu(dy)$ 及 $y\mapsto\int f(x,y)\mu(dx)$ 为 Borel 可测;

(2) $\int fd(\mu\times\nu)=\int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)=\int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

5.6.4 设 X 及 Y 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度. 则 μ 及 ν 为 σ 有限测度, $\mathcal{B}(X\times Y)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$, 且 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 上通常意义下的乘积测度 $\mu\times\nu$ 就是 Radon 乘积测度.

5.6.5 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为一列拓扑空间. 若每个 X_n 有可数基, 则 $\mathcal{B}(\prod_n X_n)=\prod_n\mathcal{B}(X_n)$.

5.7 波兰空间上有限测度的正则性

波兰 (Polish) 空间是概率论中经常用到的一类拓扑空间. 本节介绍波兰空间的基本性质, 波兰空间上有限测度的正则性, 以及乘积波兰空间上概率测度族的投影极限. 有关波兰空间的进一步性质可参看 Donald L.Cohn[1], p.251—296.

5.7.1 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间. 如果在 X 上存在与拓扑相容的距离 ρ, 使 (X,ρ) 为一完备可分距离空间, 则称 X 为**波兰空间**.

5.7.2 命题 设 X 为一波兰空间, F 及 U 分别为 X 的非空闭子集和开子集. 则作为 X 的子空间, F 及 U 都是波兰空间.

证 设 ρ 为与拓扑相容的距离, 使 (X,ρ) 为一可分完备距离空间. 显然, 作为 X 的闭子空间, (F,ρ) 为可分且完备的, 故 F 为波兰空间.

下面证明 U 为波兰空间. 为此, 设 U 不等于全空间. 在 U 上

定义 $\rho_0(x,y)$ 如下

$$\rho_0(x,y)=\rho(x,y)+\left|\frac{1}{\rho(x,U^c)}-\frac{1}{\rho(y,U^c)}\right|,$$

其中

$$\rho(x,U^c)=\inf\{\rho(x,z)\mid z\in U^c\}.$$

容易看出：ρ_0 定义了 U 上的一个距离，且 U 中序列 $\{x_n\}$ 按 ρ_0 收敛于 U 中的点 x 等价于 $\{x_n\}$ 按 ρ 收敛于 x. 这表明：距离 ρ_0 与 U 的拓扑相容. 特别，(U,ρ_0) 是可分的.

现证 (U,ρ_0) 是完备距离空间. 设 $\{x_n\}$ 是 U 中序列，且按 ρ_0 为基本列. 依 ρ_0 的定义知，$\{x_n\}$ 按距离 ρ 亦为基本列. 故由 (X,ρ) 的完备性，存在 $x\in X$，使 $\rho(x_n,x)\to 0,\ n\to\infty$. x 必属于 U. 因为否则的话，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,U^c)=0$，这将导致 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}\rho_0(x_n,x_m)=\infty$，这与假定 $\{x_n\}$ 关于 ρ_0 为基本列矛盾. 既然 $x\in U$，则由 $\rho(x_n,x)\to 0$ 推出 $\rho_0(x_n,x)\to 0$，(U,ρ_0) 的完备性得证. 因此，U 为波兰空间. 证毕.

5.7.3 命题 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间是波兰空间.

证 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，令 X^Δ 为其单点紧化，则 X^Δ 为具可数基的紧 Hausdorff 空间. 从而存在 X^Δ 上一与拓扑相容的距离 ρ，使 (X^Δ,ρ) 为可分紧距离空间 (见习题 5.1.11). 但紧距离空间显然是完备的，故 X^Δ 为波兰空间. 由于 X 是 X^Δ 中的开子集，故由命题 5.7.2 知，X 为波兰空间，证毕.

5.7.4 命题 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为波兰空间的有限或可数序列，则其乘积空间 $\prod\limits_n X_n$ 为波兰空间.

证 设 d_n 为 X_n 上的与拓扑相容的距离，使 (X_n,d_n) 为可分完备距离空间. 不妨设对一切 $x,y\in X_n$，有 $d_n(x,y)\le 1$(否则令

$d'_n(x,y)=d_n(x,y)\wedge 1$，则 d'_n 与 d_n 等价，且 (X_n,d'_n) 仍完备). 令

$$d(x,y)=\sum_n\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n),$$

其中 $x,y\in\prod\limits_n X_n$，则易见 d 为 $\prod\limits_n X_n$ 上与拓扑相容的距离，且 $(\prod\limits_n X_n,d)$ 为可分完备距离空间. 因此 $\prod\limits_n X_n$ 为波兰空间. 证毕.

下一命题推广了命题 5.7.2.

5.7.5 命题 设 X 为一波兰空间，Y 为 X 的一子空间，则 Y 为波兰空间，当且仅当它是 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 这里 $\mathcal{G}$ 表示 X 的开子集全体.

证 充分性. 设 $Y=\bigcap_n U_n$，其中每个 U_n 为 X 的开子集. 由于每个 U_n 为波兰空间 (命题 5.7.2)，故 $\prod\limits_n U_n$ 为波兰空间 (命题 5.7.4). 令

$$\Delta=\{u=(u_1,u_2,\cdots)\in\prod_n U_n\mid u_j=u_k,\forall j,k\ge 1\},$$

则 Δ 为 $\prod\limits_n U_n$ 中的闭集，从而为波兰空间 (命题 5.7.2). 令

$$i(y)=(y,y,\cdots),\ y\in\bigcap_n U_n=Y,$$

则 i 为 Y 到 Δ 的同胚映射. 故 Y 是波兰空间.

必要性. 设 Y 为 X 的波兰子空间. 令 d 及 d_0 分别是 X 及 Y 上的与拓扑相容的距离，使 (X,d) 及 (Y,d_0) 为可分完备距离空间. 设 V 为 Y 的子集，我们用 $d_0(V)$ 表示 V 在 d_0 下的直径，即 $d_0(V)=\sup_{x,y\in V}d_0(x,y)$. 令

$$V_n=\bigcup\left\{W\mid W\in\mathcal{G},W\cap Y\ne\emptyset,\ d_0(W\cap Y)\le\frac{1}{n}\right\},\quad n\ge 1,$$

则每个 V_n 为开集. 往证

$$Y=\overline{Y}\cap(\bigcap_n V_n).\tag{5.7.1}$$

由于 d 与 d_0 在 Y 上诱导同一拓扑，故易见 $Y \subset \overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n)$. 再证相反的包含关系. 设 $x \in \overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n)$, 则由 V_n 的定义知，对每个 n, 存在 x 的开邻域 W_n, 使 $W_n \cap Y \neq \emptyset$, 且 $d_0(W_n \cap Y) \leq \frac{1}{n}$. 不妨设 (W_n) 是单调下降的集列. 另一方面，对每个 n, 存在 x 的开邻域 G_n, 使 $d(G_n) \leq \frac{1}{n}$, 不妨设 (G_n) 也是单调下降的. 由于 $x \in \overline{Y}$, 故 $G_n \cap Y \neq \emptyset$. 令 $U_n = W_n \cap G_n$, 则对每个 n, 有

$$x \in U_n,\ U_n \cap Y \neq \emptyset,\ d(U_n) \leq \frac{1}{n},\ d_0(U_n \cap Y) \leq \frac{1}{n}.$$

由于 (Y, d_0) 完备， $U_n \cap Y$ 单调下降，故存在唯一的 $y \in Y$, 使 $\bigcap_n F_n = \{y\}$(Cantor 定理), 这里 F_n 为 $U_n \cap Y$ 在 Y 中的闭包. 另一方面，由于 (X, d) 是完备的， U_n 单调下降，且 $x \in U_n, n \geq 1$, 故 $\bigcap_n \overline{U}_n = \{x\}$. 但显然有 $F_n \subset \overline{U}_n \cap Y$(因后者是 Y 中闭集，且包含 $U_n \cap Y$), 故 $y \in \bigcap_n \overline{U}_n$, 从而 $y = x$, 特别，有 $x \in Y$. 因此，我们证明了 $\overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n) \subset Y$. (5.7.1) 式得证. 由 (5.7.1) 式知： Y 为 $\mathcal{G}_\delta$ 集 (因 $\overline{Y}$ 作为距离空间 X 中的闭集是 $\mathcal{G}_\delta$ 集， $\bigcap_n V_n$ 也是 $\mathcal{G}_\delta$ 集). 证毕.

5.7.6 定理 设 X 为一波兰空间， μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一有限测度，则 μ 为正则的.

证 令 ρ 为 X 上与拓扑相容的距离，使 (X, ρ) 为一可分完备距离空间. 由定理 5.3.6, 为证 μ 的正则性，只需证： $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}. \tag{5.7.2}$$

设 $\{x_n\}$ 为 X 的可数稠子集，令 $B(x, \delta)$ 表示以 x 为球心， δ 为半径的开球. 由于 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \frac{1}{n})$, 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k_n, 使

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j, \frac{1}{n})\Big) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^n},\ n \geq 1.$$

令 K 为全有界集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j, \frac{1}{n})$ 的闭包，则 K 为紧集 (因 (X, ρ) 为完备的). 我们有

$$\mu(K^c) \leq \sum_n \mu\Big(\big(\bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j, \frac{1}{n})\big)^c\Big) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

即有 $\mu(K) > \mu(X) - \varepsilon$. 但 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故 (5.7.2) 式对 $A = X$ 成立. 现设 $A \in \mathcal{B}(X)$, 对任给 $\varepsilon > 0$, 先取紧集 K, 使 $\mu(K^c) < \varepsilon$. 此外，由系 5.3.4 知，存在 A 的闭子集 F, 使 $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$. 令 $K_1 = K \cap F$, 则 K_1 为紧集， $K_1 \subset A$, 且有 $\mu(K_1) > \mu(A) - 2\varepsilon$, 故 (5.7.2) 式得证. 证毕.

注 在定理 5.7.6 中，如果 μ 不有限 (即使有 $\mu(K) < \infty, \forall K \in \mathcal{K}$), 则 μ 不一定正则. 例如，设 X 不是 σ 紧的波兰空间， $\forall B \in \mathcal{B}(X)$, 若 B 为 σ 有界集，令 $\mu(B) = 0$, 否则令 $\mu(B) = \infty$, 则 (5.7.2) 式对 $A = X$ 不成立.

5.7.7 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间. 令 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上有限测度全体， $\bigcap_{\mu \in \mathcal{M}} \overline{\mathcal{B}(X)^\mu}$ 中的集称为**普遍可测集**.

5.7.8 定义 设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可分且可离的可测空间. 如果存在 $\mathbf{R}$ 的一 Borel 可测集 (相应地, 普遍可测集)A, 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(A, \mathcal{B}(A))$ 同构，则称 $(E, \mathcal{E})$ 为 **Lusin 可测空间**(相应地，**Radon 可测空间**).

可以证明：设 A 为一波兰空间 X 的 Borel 可测集 (相应地，普遍可测集), 则 $(A, \mathcal{B}(A))$ 为 Lusin 可测空间 (相应地， Radon 可测空间) (参见 Cohn[1]).

习 题

5.7.1 设 X 为 $\mathbf{R}$ 中无理数全体，则 X 按 $\mathbf{R}$ 诱导出的拓扑为波兰空间.

5.7.2 设 E 为一波兰空间 X 的普遍可测集，则 $\mathcal{B}(E)$ 上的任何有限

测度 μ 为紧测度. 更确切地说, 令 $\mathcal{K}(E)$ 表示含于 E 的全体紧集, 则对任何 $A \in \mathcal{B}(E)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset A, C \in \mathcal{K}(E)\}.$$

5.7.3 设 E 为一波兰空间 X 的 Borel 可测集, 令 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, 则可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 满足定理 4.7.9 的条件.

第 6 章 测度的收敛

本章研究测度序列的收敛, 其中包括欧氏空间上 Borel 测度的收敛, 距离空间上有限测度的弱收敛及局部紧 Hausdorff 空间上 Radon 测度的淡收敛.

6.1 欧氏空间上 Borel 测度的收敛

设 μ 为欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ 上的 Radon 测度. 令 $a \in \mathbf{R}^d$, 若 $\mu(\{a\}) = 0$, 则称 a 为 μ 的**连续点**; 若 $\mu(\{a\}) > 0$, 则称 a 为 **μ 原子**. 显然 μ 原子全体为一至多可数集. 特别, μ 的连续点全体在 $\mathbf{R}^d$ 中稠. 我们用 $C(\mu)$ 表示 μ 的连续点集全体. 设 $a, b \in C(\mu), a < b$, 称 $(a, b]$ 为 μ 的**连续区间**. 我们用 $\mathcal{I}(\mu)$ 表示 μ 的连续区间全体.

6.1.1 定义 设 μ_n 及 μ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的 Radon 测度. 如果 $\forall (a, b] \in \mathcal{I}(\mu)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n((a, b]) = \mu((a, b])$, 则称序列 (μ_n)**淡收敛于**μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ (我们将英文 "vague convergence" 译为淡收敛); 如果进一步还有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbf{R}^d) = \mu(\mathbf{R}^d) < \infty$, 则称 (μ_n)**弱收敛于**μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

下面两个定理分别给出了淡收敛及弱收敛的积分刻画. 这一刻画允许我们将这两个收敛概念推广到一般拓扑空间情形.

6.1.2 定理 为要 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 必须且只需

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu, \quad \forall f \in C_c(\mathbf{R}^d). \tag{6.1.1}$$

这里 $C_c(\mathbf{R}^d)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 上有紧支撑的连续函数全体.

证明 必要性. 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 依淡收敛的定义, 当 $(a, b] \in \mathcal{I}(\mu), f = I_{(a,b]}$ 时 (6.1.1) 式成立. 现设 $f \in C_c(\mathbf{R}^d)$. 取 $(a, b] \in \mathcal{I}(\mu)$,

使 f 的支撑含于 (a,b). 对给定 $\varepsilon>0$, 则易知存在 $\mathbf{R}^d$ 上的简单函数 f_ε, 使得 $[f_\varepsilon\neq 0]\subset(a,b)$, 且为 $\mathcal{I}(\mu)$ 中元素的有限不交并, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^d}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\leq\varepsilon$. 则

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbf{R}^d} fd\mu_n-\int_{\mathbf{R}^d} fd\mu\right| &\leq \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}|f-f_\varepsilon|d\mu_n\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon d\mu_n-\int_{\mathbf{R}^d} f_\varepsilon d\mu\right|+\int_{\mathbf{R}^d}|f_\varepsilon-f|d\mu\\
&\leq 2\varepsilon\mu((a,b]).
\end{aligned}$$

故 (6.1.1) 式成立.

充分性. 设 (6.1.1) 式成立. 令 $(a,b]\in\mathcal{I}(\mu)$. 对给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\in\mathbf{R}^d,\delta>0$, 使得 $\mu(U)<\varepsilon$, 此处

$$U=(a-\delta,a+\delta)\cup(b-\delta,b+\delta).$$

令 $g=I_{(a,b]}$. 易知存在 $g_1,g_2\in C_c(\mathbf{R}^d)$, 使得 $g_1\leq g\leq g_2$, $g_2-g_1\leq I_U$. 我们有

$$\int g_1d\mu\leftarrow\int g_1d\mu_n\leq\mu_n((a,b])\leq\int g_2d\mu_n\to\int g_2d\mu$$

$$\int g_1d\mu\leq\mu((a,b])\leq\int g_2d\mu$$

$$\int(g_2-g_1)d\mu\leq\mu(U)<\varepsilon,$$

故有 $\mu_n((a,b])\to\mu((a,b])$, 即 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$.

6.1.3 定理 假定 $\sup\limits_n\mu_n(\mathbf{R}^d)<\infty,\mu(\mathbf{R}^d)<\infty$. 为要 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$, 必须且只需

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} fd\mu_n=\int_{\mathbf{R}^d} fd\mu,\quad\forall f\in C_b(\mathbf{R}^d). \tag{6.1.2}$$

证明 由于 $\mathbf{R}^d$ 上常值函数 1 属于 $C_b(\mathbf{R}^d)$, 且 $C_c(\mathbf{R}^d)\subset C_b(\mathbf{R}^d)$, 故条件的充分性显然. 往证必要性. 设 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$. 对给定 $\varepsilon>0$, 存在 $(a,b]\in\mathcal{I}(\mu)$, 使得 $\mu((a,b]^c)<\varepsilon$. 由于 $\mu_n((a,b])\to\mu((a,b])$, 且 $\mu_n(\mathbf{R}^d)\to\mu(\mathbf{R}^d)$, 故存在 $n_0(\varepsilon)$, 使得 $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$, 有 $\mu_n((a,b]^c)<\varepsilon$. 现设 $f\in C_b(\mathbf{R}^d)$, $|f|\leq M<\infty$. 显然存在 $f_\varepsilon\in C_c(\mathbf{R}^d)$, 使得 f_ε 在 $(a,b]$ 上等于 f, 且 $|f-f_\varepsilon|\leq 2M$. 由定理 6.1.2 知, (6.1.2) 式对 f_ε 成立, 故有

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right| &\leq \limsup_{n\to\infty}\int|f-f_\varepsilon|d\mu_n\\
&\quad+\limsup_{n\to\infty}\left|\int f_\varepsilon d\mu_n-\int f_\varepsilon d\mu\right|+\int|f-f_\varepsilon|d\mu\\
&\leq 4M\varepsilon,
\end{aligned}$$

这表明 (6.1.2) 式成立.

下一结果是 **Helly 定理**.

6.1.4 定理 设 (μ_n) 为 $\mathbf{R}^d$ 上一列有限 Borel 测度, $\sup\limits_n\mu_n(\mathbf{R}^d)<\infty$, 则存在 (μ_n) 的一子列 (μ_{n_k}), 使得 $\mu_{n_k}\xrightarrow{v}$ 某 μ.

证明 $\forall x\in\mathbf{R}^d$, 令

$$F_n(x)=\mu_n((-\infty,x]). \tag{6.1.3}$$

任取 $\mathbf{R}^d$ 中一可数稠子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$. 由对角线原理, 可选取 (F_n) 的一子列 (F_{n_k}), 使得 $\forall m\geq 1,\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x_m)$ 存在, 记为 $G(x_m)$. 令

$$F(x)=\inf\{G(x_m)\mid x_m>x\},$$

则 F 为 $\mathbf{R}^d$ 上的右连续增函数. 容易证明: 对 F 的一切连续点 x, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x)=F(x)$. 令 μ 为由 F 产生的 $\mathbf{R}^d$ 上的测度 (见 1.5 节), 则显然有 $\mu_{n_k}\xrightarrow{v}\mu$. 证毕.

6.1.5 注 设 (μ_n) 为 $\mathbf{R}^d$ 上一列概率测度, (F_n) 为由 (6.1.3) 式定义的 $\mathbf{R}^d$ 上的右连续增函数 (称为 μ_n 的**分布函数**). 则 (μ_n) 淡

收敛于某测度 μ(μ 不一定是概率测度) 等价于相应的分布函数序列 (F_n)**弱收敛** 于某一右连续增函数 F ($F(x)$ 不一定等于 $\mu((-\infty,x])$); (μ_n) 弱收敛于某概率测度 μ 等价于 (F_n)**全收敛于**F(这时 F 是 μ 的分布函数).

下面的例子表明 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ 不蕴含 $F_n \xrightarrow{w} F$, 其中 $F_n(x) = \mu_n((-\infty,x]), F(x) = \mu((-\infty,x])$. 令 μ_n 为 $\mathbf{R}$ 上负荷于 $\{-n\}$ 的概率测度, 则 (μ_n) 淡收敛于零测度 μ, 但是有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$, 而 $F(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

习　题

6.1.1 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 且 $\sup\limits_n \mu_n(\mathbf{R}^d) < \infty$, 则 $\forall f \in C_0(\mathbf{R}^d)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu.$$

这里 $C_0(\mathbf{R}^d)$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 上在无穷远处为 0 的连续函数全体.

6.1.2 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu, (a,b] \in \mathcal{I}(\mu)$. 则对 $\mathbf{R}^d$ 上一切连续函数 f 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f d\mu_n = \int_a^b f d\mu.$$

6.2 距离空间上有限测度的弱收敛

设 X 为一距离空间 (或可距离化的拓扑空间), $C_b(X)$ 表示 X 上有界连续函数全体. 由定理 6.1.3 我们自然引进如下的定义:

6.2.1 定义　设 (X,ρ) 为一距离空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度. 如果对一切 $f \in C_b(X)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu,$$

则称 (μ_n)**弱收敛于**μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

显然, 弱收敛的极限是唯一的. 此外, 由于 $C_b(X)$ 只与 X 的拓扑有关, 所以测度弱收敛概念并不依赖于距离的选取.

下一引理允许我们将有限测度的弱收敛归结为概率测度的弱收敛, 其证明是不足道的.

6.2.2 引理　设 (X,ρ) 为一距离空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度. 令

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}, \quad P_n(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_n(X)}, \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

则下列二断言等价:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

(2) $P_n \xrightarrow{w} P, \mu_n(X) \to \mu(X)$.

6.2.3 定义　设 X 为一拓扑空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一测度, $A \in \mathcal{B}(X)$. 若 $\mu(\partial A) = 0(\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$ 为 A 的边界), 则称 A 为 **μ连续集**.

下一定理给出了测度弱收敛的若干刻画.

6.2.4 定理　(X,ρ) 为一距离空间, $\mathcal{U}_\rho(X)$ 表示 X 上关于 ρ 一致连续的有界函数全体 (从而有 $\mathcal{U}_\rho(X) \subset C_b(X)$). 令 $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度, 则下列条件等价:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

(2) $\forall f \in \mathcal{U}_\rho(X), \lim\limits_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$;

(3) $\forall$ 闭集 F, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$;

(4) $\forall$ 开集 G, $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$;

(5) 对任何 μ 连续集 $A \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

证　(1)⇒(2) 显然. 往证 (2)⇒(3). 假设 (2) 成立. 设 F 为闭集, 令 $f_n(x) = \left(\frac{1}{1+\rho(x,F)}\right)^n, n \ge 1$, 则 $f_n \in \mathcal{U}_\rho(X)$, 且 $f_n \downarrow I_F$, 故

有

$$\mu(F)=\lim_{k\to\infty}\int f_k d\mu=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int f_k d\mu_n\geq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F).$$

此外，令 $f\equiv 1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$, 故 (3) 成立． (3)⇔(4) 显然． (3)+(4)⇒(5) 由下式看出：

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)&\leq\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{A})\leq\mu(\overline{A})=\mu(A^\circ)\\&\leq\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A^\circ)\leq\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A).\end{aligned}$$

剩下只需证 (5)⇒(1)．设 (5) 成立．令 $f\in C_b(X)$, 给定 $\varepsilon>0$, 选取 N 及实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{N-1}$, 使得

$$-\|f\|-1=a_0<a_1<\cdots<a_{N-1}<a_N=\|f\|+1,$$

且使 $\sup_i(a_i-a_{i-1})<\varepsilon$ 及 $\mu([f=a_i])=0, 1\leq i\leq N-1$．这里 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$．令 $B_i=[a_{i-1}\leq f(x)<a_i], i=1,2,\cdots,N$．则 (B_i) 两两不相交，且 $\sum_i B_i=X, \mu(\partial B_i)=0, 1\leq i\leq N$. 此外，对一切 $x\in X$, 有 $|f(x)-\sum\limits_{i=1}^N a_iI_{B_i}(x)|<\varepsilon$．于是

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|\\&\leq\lim_{n\to\infty}(\mu_n(X)+\mu(X))\varepsilon+\limsup_{n\to\infty}\left|\int\sum_{i=1}^N a_iI_{B_i}d(\mu_n-\mu)\right|\\&\leq 2\mu(X)\varepsilon+\sum_{i=1}^N|a_i|\limsup_{n\to\infty}|\mu_n(B_i)-\mu(B_i)|=2\mu(X)\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故 (1) 成立．定理得证．

从现在起，我们只讨论概率测度的弱收敛．

6.2.5 引理 设 h 为距离空间 (X,ρ) 到另一距离空间 (Y,d) 中的映射，令 $D(h)$ 表示 h 的不连续点全体，则 $D(h)$ 为 X 中的 Borel 可测集．

证 $\forall n,m\geq 1$, 令

$$\begin{aligned}A_{n,m}=\Big\{x\in X\mid &\text{存在}\, y,z\in X,\ \text{使}\,\rho(x,y)<\frac{1}{n},\\&\rho(x,z)<\frac{1}{n}, d(h(y),h(z))\geq\frac{1}{m}\Big\},\end{aligned}$$

则 $A_{n,m}$ 为 X 的开子集．显然有 $D(h)=\bigcup_m\bigcap_n A_{n,m}$, 故 $D(h)$ 为 X 中的 Borel 可测集．

6.2.6 定义 设 (X,ρ) 为一距离空间， P 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一概率测度， h 为 (X,ρ) 到另一距离空间 (Y,d) 的映射．如果 $P(D(h))=0$, 则称 h 为 ***P* 连续的**．

6.2.7 命题 设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个距离空间， $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度， h 为 X 到 Y 中的 Borel 可测映射．如果 $P_n\xrightarrow{w}P$ 且 h 为 P 连续的，则有 $P_nh^{-1}\xrightarrow{w}Ph^{-1}$. 这里 Ph^{-1} 为由 h 在 $(Y,\mathcal{B}(Y))$ 上导出的概率测度．

证 设 F 为 Y 中的闭集，则有

$$\overline{h^{-1}(F)}\subset D(h)\cup h^{-1}(F).\tag{6.2.1}$$

于是由假定 $P(D(h))=0$ 知 $P(\overline{h^{-1}(F)})=P(h^{-1}(F))$．再由假定 $P_n\xrightarrow{w}P$ 及定理 6.2.4 知：

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}P_nh^{-1}(F)&=\limsup_{n\to\infty}P_n(h^{-1}(F))\\&\leq\limsup_{n\to\infty}P_n(\overline{h^{-1}(F)})\leq P(\overline{h^{-1}(F)})\\&=P(h^{-1}(F))=Ph^{-1}(F).\end{aligned}$$

这表明 $P_nh^{-1}\xrightarrow{w}Ph^{-1}$(见定理 6.2.4)．证毕．

下一命题是上一命题的重要推论，它使我们对测度的弱收敛有了更进一步的认识．

6.2.8 命题 设 (X,ρ) 为一距离空间， $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度．若 $P_n\xrightarrow{w}P$, 则对一切 P 连续的有界 Borel 可测实

值函数 f, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int fdP_n=\int fdP.$$

证 设 f 为 X 上的有界 Borel 可测函数，则存在 $a>0$, 使 $|f|\le a$, 于是 f 为 $(X,\mathcal{B}(X))$ 到 $([-a,a],\mathcal{B}([-a,a]))$ 中的可测映射. 假定 f 为 P 连续，则由命题 6.2.7, $P_nf^{-1}\overset{w}{\to}Pf^{-1}$. 令 $g(t)=t,t\in[-a,a]$, 则 g 为 $[-a,a]$ 上的有界连续函数. 故由弱收敛定义知

$$\lim_{n\to\infty}\int gd(P_nf^{-1})=\int gd(Pf^{-1}).$$

因此，由习题 3.1.6 知 (注意 $g\circ f=f$)

$$\lim_{n\to\infty}\int fdP_n=\int fdP.$$

习 题

6.2.1 证明命题 6.2.7 的如下推广：设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个距离空间，$P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度，且 $P_n\overset{w}{\to}P$. 又设 $h,h_1,h_2,\cdots$ 为 X 到 Y 中的 Borel 可测映射，如果存在 X 中的 Borel 可测集 $B,B_1,B_2,\cdots$, 使得：

(1) $P(B^c)=0,P_n(B_n^c)=0,n=1,2,\cdots$

(2) $x_n\in B_n,x\in B,\rho(x_n,x)\to 0\Rightarrow h_n(x_n)\to h(x)$,

则 $P_nh_n^{-1}\overset{w}{\to}Ph^{-1}$.

6.2.2 证明 (6.2.1) 式.

6.2.3 设 (X,ρ) 为距离空间，A 为 X 的一子集，P 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一概率测度，则为要 A 为 P 连续，必须且只需 A 的示性函数 I_A 为 P 连续函数.

6.3 胎紧与 Prohorov 定理

在本节中，我们恒假定 (X,ρ) 为可分距离空间. 我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上概率测度全体，这时，我们可以在 $\mathcal{P}(X)$ 上引入距离 d, 使得按距离 d 收敛等价于上一节定义的测度弱收敛. 本节的主要任务在于给出 $(\mathcal{P}(X),d)$ 中相对紧集的一个刻画.

6.3.1 命题 在 $\mathcal{P}(X)$ 上可以引入距离 d, 使得 $P_n\overset{w}{\to}P\Leftrightarrow d(P_n,P)\to 0$.

证 由于 (X,ρ) 是可分距离空间，由 Tychonoff 嵌入定理，X 与一紧距离空间 (Y,ρ') 的某一子空间同胚. 我们不妨设 X 为该子空间，于是距离 ρ' 限于 X 与 ρ 等价. 令 $\overline{X}$ 为 X 在 (Y,ρ') 中的闭包，则 $(\overline{X},\rho')$ 为紧空间，且为可分的，从而 $C(\overline{X})$ 为可分 Banach 空间 (见习题 5.4.1). 这里 $C(\overline{X})$ 表示 $\overline{X}$ 上连续函数全体 (即有界连续函数全体). 另一方面，令 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 表示 X 上按距离 ρ' 一致连续有界函数全体，则易知：$f\in\mathcal{U}_{\rho'}(X)$, 当且仅当存在 $\overline{f}\in C(\overline{X})$, 使 f 为 $\overline{f}$ 在 X 上的限制. 这时还有 $\|f\|=\|\overline{f}\|$, 因此 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 与 $C(\overline{X})$ 同构，从而 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 可分. 令 $\{f_1,f_2,\cdots\}$ 为 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 的可数稠子集. 对 $P,Q\in\mathcal{P}(X)$, 令

$$d(P,Q)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\left(1\wedge\left|\int f_jdP-\int f_jdQ\right|\right),$$

则 d 为 $\mathcal{P}(X)$ 上的距离，且由定理 6.2.4 知 $d(P_n,P)\to 0\Leftrightarrow P_n\overset{w}{\to}P$. 证毕.

6.3.2 注 若 X 为一波兰空间，则可证明 $\mathcal{P}(X)$ 按测度弱收敛拓扑也是波兰空间. 由于下面不需要这一结果，我们不在这里给出它的证明.

设 $\wedge$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的一子集，称 $\wedge$ 为**相对紧的**, 如果 $\wedge$ 的闭包 $\overline{\wedge}$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 中的紧集. 下面我们将给出 $\mathcal{P}(X)$ 中相对紧集的刻画. 为

此，先引进胎紧的概念.

6.3.3 定义 设 $\wedge$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的一子集，如果对任给 $\varepsilon>0$, 存在 X 的一紧子集 K, 使得 $\inf\{P(K):P\in\wedge\}\geq 1-\varepsilon$, 则称 $\wedge$ 为**胎紧的 (tight)**.

6.3.4 定理 (Prohorov 定理) 设 $\wedge\subset\mathcal{P}(X)$.

(1) 若 $\wedge$ 是胎紧的，则 $\wedge$ 在 $\mathcal{P}(X)$ 中是相对紧的.

(2) 若 X 是波兰空间，则 $\wedge$ 的相对紧性蕴含 $\wedge$ 的胎紧性.

证 (1) 首先，将 X 嵌入到一紧距离空间 (Y,ρ') 中，并令 $\overline{X}$ 为 X 在 (Y,ρ') 中的闭包 (见命题 6.3.1 的证明), 则 $(\overline{X},\rho')$ 为紧空间. 现设 $\wedge$ 为胎紧的，令 (P_n) 为 $\wedge$ 中的一序列，要证存在子列 (P_{n_k}), 使 $P_{n_k}\overset{w}{\to}$ 某 P (这等价于 $\wedge$ 的相对紧性，因为 $\mathcal{P}(X)$ 是可分距离空间). 对 $A\in\mathcal{B}(\overline{X})$, 令

$$Q_n(A)=P_n(A\cap X),$$

则易知 Q_n 为 $(\overline{X},\mathcal{B}(\overline{X}))$ 上的测度 (注意 $\mathcal{B}(X)=X\cap\mathcal{B}(\overline{X})$). 设 $\{f_1,f_2,\cdots\}$ 为 $C(\overline{X})$ 的一可数稠子集，我们不妨设 $f_1(x)=1,\forall x\in\overline{X}$. 用对角线法则，可选取 (Q_n) 的子列 (Q_{n_k}), 使得对每个 $j=1,2,\cdots$, 下述极限存在且有穷:

$$\lim_{k\to\infty}\int f_j dQ_{n_k}=l(f_j). \tag{6.3.1}$$

l 可唯一扩张成为 $C(\overline{X})$ 上的一正线性泛函. 由于 $l(1)=1$, 故由 Riesz 表现定理，存在 $Q\in\mathcal{P}(\overline{X})$, 使对一切 $f\in C(\overline{X})$, 有 $Q(f)=l(f)$. 于是由 (6.3.1) 式不难看出， $Q_{n_k}\overset{w}{\to}Q$. 下面我们将证明：存在 $P\in\mathcal{P}(X)$, 使 $P_{n_k}\overset{w}{\to}P$.

由于假定 $\wedge$ 是胎紧的，故对每个 $m=1,2,\cdots$, 存在 X 的紧子集 K_m(从而也是 $\overline{X}$ 的紧子集), 使得 $P_{n_k}(K_m)>1-\frac{1}{m},k=1,2,\cdots$.

显然有 $Q_{n_k}(K_m)=P_{n_k}(K_m)$, 于是有 (注意 $Q_{n_k}\overset{w}{\to}Q$)

$$Q(K_m)\geq\limsup_{k\to\infty}Q_{k_k}(K_m)\geq 1-\frac{1}{m},\ m=1,2,\cdots$$

设 $X_0=\bigcup_m K_m$, 则 $Q(X_0)=1$. 令

$$P(A)=Q(A\cap X_0),\ A\in\mathcal{B}(X),$$

则 $P\in\mathcal{P}(X)$, 且 $P(X_0)=1$. 设 F 为 X 中的闭集，则存在 $\overline{X}$ 中的闭集 A, 使 $F=A\cap X$, 于是我们有

$$\begin{aligned}P(F)&=P(A\cap X)=P(A\cap X_0)=Q(A\cap X_0)=Q(A)\\&\geq\limsup_{k\to\infty}Q_{n_k}(A)=\limsup_{k\to\infty}P_{n_k}(A\cap X)=\limsup_{k\to\infty}P_{n_k}(F).\end{aligned}$$

故由定理 6.2.4 知， $P_{n_k}\overset{w}{\to}P$. (1) 得证.

(2) 不妨设 (X,ρ) 本身是完备的. 设 $\wedge$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的相对紧集. 对任给 $\delta>0$, 因 X 是可分的，故存在可数多个直径为 δ 的开球 $A_1,A_2,\cdots$, 使得 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i=X$. 令 $B_n=\bigcup_{i\leq n}A_i$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 n, 使得 $\inf\{P(B_n):P\in\wedge\}\geq 1-\varepsilon$. 因为如若不然，对每个 n, 存在 $P_n\in\wedge$, 使 $P_n(B_n)<1-\varepsilon$. 由于 (P_n) 的相对紧性，存在子列 (P_{n_k}) 使 $P_{n_k}\overset{w}{\to}P$, 这时有 (注意 B_n 为开集，且 $B_n\uparrow X$)

$$P(B_n)\leq\liminf_{k\to\infty}P_{n_k}(B_n)\leq\liminf_{k\to\infty}P_{n_k}(B_{n_k})\leq 1-\varepsilon.$$

由上式得 $P(X)\leq 1-\varepsilon$, 这不可能. 由上所证，给定 $\varepsilon>0$, 对每个 $k=1,2,\cdots$, 存在有限多个直径为 $1/k$ 的开球 $A_{k1},\cdots,A_{kn_k}$, 使得 $\inf\{P(\bigcup_{i=1}^{n_k}A_{ki}):P\in\wedge\}\geq 1-\varepsilon/2^k$. 如果令 K 为全有界集 $\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{i=1}^{n_k}A_{ki}$ 的闭包，则 K 为紧集 (因 (X,ρ) 是完备的), 且有 $\inf\{P(K)\,|\,P\in\wedge\}\geq 1-\varepsilon$. 依定义， $\wedge$ 是胎紧的. (2) 得证.

习 题

6.3.1 设 $(P_n) \subset \mathcal{P}(X)$. 若 (P_n) 为相对紧的, 且只有唯一的极限点 P, 则 $P_n \xrightarrow{w} P$.

6.4 可分距离空间上概率测度的弱收敛

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, (S, ρ) 为一可分距离空间. Ω 到 S 中的 Borel 可测映射称为 S **值随机元**. 对随机元 X, 令

$$\mu(A) = P(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(S),$$

则 μ 为 $(S, \mathcal{B}(S))$ 上的概率测度. 称 μ 为 X 的**分布**, 记为 $\mathcal{L}(X)$.

6.4.1 定义 设 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n\geq 1}$ 为一列概率空间, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, X_n 及 X 分别为 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ 及 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 S 值随机元, 其分布分别为 μ_n 及 μ. 如果 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 则称 (X_n)**依分布收敛于**X, 记为 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

设 X_n 及 X 都是定义于同一概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 S 值随机元. 如果 $\rho(X_n, X) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, 则称 (X_n) **a.s. 收敛于**X, 记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$; 如果 $\rho(X_n, X) \xrightarrow{\text{P}} 0$, 则称 (X_n)**依概率收敛于** X, 记为 $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.

显然 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. 下一命题表明 $X_n \xrightarrow{\text{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

6.4.2 命题 设 (X_n) 及 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 S 值随机元. 如果 $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, 则对任何 $f \in C_b(S)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|f(X_n) - f(X)|) = 0$. 特别有 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

证明 由定理 2.3.4 及 2.3.5 知: $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, 当且仅当对 (X_n) 的任一子列 $(X_{n'})$ 存在其子列 $(X_{n'_k})$, 使 $X_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$. 于是 $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ 蕴含 $f(X_n) \xrightarrow{\text{P}} f(X)$, $\forall f \in C_b(S)$. 又由于 f 有界, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(|f(X_n) - f(X)|) = 0$. 特别, 令 μ_n 及 μ 分别为 X_n 及 X 的

分布, 则有

$$\mu_n(f) = P(f(X_n)) \to P(f(X)) = \mu(f).$$

这表明 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 即 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. 证毕.

下一定理称为 **Skorohod-Dudley 表现定理**, 它表明可分距离空间上的概率测度的弱收敛可以表现为随机元序列的 a.s. 收敛. 这样一来可以使一些结果的证明变得简单和清晰. 原先结果是 1956 年 Skorohod 在 Theor. Probab. Appls. 1: 261-290 中对波兰空间情形给出的, 下面的一般结果

968 年 Dudley 在 Ann. Math. Statist. 39: 1563-1572 中给出的. 这里的证明取自 Dudley[3].

6.4.3 定理 设 (S, d) 为一可分距离空间, $P, P_1, P_2, \cdots$ 为 $(S, \mathcal{B}(S))$ 上的一列概率测度. 如果 $P_n \xrightarrow{w} P$, 则存在一概率空间及其上的一列 S 值随机元 $X_0, X_1, X_2, \cdots$, 使得 P 为 X_0 的分布, P_n 为 X_n 的分布, 且 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_0$.

证明 由于 S 有可数稠密子集, 且除了至多可数多个 $r > 0$ 外, 开球 $B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$ 为 P 连续集, 故容易证明: 对任一 $m = 1, 2, \cdots$, 我们能够将 S 分为互不相交直径小于 m^{-2} 的 P 连续可测集 $A_{1m}, A_{2m}, \cdots$. 不妨假定对一切 j 和 m, $P(A_{jm}) > 0$. 取 $k(m)$ 足够大, 使得 $P(\bigcup_{i\leq k(m)} A_{im}) > 1 - m^{-2}$. 由定理 6.2.4 知, 对一切 j 和 m, 有 $\lim_{n\to\infty} P_n(A_{jm}) = P(A_{jm})$. 于是可取 n_m 足够大, 使得对一切 $j = 1, \cdots, k(m), n \geq n_m$, 有 $P_n(A_{jm}) > (1 - m^{-2})P(A_{jm})$. 我们可以假定 n_m 严格单调增且趋于 ∞. 对 $n \geq n_1$, 存在唯一的 $m = m(n)$, 使得 $n_m \leq n < n_{m+1}$, 令

$$\eta_n(B) = (1 - m^{-2}) \sum_{1\leq j\leq k(m)} P(A_{jm}) P_n(B|A_{jm}), \ B \in \mathcal{B}(S),$$

其中 $P(B|A) = P(BA)/P(A)$. 又令 $\alpha_n = P_n - \eta_n$, 则 η_n 和 α_n 为

非负测度. 再令 $I=(0,1], S_n=S, \mathcal{F}_n=\mathcal{B}(S), n\geq 0$, 定义

$$\Omega = I\times\prod_{n\geq 0} S_n,\ \mathcal{F}=\mathcal{B}(I)\times\prod_{n\geq 0}\mathcal{F}_n.$$

我们将在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上构造一概率测度 Q, 使得坐标 X_n 的分布为 P_n, X_0 的分布为 P, 且 $d(X_n,X_0)\to 0$, Q-a.s.. 为此, 给空间 $(I,\mathcal{B}(I))$ 和 $(S_0,\mathcal{F}_0)$ 分别赋予 Lebesgue 测度和概率测度 P. 对 $(t,x)\in I\times S_0$, 定义 $(S_n,\mathcal{B}(S_n))$ 上的概率测度如下:

$$\begin{aligned}
&\mu_n(t,x)(\cdot)=P_n,\ \text{如果}\, n<n_1;\\
&\mu_n(t,x)(\cdot)=P_n(\cdot\,|A_{jm(n)}),\ \text{如果}\, t\geq m(n)^{-2},\ x\in A_{jm(n)};\\
&\mu_n(t,x)(\cdot)=\alpha_n/\alpha_n(S),\ \text{其他情形}.
\end{aligned}$$

令 $E=\prod_{n\geq 1}S_n, \mathcal{E}=\prod_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$. 对 $(t,x)\in I\times S_0$, 用 $\mu(t,x,\cdot)$ 表示 $(E,\mathcal{E})$ 上由 $\mu_n(t,x)(\cdot)$ 产生的乘积概率测度, 则 $\mu(t,x,\cdot)$ 为从 $(I\times S_0,\mathcal{B}(I)\times\mathcal{F}_0)$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 上的概

在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上构造一概率测度 Q 如下:

$$Q(W)=\int_I\int_S\int_E I_W(t,x,y)\mu(t,x,dy)P(dx)dt,\quad W\in\mathcal{F}.$$

对 $y=(x_1,x_2,\cdots)\in E$, 令 $X_0(t,x,y)=x$, $X_n(t,x,y)=x_n$, $n\geq 1$. 则当 $n<n_1$ 时, 显然有 $QX_n^{-1}=P_n$. 对 $n\geq n_1$, 由于

$$\alpha_n(S)=1-(1-m^{-2})\sum_{1\leq j\leq k(m)}P(A_{jm}),$$

这里 $m=m(n)$, 我们有

$$\begin{aligned}
QX_n^{-1}(B)&=(1-m^{-2})\sum_{1\leq j\leq k(m)}P(A_{jm})P_n(B|A_{jm})\\
&\quad+(1-m^{-2})\Big(1-\sum_{1\leq j\leq k(m))}P(A_{jm})\alpha_n(B)/\alpha_n(S)\Big)\\
&\quad+m^{-2}\alpha_n(B)/\alpha_n(S)\\
&=\eta_n(B)+\alpha_n(B)=P_n(B).
\end{aligned}$$

令 $B_m=\left(\bigcup_{i\leq k(m)}A_{im}\right)^c$, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty}Q(X_0\in B_m)=\sum_{m=1}^{\infty}P(B_m)\leq\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2}<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理 (见定理 7.1.5(1)) 知, $Q(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty}[X_0\in B_m])=0$, 于是对 Q-a.s. ω, 当 m 充分大, 存在 $j\leq k(m)$ 使得 $X_0(\omega)\in A_{jm}$. 另一方面, 由于当 $n\geq n_1$ 时有

$$\mu_n(t,x)(A_{jm(n)})=1,\ \text{如果}\, t\geq m(n)^{-2}, x\in A_{jm(n)},$$

且 A_{jm} 的直径小于 m^{-2}, 于是当 n 充分大 (这导致 m 充分大), 我们有 $Q(d(X_n,X_0)>m(n)^{-2})\leq m(n)^{-2}$. 从而由定理 2.3.4(1) 知, $X_n\to X_0$, Q-a.s.. 定理证毕.

习 题

6.4.1 设 X_n 为 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的 S 值随机元, $a\in S$. 则 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}a\iff X_n\xrightarrow{P}a$.

6.4.2 设 X_n 及 Y_n 是 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的 S 值随机元, X 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机元. 如果 $\forall\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\rho(X_n,Y_n)\geq\varepsilon)=0$, 则 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X\iff Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

6.4.3 证明命题 6.2.7 的如下推广: 设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个距离空间, $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度, $P_n\xrightarrow{w}P$. 又设 $C\in$

$\mathcal{B}(X)$, $f, f_1, f_2, \cdots$ 为 X 到 Y 中的 Borel 可测映射. 如果 $P(\xi \in C) = 1$, 且对 $s_n \to s \in C$ 有 $f(s_n) \to f(s)$, 则 $P_n f_n^{-1} \xrightarrow{w} P f^{-1}$.

6.5 局部紧 Hausdorff 空间上 Radon 测度的淡收敛

由定理 6.1.2 我们自然引进如下的定义:

6.5.1 定义 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 如果对一切 $f \in C_c(X)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu,$$

则称 (μ_n)**淡收敛于** μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

由 Riesz 表现定理知, 淡收敛的极限是唯一的.

6.5.2 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 如果对一切 $f \in C_c(X)$, 下述极限存在且有穷:

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = l(f), \tag{6.5.1}$$

则存在 $\mathcal{B}(X)$ 上唯一的 Radon 测度 μ, 使得 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

证 l 为 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, 故由 Riesz 表现定理, 存在唯一的 Radon 测度 μ 使 $\forall f \in \mathcal{C}_c(X)$, 有 $l(f) = \mu(f)$. 故由 (6.5.1) 式知 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

6.5.3 引理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一 Radon 测度, 则对任一紧集 K, 存在一包含 K 的 μ 连续紧集.

证 由习题 5.1.9 知, 存在一列紧集 (K_n), 使 $K_n \subset K_{n+1}^\circ$, $n \geq 1$, 且 $X = \bigcup_n K_n$. 于是存在某个 n, 使 $K \subset K_n^\circ$. 令 ρ 为 X 上与拓扑相容的距离 (见习题 5.1.11), 则存在 $\delta > 0$, 使 $\{x \mid \rho(x, K) \leq \delta\} \subset K_n^\circ$. 令 $F_t = \{x \mid \rho(x, K) \leq t\}$, 则 $\partial F_t = \{x \mid \rho(x, K) = t\}$. 由于 $\partial F_t \cap \partial F_s = \emptyset, t \neq s$, 且 $\partial F_t \subset \overset{\circ}{K}_n, 0 < t \leq \delta$, 故存在某 $t_0 \in (0, \delta)$, 使 $\mu(\partial F_{t_0}) = 0$(注意 $\mu(K_n^\circ) = \mu(K_n) < \infty$). 于是 F_{t_0} 为包含 K 的 μ 连续紧集. 证毕.

6.5.4 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 考虑下列命题:

(1) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$;

(2) 对一切紧集 K, 有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$, 对一切相对紧开集 G, 有 $\mu(G) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G)$;

(3) 对一切 μ 连续相对紧 Borel 集 B, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$.

则有 (1)⇒(2)⇒(3). 若 X 具有可数基, 则上述三命题等价.

证 (1)⇒(2). 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, K 为紧集. 对任给 $\varepsilon > 0$, 由 μ 的正则性, 存在开集 $U \supset K$, 使 $\mu(U) < \mu(K) + \varepsilon$. 于是由命题 5.1.20(2), 存在 $f \in C_c(X)$, 使得 $I_K \leq f \leq I_U$. 因此我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) \leq \mu(U) < \mu(K) + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 故有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$. 现设 G 为相对紧开集. 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset G$, 使 $\mu(G) < \mu(K) + \varepsilon$. 取 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \leq f \leq I_G$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \geq \mu(K) > \mu(G) - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故有 $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$.

(2)⇒(3) 由下式看出 (注意 $\overline{B}$ 为紧集, B° 为相对紧开集):

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(B^\circ) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B^\circ) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B).\end{aligned}$$

现在假定 X 为具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间. 为证 (1),(2) 及 (3) 等价, 只需证 (3) ⇒(1). 设 (3) 成立, 令 $f \in C_c(X)$,

由引理 6.5.3, 存在 μ 连续紧集 C, 使 $C \supset \text{supp}(f)$. 令

$$\nu_n(B) = \mu_n(B \cap C),\ \nu(B) = \mu(B \cap C),$$

则对任何 ν 连续集 B, 易知 $B \cap C$ 为 μ 连续集 (注意 $\partial(B \cap C) = \overline{B \cap C} \backslash B^\circ \cap C^\circ \subset \overline{B} \cap C \backslash B^\circ \cap C^\circ \subset (\partial B \cup \partial C) \cap C = (\partial B \cap C) \cup \partial C$), 从而由 (3) 知

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B \cap C) = \mu(B \cap C) = \nu(B).$$

但 X 为可距离化空间, 故由命题 6.2.4 知 $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$. 由于 $\text{supp}(f) \subset C$, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f) = \nu(f) = \mu(f).$$

由于 $f \in C_c(X)$ 是任意的, 故依定义有 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 证毕.

下一命题用弱收敛来刻画淡收敛.

6.5.5 命题 设 X 为一具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间, $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 令 (G_k) 为一列相对紧开集, 使 $G_k \uparrow X$. ((G_k) 的存在性见习题 5.1.9). 任取 $f_k \in C_c(X)$, 使 $I_{G_k} \leq f_k \leq 1$ (见命题 5.1.20(2)). 令 $\nu_{k,n} = f_k.\mu_n$, 则下列二断言等价:

(1) $\mu_n \xrightarrow{v}$ 某 μ;

(2) $\forall k, \nu_{k,n} \xrightarrow{w}$ 某 ν_k, $n \to \infty$.

此外, 这时有 $\nu_k = f_k.\mu$.

证 (1)⇒(2) 显然. 往证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立, 令 $f \in C_c(X)$, 则由于 $\text{supp}(f)$ 为紧集, 故存在某 k_0, 使 $\text{supp}(f) \subset G_{k_0}$. 又由于 $I_{G_{k_0}} \leq f_{k_0} \leq 1$, 故有 $f G_{k_0} = f$. 因此, 下述极限存在且有穷:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f f_{k_0}) = \lim_{n\to\infty} \nu_{k_0,n}(f),$$

故由命题 6.5.2 知, (μ_n) 淡收敛于某 Radon 测度 μ. 命题最后一断言显然. 证毕.

作为命题 6.5.5 的一个重要推论, 我们得到一族 Radon 测度关于淡收敛拓扑为相对紧的准则.

6.5.6 定理 设 X 为一具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间, M 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一族 Radon 测度. 则为要 M 关于淡收敛拓扑为相对紧的 (即 M 中的任一序列有淡收敛子列), 必须且只需对任何紧集 K, 有 $\sup_{\mu\in M} \mu(K) < \infty$.

证 由定理 6.5.4 知, 条件的必要性显然. 现证充分性. 设对任何紧集 K, 有 $\sup_{\mu\in M} \mu(K) < \infty$. 令 (G_k) 为一列相对紧开集, $G_k \uparrow X$, $(f_k) \subset C_c(X)$, 使 $I_{G_k} \leq f_k \leq 1$, $k \geq 1$. 对 $\mu \in M$, 令 $\widetilde{\mu}_k = f_k.\mu$. 则对每个 k 及 $\mu \in M, \widetilde{\mu}_k$ 在紧集 $\text{supp}(f_k)$ 的余集上为 0. 又由于 $\sup_{\mu\in M} \widetilde{\mu}_k(X) < \infty$, 故由 Prohorov 定理 (定理 6.3.4) 易知: 每个 $\widetilde{M}_k = \{\widetilde{\mu}_k \mid \mu \in M\}$ 按弱收敛拓扑是相对紧的 (参见引理 6.2.2). 现设 (μ_n) 为 M 中的一序列, 则用对角线法则, 可选 (μ_n) 的一子列 (μ_{n_j}), 使得 $\forall k \geq 1, f_k.\mu_{n_j} \xrightarrow{w}$ 某μ_k, $j \to \infty$. 故由命题 6.5.5 知 $\mu_{n_j} \xrightarrow{w}$ 某 μ. 这表明 M 按淡收敛相对紧. 证毕.

为了进一步研究 Radon 测度的淡收敛, 我们需要下述引理.

6.5.7 引理 设 X 为一具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 令 B 为一紧集 (相应地, 开集). 则存在紧集 (相应地, 相对紧开集)B_n, 及 $f_n \in C_c(X), n \geq 1$, 使得

$$I_B \leq f_n \leq I_{B_n} \downarrow I_B (\text{相应地}, I_B \geq f_n \geq I_{B_n} \uparrow I_B).$$

证 由习题 5.1.9, 存在相对紧开集序列 $(G_n, n \geq 1)$, 使 $G_n \uparrow X$. 设 B 为紧集, 则存在某 n_0, 使 $B \subset G_{n_0}$. 任取 X 上与拓扑相容的距离 ρ, 令

$$B^\varepsilon = \{x \mid \rho(x, B) \leq \varepsilon\},$$

则当 $\varepsilon > 0$ 足够小，有 $B^{\varepsilon} \subset G_{n_0}$. 记 $B_n = B^{\frac{\varepsilon}{n}}, n \geq 1$, 令

$$f_n(x) = 1 - \frac{n}{\varepsilon}(\rho(x,B) \wedge \frac{\varepsilon}{n}),$$

则 $f_n \in C_c(X), I_B \leq f_n \leq I_{B_n} \downarrow I_B$. 对相对紧开集 B, 类似可证引理结论. 对一般开集 B, 可考虑相对紧开集 G_n. 我们将证明细节留给读者.

下一定理表明：淡收敛拓扑是可以距离化的.

6.5.8 定理 设 X 为一具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间，令 $\mathcal{R}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上 Radon 测度全体，则 $\mathcal{R}$ 按淡收敛拓扑为波兰空间.

证 设 $\mathcal{C}$ 为 X 的可数基, 不妨设 $\mathcal{C}$ 对有限并闭, 且 $\mathcal{C}$ 中的元为相对紧的. 由引理 6.5.7, 对 $C \in \mathcal{C}$, 存在 $g_n \in C_c(X)$, 使 $0 \leq g_n \uparrow I_C$. 由于 $\mathcal{C}$ 中元素是可数的, 我们可以把相应于所有 $C \in \mathcal{C}$ 的序列 (g_n) 合并排列为 $f_1, f_2, \cdots$, 则 Radon 测度 μ 显然由 $\{\mu(f_k), k = 1, 2, \cdots\}$ 唯一决定，因后者决定了 μ 在 $\mathcal{C}$ 上的值.

由定理 6.5.6 容易证明： $\mu_n \xrightarrow{v}$ 某 μ, 当且仅当对一切 $k \geq 1, \mu_n(f_k)$ 收敛于某实数 c_k. 于是若令

$$d(\mu,\mu') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\Big[1 - \exp\{-|\mu(f_k) - \mu'(f_k)|\}\Big], \ \mu, \mu' \in \mathcal{R},$$

则 d 为 $\mathcal{R}$ 上的距离，且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$. 此外，容易验证 $(\mathcal{R}, d)$ 为可分完备距离空间. 证毕.

习 题

6.5.1 补足引理 6.5.7 及定理 6.5.8 的证明细节.

6.5.2 设 X 为一具有可数基局部紧 Hausdorff 空间， $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度, 且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 则对任何有紧支撑的 μ 连续有界 Borel 可测函数 f, 有 $\mu_n(f) \to \mu(f)$.(提示：利用命题 6.5.5 及命题 6.2.8.)

6.5.3 设 X 为一具有可数基局部紧 Hausdorff 空间， $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度 (从而为 Radon 测度), 则下列断言等价:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

(2) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 且 $\mu_n(X) \to \mu(X)$;

(3) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, $\inf\{\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(K^c) \,|\, K\text{为紧集}\} = 0$.

第 7 章　概率论基础选讲

由于本书不是一部概率论教材，我们不打算系统介绍概率论的内容. 本章着重介绍与测度论有关的一些重要概率论基础问题.

7.1　事件和随机变量的独立性，0-1 律

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间. 在概率论中，我们称 $\mathcal{F}$ 中的元为 (**随机**) **事件**, 称 Ω 为**必然事件**, Ω 上的 $\mathcal{F}$ 可测函数称为**随机变量**. 设 ξ 为一随机变量，若 ξ 关于 P 的积分存在，则称积分 $\int_\Omega \xi dP$ 为 ξ 的**数学期望**, 记为 $E[\xi]$. 概率为 1 成立的性质称为**几乎必然**成立，简称为 a.s. 成立.

事件的独立性概念是概率论的最重要的概念之一.

7.1.1 定义　设 A, B 为二事件，如果 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, 称 A 与 B **独立**. 更一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，如果对任何 $m \leq n$ 及 $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leq n$, 有

$$P(\bigcap_{j=1}^{m} A_{k_j}) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{k_j}),$$

称 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 相互独立. 注意：$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 两两独立不一定相互独立.

7.1.2 定义　设 $\mathcal{D} = \{A_t, t \in T\}$ 为一族事件. 如果对 T 的任何非空有限子集 S, 有 $P(\bigcap_{s \in S} A_s) = \prod_{s \in S} P(A_s)$, 则称 $\mathcal{D}$ 中事件相互独立. 设 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为一族事件类，如果从每个事件类 $\mathcal{C}_t$ 中任取一事件 A_t, $\{A_t, t \in T\}$ 中事件相互独立，则称 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为**独立** (**事件**) **类**. 设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为一族随机变量. 若 $\{\sigma(\xi_t), t \in T\}$ 为独立事件类，则称 $\{\xi_t, t \in T\}$ **相互独立**.

7.1.3 定理(独立类的扩张)　设 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为一独立事件类，如果每个 $\mathcal{C}_t$ 为 π 类，则 $\{\sigma(\mathcal{C}_t), t \in T\}$ 为独立事件类.

证　不妨设 Ω 属于每个 $\mathcal{C}_t$(因为添加必然事件 Ω 不影响独立性). 设 $n \geq 2, S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ 为 T 的有限子集，令

$$\mathcal{D} = \left\{ A \in \mathcal{F} \,\middle|\, P(A \cap \bigcap_{j=2}^{n} C_j) = P(A) \cdot \prod_{j=2}^{n} P(C_j), C_j \in \mathcal{C}_{s_j}, 2 \leq j \leq n \right\},$$

则 $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}_{s_1}$, $\mathcal{D}$ 为 λ 类，故由单调类定理知 $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{C}_{s_1})$. 这表明 $\{\sigma(\mathcal{C}_{s_1}), \mathcal{C}_{s_2}, \cdots, \mathcal{C}_{s_n}\}$为独立事件类. 依此类推，$\{\sigma(\mathcal{C}_{s_1}), \cdots, \sigma(\mathcal{C}_{s_n})\}$ 为独立事件类. 由于 S 为 T 的任意非空有限子集，故 $\{\sigma(\mathcal{C}_t), t \in T\}$ 为独立事件类. 证毕.

下一命题给出了随机变量相互独立性的判别准则.

7.1.4 命题　设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为一族随机变量，则为要它们相互独立，必须且只需对 T 的任一有限子集 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$, 及 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$, 有

$$P(\xi_{s_1} \leq x_1, \cdots, \xi_{s_n} \leq x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_{s_j} \leq x_j).$$

证　令 $\mathcal{C}_t = \{[\xi_t \leq x], x \in \mathbf{R}\}, t \in T$, 则 $\mathcal{C}_t$ 为 π 类. 于是由定理 7.1.3 立刻推得命题的结论.

下一定理称为 **Borel-Cantelli 引理**, 它在概率论中非常有用. 它的推广形式见定理 7.1.8 和系 8.2.18.

7.1.5 定理　设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为一列事件.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(A_n, \text{i.o.})=0$;

(2) 若进一步 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为相互独立，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 蕴涵 $P(A_n, \text{i.o.})=1$.

这里 $\{A_n, \text{i.o.}\}$ 表示 $\{A_n, n \geq 1\}$ 中有无穷多个事件发生 (i.o. 是 infinitely often 的缩写), 即有 $\{A_n, \text{i.o.}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

证 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 由于 $\forall k \geq 1, \{A_n, \text{i.o.}\} \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, 从而

$$P(A_n, \text{i.o.}) \leq P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0, \ k \to \infty.$$

(2) 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 相互独立. 假定 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 则对任何 $m > k$ 有 (注意: $1 - x \leq e^{-x}, \forall 0 \leq x \leq 1$)

$$1 - P(\bigcup_{n=k}^{m} A_n) = P(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) = \prod_{n=k}^{m}(1 - P(A_n)) \leq \exp\{-\sum_{n=k}^{m} P(A_n)\}.$$

因此, 对一切 $k \geq 1$, 有

$$0 \leq 1 - P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) = 1 - \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{n=k}^{m} A_n)$$
$$\leq \lim_{m\to\infty} \exp\{-\sum_{n=k}^{m} P(A_n)\} = 0,$$

从而有

$$P(A_n, \text{i.o.}) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) = 1.$$

7.1.6 系 (Borel 0-1 律) 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为相互独立事件, 则依 $\sum_n P(A_n) < \infty$ 或 $= \infty$ 而有 $P(A_n, \text{i.o.})=0$ 或 1.

7.1.7 引理 设 $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ 为一列事件, 则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}. \tag{7.1.1}$$

(7.1.1) 式称为 **Chung-Erdös 不等式**(见 Trans. Amer. Math. Soc. 72(1952), 179-186).

证 令 $X_k = I_{A_k}$, 由 Schwarz 不等式得

$$\left(E(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right)^2 \leq P(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0) E[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2].$$

由于 $P(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0) = P(\bigcup_{i=k}^{n} A_k)$, 故 (7.1.1) 式得证.

下一定理是 Borel-Cantelli 引理的一个推广, 它是 Kochen-Stone 在 Illinois Journal of Mathematics 8(1964), 248–251 中给出的. 下面的证明是新的.

7.1.8 定理 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为一列事件, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 则

$$P(A_n, \text{ i.o.}) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2}{\sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)}$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i)P(A_k)}{\sum_{1\leq i<k\leq n} P(A_i A_k)}. \tag{7.1.2}$$

特别地, 若 $\{A_n, n \geq 1\}$ 中事件两两独立或负相关 (即 $P(A_i A_k) \leq P(A_i)(P(A_k), \forall i \neq k)$, 则 $P(A_n, \text{i.o.})=1$.

证 令 $a_n = (\sum_{k=1}^{n} P(A_k))^2$, $b_n = \sum_{i,k=1}^{n} P(A_i A_k)$, 则由 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 及 (7.1.1) 式知 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. 于是再由 (7.1.1) 式及 $\sum_{i,k=m+1}^{n} P(A_i A_k) \leq b_n - b_m$ 推得

$$P(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=m+1}^{n} A_k)$$
$$\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_m})^2}{b_n - b_m} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

在上式中令 $m \to \infty$ 即得 (7.1.2) 中的不等式. 由于 $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) =$

∞ 且

$$\Big(\sum_{k=1}^n P(A_k)\Big)^2 \le 2\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k) + \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n P(A_k)}{\sum_{1\le i<k\le n} P(A_i)P(A_k)} = 0.$$

由此推知 (7.1.2) 中的等式成立.

7.1.9 定义 设 $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 为一列随机变量，令

$$\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma\{\xi_j, j>n\},$$

称 $\mathcal{D}$ 为 $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 的**尾 σ 代数**, $\mathcal{D}$ 中的元素称为 $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 的**尾事件**.

下一定理称为 **Kolmogrov 0-1 律**.

7.1.10 定理 独立随机变量序列的尾事件的概率为 0 或 1.

证 设 $\{\xi_n, n\ge 1\}$ 为独立随机变量序列. 对任何 $n\ge 1$, 由定理 7.1.3 知: $\sigma(X_j, 1\le j\le n)$ 与 $\sigma(X_j, j>n)$ 独立. 从而 $\sigma(\xi_j, 1\le j\le n)$ 与 $\mathcal{D}$ 独立 ($\mathcal{D}$ 是尾 σ 代数). 令 $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^\infty \sigma(\xi_j, 1\le j\le n)$, 则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 但 $\mathcal{A}$ 为 π 类, 故由定理 7.1.3 知 $\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 显然 $\mathcal{D}\subset\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\xi_j, j\ge 1)$, 故 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 于是对任何 $D\in\mathcal{D}$, 我们有 $P(D) = P(D\cap D) = P(D)^2$, 从而 $P(D) = 0$ 或 1. 证毕.

下面介绍 Hewitt-Savage 0-1 律, 为此先引进一些概念. 设 $(S,\mathcal{S})$ 为一可测空间, 令 $(S^n, \mathcal{S}^n)$ 和 $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$ 分别表示 n 次乘积和无穷乘积空间. 令 $p: \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 为一双方单值映射, 如果除有限多个 n 外, 恒有 $p(n) = n$, 则称 p 为 $\mathbf{N}$ 的一个**有限置换**. 对任一有限置换 p, 在 S^∞ 上定义一置换 T_p 如下:

$$T_p(s) = (s_{p(1)}, s_{p(2)}, \cdots), \quad s = (s_1, s_2, \cdots)\in S^\infty.$$

关于所有有限置换不变的集合称为**对称集**, $\mathcal{S}^\infty$ 中对称集全体构成 $\mathcal{S}^\infty$ 的一子 σ 代数, 称为**置换不变 σ 代数**.

下一定理称为 **Hewitt-Savage 0-1 律**.

7.1.11 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上取值于 $(S, \mathcal{S})$ 的一列独立同分布随机元, $\mathcal{G}$ 为 S^∞ 置换不变 σ 代数, 则 $\xi^{-1}(\mathcal{G})$ 中元素的概率为 0 或 1.

证 令 π_n 为 $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$ 到 $(S^n, \mathcal{S}^n)$ 上的投影映射, 令 $\mathcal{F}_n = \pi_n^{-1}(\mathcal{S}^n)$. 则有 $\mathcal{S}^\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$. 设 μ 为 ξ 在 $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$ 上的分布. 令 $A\in\mathcal{G}$, 则由习题 1.3.4 知, 存在 $B_n\in\mathcal{S}^n$ 使得 $\mu(A\Delta\pi_n^{-1}(B_n))\to 0$. 令 $\widetilde{B}_n = S^n\times B_n$, 则存在一有限置换 p_n, 使得 $T_{p_n}\pi_n^{-1}(B_n) = \pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n)$. 由于 A 为对称集, 我们有

$$\mu(A\Delta\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n)) = \mu(A\Delta\pi_n^{-1}(B_n))\to 0.$$

于是有

$$\mu(A\Delta(\pi_n^{-1}(B_n)\cap\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n))) \le \mu(A\Delta\pi_n^{-1}(B_n)) + \mu(A\Delta\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n))\to 0,$$

从而

$$\mu(\pi_n^{-1}(B_n)\cap\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n))\to\mu(A).$$

但 $\pi_n^{-1}(B_n)$ 与 $\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n)$ 在 μ 下独立,

$$\mu(\pi_n^{-1}(B_n)\cap\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n)) = \mu(\pi_n^{-1}(B_n))\mu(\pi_{2n}^{-1}(\widetilde{B}_n))\to\mu(A)^2,$$

这表明 $\mu(A) = 0$ 或 1. 由于 $A\in\mathcal{G}$ 是任意的, $\mu(A) = P(\xi^{-1}(A))$, 故 $\xi^{-1}(\mathcal{G})$ 中元素的概率为 0 或 1.

下一定理称为 **Neyman-Pearson 引理**, 它是数理统计中似然比检验理论的基础.

7.1.12 定理 设 P 和 Q 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为上的两个概率测度, $P(A) = P(A\cap N) + \int_A g dQ$ 为 P 关于 Q 的 Lebesgue 分解,

这里 $Q(N)=0$, 在 N 上约定 $g=\infty$. 设 $a>0$. 令 $A(c)=[g>c]$, 则 $\mathcal{F}$ 中任何满足 $Q(A)\le Q(A(c))$ 的 A, 有 $P(A)\le P(A(c))$.

证 设 $A\in\mathcal{F}$. 令 $F=I_{A(c)}-I_A$. 则 $F(g-c)\ge 0$, 且在 N 上 $F\ge 0$. 于是有

$$P(A(c))-P(A)=\int FdP=\int_N FdP+\int FgdQ$$
$$\ge c\int FdQ=c(Q(A(c))-Q(A)).$$

定理证毕.

习 题

7.1.1 设 $(X_n, n\ge 1)$ 为独立随机变量序列, 则:

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 与 $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 为退化随机变量 (即 a.s. 等于某一常数);

(2) 为要 $P(\lim\limits_{n\to\infty} X_n=0)=1$, 必须且只需对任何 $C>0$, 有 $\sum\limits_n P(|X_n|>C)<\infty$.(提示: 利用 Borel-Cantelli 引理.)

7.1.2 设 $(X_i, 1\le i\le n)$ 为独立随机变量序列. 若每个 X_i 非负或每个 X_i 可积, 则有 $E[\prod_{i=1}^n X_i]=\prod_{i=1}^n E[X_i]$. (提示: 从简单随机变量过渡到非负随机变量.)

7.1.3 设 X 及 Y 为相互独立可积随机变量, 且 $E[X]=0$, 则 $E[|X+Y|]\ge E[|Y|]$. (提示: $|y|=|E(y+X)|\le E|y+X|$.)

7.1.4 设 (ξ_n) 为一列非负实值随机变量, 则存在一正实数序列 (c_n), 使得 $\sum_{n=1}^\infty c_n\xi_n<\infty$ a.s.. (提示: 取一正实数列 (a_n), 使得 $\sum_{n=1}^\infty P(\xi_n>a_n)<\infty$, 然后利用 Borel-Cantelli 引理并令 $c_n=(2^n a_n)^{-1}$.)

7.1.5 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为非负随机变量, 且 $E[\xi_i]=1, 1\le i\le n$. 证明 $\prod_{i=1}^n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E[\xi_i\xi_j]\ge 1$. (提示: 令 $\xi=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\xi_j$, 将 $\prod_{i=1}^n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E[\xi_i\xi_j]$ 写成 $\exp\{\sum_{i=1}^n\log E_i[\xi]\}$, 其中 $E_i[\xi]=E[\xi_i\xi]$, 然后用 Jensen 不等式, 最后再用不等式 $x\log x\ge x-1, x>0$.)

7.1.6 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$, $P(A_i)>0, 1\le i\le n$. 令 $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$, 证明 $\prod_{i=1}^n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\frac{P(A_iA_j)}{P(A_i)P(A_j)}\ge\left(\frac{1}{P(A)}\right)^n$. (提示: 利用上一题的结果.)

7.2 条件数学期望与条件独立性

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, A 和 B 为两个事件, 且 $P(A)>0$. 在 A 发生的条件下 B 发生的概率显然等于 $P(AB)/P(A)$, 我们称之为 B 关于 A 的**条件概率**, 记为 $P(B|A)$.

设 $(B_j)_{1\le j\le m}$ 为 Ω 的一个有限划分, 且 $B_j\in\mathcal{F}, P(B_j)>0, 1\le j\le m$. 令 $\mathcal{G}$ 为由 (B_j) 生成的 σ 代数. 对一可积随机变量 X, 令

$$E[X|\mathcal{G}]=\sum_{j=1}^m\frac{E[XI_{B_j}]}{P(B_j)}I_{B_j},$$

称 $E[X|\mathcal{G}]$ 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的**条件 (数学) 期望**. 如果 $(A_i)_{1\le i\le n}$ 是 Ω 的一个有限划分, 且 $A_i\in\mathcal{F}, 1\le i\le n, X=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}$ 为一简单随机变量, 则易知

$$E[X|\mathcal{G}]=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n a_iP(A_i|B_j)I_{B_j}.$$

$E(X|\mathcal{G})$ 是一 $\mathcal{G}$ 可测随机变量, 满足:

$$E[E[X|\mathcal{G}]I_B]=E[XI_B],\qquad \forall B\in\mathcal{G}. \tag{7.2.1}$$

下面我们将条件期望推广到一般随机变量及 σ 代数情形. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 设 X 为数学期望存在的随机变量, 令 $\nu=X.P$ 为 X 关于 P 的不定积分, 即

$$\nu(A)=\int_A XdP,\ A\in\mathcal{F},$$

则 ν 为符号测度, 且 ν 关于 P 绝对连续. 若将 ν 及 P 都限于 $(\Omega,\mathcal{G})$, 则仍有 $\nu\ll P$. 令 Y 为 ν 关于 P 在 $(\Omega,\mathcal{G})$ 上的 Radon-Nikodym

导数 (见定理 3.3.11), 则 Y 为 $\mathcal{G}$ 可测随机变量，且有

$$E[YI_B]=E[XI_B],\ \forall B\in\mathcal{G},$$

我们称随机变量 Y 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的**条件 (数学) 期望**. 由命题 3.1.8 知：在 P 等价意义下，条件期望 Y 是唯一确定的，我们把它记为 $E[X|\mathcal{G}]$, 它由 (7.2.1) 式所刻画.

7.2.1 定理 条件期望有如下基本性质：

(1) $E[E[X|\mathcal{G}]]=E[X]$;

(2) 若 X 为 $\mathcal{G}$ 可测，则 $E[X|\mathcal{G}]=X$ a.s.;

(3) 设 $\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$, 则 $E[X|\mathcal{G}]=E[X]$ a.s.;

(4) $E[X|\mathcal{G}]=E[X^+|\mathcal{G}]-E[X^-|\mathcal{G}]$ a.s.;

(5) $X\geq Y$ a.s.$\Rightarrow E[X|\mathcal{G}]\geq E[Y|\mathcal{G}]$ a.s.;

(6) 设 c_1,c_2 为实数， X,Y,c_1X+c_2Y 的期望存在，则

$$E[c_1X+c_2Y|\mathcal{G}]=c_1E[X|\mathcal{G}]+c_2E[Y|\mathcal{G}]\ \text{ a.s.},$$

如果右边和式有意义;

(7) $|E[X|\mathcal{G}]|\leq E[\,|X|\,|\mathcal{G}]$ a.s.;

(8) 设 $0\leq X_n\uparrow X$, a.s., 则 $E[X_n|\mathcal{G}]\uparrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s.;

(9) 设 X 及 XY 的期望存在，且 Y 为 $\mathcal{G}$ 可测，则

$$E[XY|\mathcal{G}]=YE[X|\mathcal{G}]\ \text{ a.s.};\tag{7.2.2}$$

(10) (条件期望的平滑性) 设 $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，且 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$, 则

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1]\ \text{ a.s.};\tag{7.2.3}$$

(11) 若 X 与 $\mathcal{G}$ 相互独立 (即 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{G}$ 相互独立), 则有 $E[X|\mathcal{G}]=E[X]$ a.s..

证 (1)—(7) 容易由条件期望定义直接看出.

(8) 由 (5) 知， $E[X_n|\mathcal{G}]\uparrow Y$, a.s., Y 为一 $\mathcal{G}$ 可测随机变量. 于是，对一切 $B\in\mathcal{G}$,

$$\int_B YdP=\lim_{n\to\infty}\int_B E[X_n|\mathcal{G}]dP=\lim_{n\to\infty}\int_B X_ndP,$$

从而 $Y=E[X|\mathcal{G}]$ a.s..

(9) 不妨设 X 及 Y 皆为非负随机变量. 首先设 $Y=I_A, A\in\mathcal{G}$, 则 $E[X|\mathcal{G}]$ 为 $\mathcal{G}$ 可测，且对一切 $B\in\mathcal{G}$, 有

$$\begin{aligned}\int_B YE[X|\mathcal{G}]dP&=\int_{A\cap B}E[X|\mathcal{G}]dP=\int_{A\cap B}XdP\\&=\int_B XI_AdP=\int_B YXdP,\end{aligned}$$

故 (7.2.2) 式成立. 然后利用 (8) 即可由简单随机变量过渡到一般非负随机变量.

(10) 设 $B\in\mathcal{G}_1$, 则

$$\int_B E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]dP=\int_B E[X|\mathcal{G}_2]dP=\int_B XdP,$$

故有 (7.2.3) 式.

(11) 不妨设 X 为非负随机变量. 设 $A\in\mathcal{G}$, 由于 I_A 与 X 相互独立，故由习题 7.1.1 知

$$\int_A E[X]dP=E[X]P(A)=E[XI_A]=\int_A XdP,$$

故 $E[X]=E[X|\mathcal{G}]$ a.s..

关于条件期望，我们也有相应的单调收敛定理， Fatou 引理，控制收敛定理， Hölder 不等式及 Minkowski 不等式，它们的证明与第三章关于积分情形相应结果的证明类似. 因此，下面我们只叙述结果而略去证明. 注意：对概率空间情形， a.s. 收敛总蕴含依概率收敛.

在下面几个定理中，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数.

7.2.2 定理 (单调收敛定理) 设 (X_n) 为随机变量序列，且每个 X_n 的期望存在.

(1) 设 $X_n \uparrow X$ a.s.，且 $E[X_1] > -\infty$，则 X 的期望存在，且 $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s.；

(2) 设 $X_n \downarrow X$ a.s.，且 $E[X_1] < \infty$，则 X 的期望存在，且 $E[X_n|\mathcal{G}] \downarrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s..

7.2.3 定理 (Fatou 引理) 设 (X_n) 为随机变量序列，且每个 X_n 的期望存在.

(1) 若存在随机变量 Y，使 $E[Y] > -\infty$，且对每个 $n \geq 1$，有 $X_n \geq Y$ a.s.，则 $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}];$$

(2) 若存在随机变量 Y，使 $E[Y] < \infty$，且对每个 $n \geq 1$，有 $X_n \leq Y$ a.s.，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \geq \limsup_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}].$$

7.2.4 定理 (控制收敛定理) 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$(相应地，$X_n \xrightarrow{\text{P}} X$)，若存在非负可积随机变量 Y，使 $|X_n| \leq Y$ a.s.，则 X 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$ a.s.(相应地，$E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[X|\mathcal{G}]$).

下一定理是控制收敛定理的推广形式.

7.2.5 定理 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$(相应地，$X_n \xrightarrow{\text{P}} X, Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$)，其中 Y 及每个 Y_n 为非负可积随机变量. 如果对 $n \geq 1$, $|X_n| \leq Y_n$ a.s. 且 $E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[Y|\mathcal{G}]$(相应地，$E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[Y|\mathcal{G}]$)，则有 $E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$(相应地，$E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} 0$). 特别有 $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X|\mathcal{G}]$(相应地，$E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[X|\mathcal{G}]$).

证 只需考虑 a.s. 收敛情形. 令 $Z_n = Y_n + Y - |X_n - X|$，则 $Z_n \geq 0$，且 $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 2Y$. 故由 Fatou 引理得

$$2E[Y|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[Z_n|\mathcal{G}] = 2E[Y|\mathcal{G}] - \limsup_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}],$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}] = 0$. 证毕.

7.2.6 定理 (Hölder 不等式) 设 $1 < p, q < \infty, 1/p + 1/q = 1$，则

$$E[|XY||\mathcal{G}] \leq (E[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p}(E[|Y|^q|\mathcal{G}])^{1/q}.$$

7.2.7 定理 (Minkowski 不等式) 设 $p \geq 1$，则

$$(E[|X+Y|^p|\mathcal{G}])^{1/p} \leq (E[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p} + (E[|Y|^p|\mathcal{G}])^{1/p}.$$

下面将条件期望的概念推广到最一般的情形 (见严加安 [13]).

7.2.8 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，X 为一随机变量，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 若 $E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}]$ a.s. 有定义 (即 $P(E[X^+|\mathcal{G}] = \infty, E[X^-|\mathcal{G}] = \infty) = 0$)，则称 X 关于 $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ 的**条件期望存在**，并令 (约定 $\infty - \infty = 0$)

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}].$$

我们称 $E[X|\mathcal{G}]$ 为 X 关于 $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ 的**条件期望**.

若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$，则 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在，当且仅当 X 的期望存在. 此外，任何 $\mathcal{G}$ 可测的随机变量 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在，且 $E[X|\mathcal{G}] = X$ a.s..

下一定理给出了条件期望存在的随机变量的一个有用刻画.

7.2.9 定理 下列二断言等价：

(1) X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在；

(2) 存在 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量 $\xi, |\xi| > 0$ a.s.，使 ξX 的期望存在.

证 (1)⇒(2). 设 (1) 成立. 令

$$A=[E[X^+|\mathcal{G}]=\infty], \qquad B=[E[X^-|\mathcal{G}]=\infty],$$

则 $P(A\cap B)=0$. 令 $\eta=I_{A^c}-I_A$, 则 $|\eta|=1$, η 为 $\mathcal{G}$ 可测, 且有 $(\eta X)^+=\eta^+X^++\eta^-X^-$, 故有

$$E[(\eta X)^+|\mathcal{G}]=I_{A^c}E[X^+|\mathcal{G}]+I_AE[X^-|\mathcal{G}]<\infty \text{ a.s.}.$$

令 $\xi=\eta/(1+E[(\eta X)^+|\mathcal{G}])$, 则 $E[(\xi X)^+|\mathcal{G}]<1$ a.s.. 特别, $E[(\xi X)^+]<1$, 于是 ξX 的期望存在.

(2)⇒(1) 由下一定理的 (1) 推得.

下一定理是定理 7.2.1 的推广.

7.2.10 定理 7.2.8 定义的条件期望有下列性质:

(1) 设 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 则对任何 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量 ξ, ξX 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望也存在, 且有

$$E[\xi X|\mathcal{G}]=\xi E[X|\mathcal{G}] \text{ a.s.}. \tag{7.2.4}$$

(2) 设 X_1,X_2 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 若 X_1+X_2 及 $E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s. 有意义, 则 X_1+X_2 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有

$$E[X_1+X_2|\mathcal{G}]=E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}] \text{ a.s.}. \tag{7.2.5}$$

(3) 设 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数, 且 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$. 若 X 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在, 则 X 关于 $\mathcal{G}_2$ 的条件期望存在, $E[X|\mathcal{G}_2]$ 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在, 且有

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1]. \tag{7.2.6}$$

证 (1) 我们有 $(\xi X)^+=\xi^+X^++\xi^-X^-,(\xi X)^-=\xi^+X^-+\xi^-X^+$. 于是有

$$E[(\xi X)^+|\mathcal{G}]=\xi^+E[X^+|\mathcal{G}]+\xi^-E[X^-|\mathcal{G}], \tag{7.2.7}$$

$$E[(\xi X)^-|\mathcal{G}]=\xi^-E[X^+|\mathcal{G}]+\xi^+E[X^-|\mathcal{G}]. \tag{7.2.8}$$

由于假定 $E[X^+|\mathcal{G}]-E[X^-|\mathcal{G}]$ a.s. 有意义, 故 ξX 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 由 (7.2.7) 式及 (7.2.8) 式推得 (7.2.4) 式.

(2) 令 $A=[E[X_1|\mathcal{G}]=-\infty],B=[E[X_2|\mathcal{G}]=-\infty]$, 则依假定, $E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s. 有意义, 故在 A 上 a.s. 有 $E[X_1|\mathcal{G}]<\infty$, 在 B 上 a.s. 有 $E[X_2|\mathcal{G}]<\infty$, 于是有

$$I_AE[X_1^+|\mathcal{G}]<\infty \text{ a.s.},\ I_BE[X_2^+|\mathcal{G}]<\infty \text{ a.s.}. \tag{7.2.9}$$

令 $\xi=I_{A\cup B}-I_{A^c\cap B^c}$, 则 $|\xi|=1,\xi$ 为 $\mathcal{G}$ 可测. 记 $Y=\xi(X_1+X_2)$, 我们有

$$Y^+\le\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-),$$

$$\begin{aligned}E[Y^+|\mathcal{G}]&\le E[\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-)|\mathcal{G}]\\&=I_{A\cup B}(E[X_1^+|\mathcal{G}]+E[X_2^+|\mathcal{G}])\\&\quad+I_{A^c\cap B^c}(E[X_1^-|\mathcal{G}]+E[X_2^-|\mathcal{G}])<\infty \text{ a.s.}.\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

特别, Y 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 于是由 (1) 知 X_1+X_2 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 此外, 令

$$Z_1=\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-),$$
$$Z_2=\xi^-(X_1^++X_2^+)+\xi^+(X_1^-+X_2^-),$$

则 $Y=Z_1-Z_2$, 且由 (7.2.10) 知 $E[Z_1|\mathcal{G}]<\infty$ a.s.. 令 $\eta=\frac{1}{1+E[Z_1|\mathcal{G}]}$, 则 $E[\eta Z_1]=E[\eta E[Z_1|\mathcal{G}]]\le 1$, 因此 ηY 的期望存在. 故由 (7.2.4) 式及定理 7.2.1(6) 有

$$\begin{aligned}E[Y|\mathcal{G}]&=\frac{1}{\eta}E[\eta Y|\mathcal{G}]=\frac{1}{\eta}(E[\eta Z_1|\mathcal{G}]-E[\eta Z_2|\mathcal{G}])\\&=\frac{1}{\eta}(\eta E[Z_1|\mathcal{G}]-\eta E[Z_2|\mathcal{G}])=E[Z_1|\mathcal{G}]-E[Z_2|\mathcal{G}]\\&=\xi(E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}]),\end{aligned}$$

由此及 (7.2.4) 式便得 (7.2.5) 式.

(3) 设 X 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在. 由定理 7.2.9 知, 存在 $\mathcal{G}_1$ 可测实值随机变量 $\xi\,|\xi|>0$ a.s., 且 ξX 的期望存在. 由于 ξ 为 $\mathcal{G}_2$ 可测, 故仍由定理 7.2.9 知, X 关于 $\mathcal{G}_2$ 的条件期望存在, 且由 (7.2.4) 式得

$$E[X|\mathcal{G}_2]=\frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathcal{G}_2].$$

由于 $E[\xi X|\mathcal{G}_2]$ 的期望存在, 故由 (1) 及上式知 $E[X|\mathcal{G}_2]$ 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在, 且有 (利用 (7.2.3) 式)

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=\frac{1}{\xi}E[E[\xi X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=\frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1].$$

(7.2.6) 式得证.

下面讨论一类特殊的关于 $\mathcal{G}$ 条件期望存在的随机变量.

7.2.11 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 称随机变量 X 关于 $\mathcal{G}$ 为 **σ可积**, 如果存在 $\Omega_n\in\mathcal{G},\Omega_n\uparrow\Omega$, 使每个 XI_{Ω_n} 为可积.

下一定理给出了关于 $\mathcal{G}$ 为 σ 可积的随机变量的一个刻画.

7.2.12 定理 设 X 为一随机变量, 则下列断言等价:

(1) X 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ 可积;

(2) X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 有穷;

(3) 存在一 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量 $\xi,|\xi|>0$ a.s., 使 ξX 为可积随机变量.

证 (1)⇒(3). 设 (1) 成立. 选取 $\Omega_n\in\mathcal{G},\Omega_n\uparrow\Omega$, 使每个 XI_{Ω_n} 为可积. 令

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+E[|X|I_{\Omega_n}])}I_{\Omega_n},$$

则 $\xi>0,\xi$ 为 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量, 且 ξX 为可积.

(3)⇒(2) 显然. 往证 (2)⇒(1). 设 $E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 有穷, 由于 $E[X|\mathcal{G}]=E[X^+|\mathcal{G}]-E[X^-|\mathcal{G}]$, 故 $E[|X||\mathcal{G}]<\infty$ a.s.. 令 $\Omega_n=[E[|X||\mathcal{G}]\le n]$, 则 $\Omega_n\uparrow\Omega$ a.s., $\Omega_n\in\mathcal{G}$, 且 XI_{Ω_n} 为可积随机变量. 故 X 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ 可积. 证毕.

下一定理给出了条件期望的 Jensen 不等式的最一般形式.

7.2.13 定理 (Jensen 不等式) 设 $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为一连续凸函数, X 为一关于 $\mathcal{G}$ σ 可积的随机变量, 则 $\varphi(X)$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有

$$\varphi(E[X|\mathcal{G}])\le E[\varphi(X)|\mathcal{G}]\ \text{a.s.}. \tag{7.2.11}$$

证 令 φ' 为 φ 的右导数, 则对任意实数 x,y 有

$$\varphi'(x)(y-x)\le\varphi(y)-\varphi(x).$$

以 $E[X|\mathcal{G}]$ 及 X 代替上式中的 x 及 y 得

$$\varphi'(E[X|\mathcal{G}])(X-E[X|\mathcal{G}])+\varphi(E[X|\mathcal{G}])\le\varphi(X).$$

记上式左边的随机变量为 Y, 则 Y 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[Y|\mathcal{G}]=\varphi(E[X|\mathcal{G}])$. 特别, 由于 $\varphi(X)^-\le Y^-$, 故 $E[\varphi(X)^-|\mathcal{G}]\le E[Y^-|\mathcal{G}]<\infty$ a.s.. 因此, $\varphi(X)$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有 (7.2.11) 式. 证毕.

下面我们推广有关条件期望的单调收敛定理、 Fatou 引理、控制收敛定理和 L^r 收敛定理.

7.2.14 定理 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数, $(X_n,n\ge1)$ 为一列关于 $\mathcal{G}$ 条件期望存在的随机变量.

(1) (**单调收敛定理**) 设 $X_n\uparrow X$ a.s., 且 $E[X_1^+|\mathcal{G}]<\infty$ a.s., 则 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在 (实际有 $E[X^-|\mathcal{G}]<\infty$ a.s.), 且有 $E[X_n|\mathcal{G}]\uparrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s..

(2) **(Fatou 引理)** 若存在随机变量 Y, 使 $E[Y^-|\mathcal{G}]<\infty$ a.s., 且对每个 $n\geq 1$, 有 $X_n\geq Y$ a.s., 则 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在 (实际有 $E[(\liminf\limits_{n\to\infty}X_n)^-|\mathcal{G}]<\infty$ a.s.), 且有

$$E[\liminf_{n\to\infty}X_n|\mathcal{G}]\leq\liminf_{n\to\infty}E[X_n|\mathcal{G}]\ \text{ a.s.}.$$

(3) **(控制收敛定理)** 设 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X$, $Y_n\xrightarrow{\text{a.s.}}Y$(相应地, $X_n\xrightarrow{\text{P}}X$, $Y_n\xrightarrow{\text{P}}Y$), 其中每个 Y_n 为非负随机变量, 且 Y 及每个 Y_n 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ 可积. 如果对 $n\geq 1, |X_n|\leq Y_n$ a.s., 且 $E[Y_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{a.s.}}E[Y|\mathcal{G}]$(相应地, $E[Y_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{P}}E[Y|\mathcal{G}]$), 则有 $E[|X_n-X||\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{a.s.}}0$(相应地, $E[|X_n-X||\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{P}}0$), 特别有 $E[X_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{a.s.}}E[X|\mathcal{G}]$(相应地, $E[X_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{\text{P}}E[X|\mathcal{G}]$).

(4) **(L^r 收敛定理)** 设 $\infty>r\geq 1$. 若 $X_n\xrightarrow{L^r}X$, 则 $E[X_n|\mathcal{G}]\xrightarrow{L^r}E[X|\mathcal{G}]$.

证 (1) 令 $\xi>0$ 为一 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量, 使 ξX_1^- 为可积, 则 ξX_n 的期望存在, 且 $\xi X_n\uparrow\xi X$ a.s., 故由定理 7.2.2 得 $E[\xi X_n|\mathcal{G}]\uparrow E[\xi X|\mathcal{G}]$ a.s., 但有 $E[\xi X_n|\mathcal{G}]=\xi E[X_n|\mathcal{G}]$, $E[\xi X|\mathcal{G}]=\xi E[X|\mathcal{G}]$, 从而有 $E[X_n|\mathcal{G}]\uparrow E[X|\mathcal{G}]$ a.s..

(2) 容易由 (1) 推得.

(3) 只需考虑 a.s. 收敛情形. 令 $Z_n=Y_n+Y-|X_n-X|$, 则 $Z_n\geq 0$, 且 $Z_n\xrightarrow{\text{a.s.}}2Y$, 故由 (2) 得

$$2E[Y|\mathcal{G}]\leq\liminf_{n\to\infty}E[Z_n|\mathcal{G}]=2E[Y|\mathcal{G}]-\limsup_{n\to\infty}E[|X_n-X||\mathcal{G}].$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n-X||\mathcal{G}]=0$.

(4) 令 $f(x)=|x|^r$, 则 f 为 $\mathbf{R}$ 上的连续凸函数. 故由 (7.2.11) 式得

$$|E[X_n|\mathcal{G}]-E[X|\mathcal{G}]|^r\leq E[|X_n-X|^r|\mathcal{G}].$$

在不等式两边取期望即得欲证结论.

下一定理给出了计算一类条件期望的有用公式.

7.2.15 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数; $(S,\mathcal{S})$ 和 $(E,\mathcal{E})$ 为可测空间, X 为一 $\mathcal{G}$ 可测 S 值随机元, Y 为一 E 值随机元. 假定 Y 和 $\mathcal{G}$ 独立 (即 $Y^{-1}(\mathcal{E})$ 与 $\mathcal{G}$ 独立). 令 $g(x,y)$ 为 $S\times E$ 上的 $\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ 可测函数, 使得 $E[|g(X,Y)|]<\infty$, 则有

$$E[g(X,Y)\mid\mathcal{G}]=E[g(x,Y)]|_{x=X}.\tag{7.2.12}$$

证 不妨假定 $g(x,y)$ 为非负 $\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ 可测函数. 令 $f(x)=E[g(x,Y)]$. 为证 (7.2.12) 只需证明对任意非负 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 Z, 有

$$E[g(X,Y)Z]=E[f(X)Z].$$

为此令

$$\mu_Y(A)=P(Y^{-1}(A)),\quad A\in\mathcal{E};$$
$$\mu_{X,Z}(B)=P((X,Z)^{-1}(B)),\quad B\in\mathcal{S}\times\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

则有

$$f(x)=\int g(x,y)\mu_Y(dy).$$

由于 Y 和 (X,Z) 独立, 我们有

$$\begin{aligned}E[g(X,Y)Z]&=\int zg(x,y)\mu_Y(dy)\mu_{X,Z}(dx,dz)\\&=\int zf(x)\mu_{X,Z}(dx,dz)=E[Zf(X)].\end{aligned}$$

定理证毕.

下一定理是条件期望的 **Bayes 法则**.

7.2.16 定理 设 Q 为一关于 P 绝对连续的概率测度, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 令

$$\xi=\frac{dQ}{dP},\qquad\eta=E[\xi|\mathcal{G}].$$

则 $\eta > 0$ Q-a.s.. 如果 X 为一 Q 可积的随机变量，则有

$$E_Q[X|\mathcal{G}] = \eta^{-1}E[X\xi|\mathcal{G}] \quad Q\text{-a.s.}. \tag{7.2.13}$$

证 首先，由于 $[\eta > 0] \in \mathcal{G}$, 我们有

$$Q([\eta > 0]) = E[\xi I_{[\eta>0]}] = E[\eta I_{[\eta>0]}] = E[\eta] = E[\xi] = 1.$$

设 X 为一 Q 可积的随机变量，则有

$$\begin{aligned} E[X\xi I_A] &= E_Q[XI_A] = E_Q[E_Q[X|\mathcal{G}]I_A] \\ &= E[E_Q[X|\mathcal{G}]\xi I_A] = E[E_Q[X|\mathcal{G}]\eta I_A], \quad \forall A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

这表明

$$E[X\xi|\mathcal{G}] = E_Q[X|\mathcal{G}]\eta \quad P\text{-a.s.},$$

从而上一等式 Q-a.s. 成立. 由此立刻推得 (7.2.13). 定理证毕.

设 ξ 为一可积随机变量，Y 为由 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的一可测映射. 我们常将 $E[\xi|\sigma(Y)]$ 记为 $E[\xi|Y]$. 这时令

$$\mu(A) = P(Y^{-1}(A)), \quad \nu(A) = E[\xi I_{Y^{-1}(A)}], \quad A \in \mathcal{E}.$$

显然 ν 关于 μ 绝对连续. 令 $g = \frac{d\nu}{d\mu}$, 则由习题 3.1.6 知：$\forall A \in \mathcal{E}$, 我们有

$$E[g(Y)I_{Y^{-1}(A)}] = \int_A g(y)\mu(dy) = \nu(A) = E[\xi I_{Y^{-1}(A)}].$$

这表明 $E[\xi|Y] = g(Y)$. 我们常用记号 $E[\xi|Y = y]$ 形式上表示 $g(y)$, 尽管函数 g 只是 μ-a.e. 唯一确定的且 $[Y = y]$ 的概率可能为零. 作为这一结果的推论，我们得到如下有用的结果.

7.2.17 定理 设 $X = (X_1, \cdots, X_m)$ 和 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 为两个随机向量，h 为 R^m 上的一 Borel 函数，使得 $h(X_1, \cdots, X_m)$ 可积. 令 μ 为 Y 在 R^n 上诱导的测度,

$$\nu(A) = \int_{\mathbf{R}^m \times A} h(x_1, \cdots, x_m)dF(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n), \; A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n),$$

其中 $F(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$ 为 X 和 Y 的联合分布，则 ν 关于 μ 绝对连续，且有

$$E[h(X)|Y_1, \cdots, Y_n] = g(Y_1, \cdots, Y_n), \tag{7.2.14}$$

其中 g 为 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数. 如果 F 有密度函数 $f(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$, 则 g 有如下表达式:

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \frac{\int_{\mathbf{R}^m} h(x_1, \cdots, x_m)f(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)dx_1 \cdots dx_m}{\int_{\mathbf{R}^m} f(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)dx_1 \cdots dx_m}, \tag{7.2.15}$$

这里约定 $0/0 = 0$.

7.2.18 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, 对 $B \in \mathcal{F}$, 令 $P[B|\mathcal{G}] = E[I_B|\mathcal{G}]$, 称 $P[B|\mathcal{G}]$ 为 B 关于 $\mathcal{G}$ 的**条件概率**. 设 $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 如果对任意 $B_1 \in \mathcal{G}_1$ 及 $B_2 \in \mathcal{G}_2$, 有

$$P[B_1 \cap B_2|\mathcal{G}] = P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}, \tag{7.2.16}$$

则称 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 关于 $\mathcal{G}$**条件独立**.

设 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立，则对任意 $\mathcal{G}_1$ 可测非负随机变量 X_1 及 $\mathcal{G}_2$ 可测非负随机变量 X_2, 有

$$E[X_1X_2|\mathcal{G}] = E[X_1|\mathcal{G}]E[X_2|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}.$$

设 X 及 Y 为随机变量. 若 $\sigma(X)$ 与 $\sigma(Y)$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立，则称 X 与 Y 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立. 类似可定义一随机变量与一子 σ 代数关于 $\mathcal{G}$ 的条件独立性.

下一定理给出了条件独立性的一个判别准则.

7.2.19 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间，$\mathcal{G},\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 则为要 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立，必须且只需对任意 $B_2\in\mathcal{G}_2$ 有

$$P[B_2|\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}]=P[B_2|\mathcal{G}]\quad \text{a.s.}. \tag{7.2.17}$$

(或等价地，对任意 $B_1\in\mathcal{G}_1$, 有 $P[B_1|\mathcal{G}_2\vee\mathcal{G}]=P[B_1|\mathcal{G}]$, a.s..)

证 首先 (7.2.17) 式右边为 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}$ 可测且 $\{B_1\cap B\,|\,B_1\in\mathcal{G}_1,B\in\mathcal{G}\}$ 为生成 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}$ 的 π 类，由条件期望的定义易知 (7.2.17) 等价于

$$\int_{B\cap B_1}P[B_2|\mathcal{G}]dP=\int_B I_{B_1}I_{B_2}dP,\ B\in\mathcal{G},B_1\in\mathcal{G}_1. \tag{7.2.18}$$

另一方面，(7.2.16) 等价于

$$\int_B P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}]dP=\int_B I_{B_1\cap B_2}dP,\ B\in\mathcal{G}. \tag{7.2.19}$$

但对 $B\in\mathcal{G},B_1\in\mathcal{G}_1,B_2\in\mathcal{G}_2$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{B\cap B_1}P[B_2|\mathcal{G}]dP&=\int_B I_{B_1}P(B_2|\mathcal{G})dP\\&=\int_B E[I_{B_1}P[B_2|\mathcal{G}]|\mathcal{G}]dP\\&=\int_B P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}]dP,\end{aligned}$$

即 (7.2.18) 的左边与 (7.2.19) 的左边相等，因此定理得证.

习 题

7.2.1 设 $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P),\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数，$Y\in L^1(\Omega,\mathcal{G},P)$. 为要 $Y=E[X|\mathcal{G}]$, 必须且只需 $EX=EY$ 且对生成 $\mathcal{G}$ 的某 π 类 $\mathcal{C}$ 中的所有集合 A 有 $E[XI_A]=E[YI_A]$.

7.2.2 设 $X,Y\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. 若 $E(X|Y)=Y$ a.s., $E[Y|X]=X$ a.s., 则 $X=Y$ a.s..

7.2.3 设 $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P),\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数，则

$$E(E[X|\mathcal{G}]-X)^2=\inf\{E(Y-X)^2\,|\,Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)\}.$$

7.2.4 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量，$f(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的非负或有界 Borel 可测函数. 令 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，若 X 与 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2$ 独立，Y 关于 $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2$ 可测，则有

$$\begin{aligned}E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1]&=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_2]\\&=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2]\quad\text{a.s.}.\end{aligned}$$

(提示：利用定理 2.2.1.)

7.2.5 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量，$\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，若 X 与 Y 及 $\mathcal{G}_2$ 独立，Y 与 $\mathcal{G}_1$ 独立，则有

$$E[XY|\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2]=E[X|\mathcal{G}_1]E[Y|\mathcal{G}_2].$$

7.2.6 设 ξ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的可积随机变量，$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数，$A\in\mathcal{G}\cap\mathcal{H}$. 若 $A\cap\mathcal{G}=A\cap\mathcal{H}$, 则有

$$E[\xi|\mathcal{G}]I_A=E[\xi|\mathcal{H}]I_A\quad\text{a.s.}.$$

7.2.7 1) 设 X,Y,Z,W 为随机变量，(X,Z) 与 (Y,W) 有相同的联合分布，设 f 为非负 Borel 可测函数，证明 $E[f(X)|Z]$ 与 $E[f(Y)|W]$ 同分布. 若 $Z=W$, 则 $E[f(X)|Z]=E[f(Y)|W]$ a.s..

2) 设 X,Y 为独立同分布可积随机变量，试求 $E[X|X+Y]$.

7.2.8 设 (X,Y) 服从二维标准正态分布，试求 $E[X^2|XY]$.

7.2.9 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{F}_n,n\geq 1$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 则为要 $\mathcal{H}$ 与 $(\mathcal{F}_n,n\geq 1)$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立, 必须且只需 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{F}_1$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立, 且对一切 $n\geq 1$, $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{F}_{n+1}$ 关于 $(\mathcal{G},\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_n)$ 条件独立.

7.2.10 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $(\xi_n,n\geq 1)$ 为一列非负可积随机变量, $(\mathcal{F}_n,n\geq 1)$ 为一列 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数, 使得 $E[\xi_n|\mathcal{F}_n]$ 依概率趋于 0, 证明 ξ_n 也依概率趋于 0. (提示: 利用习题 3.1.7.)

7.3 正则条件概率

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 由条件期望的性质知: 条件概率 $P(A|\mathcal{G})$ 有如下性质:

$$P[\Omega|\mathcal{G}]=1 \ \text{a.s.},\qquad P[A|\mathcal{G}]\geq 0 \ \text{a.s.},$$
$$P[\sum_j A_j|\mathcal{G}]=\sum_j P[A_j|\mathcal{G}] \quad \text{a.s.}.$$

这些性质与概率测度的性质很相似, 不同之处在于出现了例外集. 若对每个 $A\in\mathcal{F}$, 可选取 $P[A|\mathcal{G}]$ 的一个版本 $P(\omega,A)$, 使得对一切 $\omega\in\Omega$, $P(\omega,\cdot)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度, 这时称 $\{P(\omega,A),\omega\in\Omega,A\in\mathcal{F}\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 一般说来, 即使 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可分可测空间, 正则条件概率未必存在. 本节将对可分可测空间情形给出使正则条件概率存在的一个充分条件 (定理 7.3.10) 及一个充要条件 (定理 7.3.15).

7.3.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 令 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一族概率测度, 称它为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的**正则条件概率**, 如果:

(1) $\forall A\in\mathcal{F}, P(\cdot,A)$ 为 Ω 上的 $\mathcal{G}$ 可测函数;

(2) $\forall A\in\mathcal{F}, P(\omega,A)$ 为 $P[A|\mathcal{G}]$ 的一个版本, 即 $\forall B\in\mathcal{G}$ 有

$$\int_B P(\omega,A)P(d\omega)=P(A\cap B).$$

正则条件概率的第一个应用是: 条件期望算子成了关于正则条件概率的积分.

7.3.2 定理 设 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 设 X 为一随机变量, 其期望存在, 则对几乎所有 ω, X 关于 $P(\omega,\cdot)$ 的积分存在, 且有

$$E[X|\mathcal{G}](\omega)=\int_\Omega X(\omega')P(\omega,d\omega') \quad \text{a.s. } \omega. \tag{7.3.1}$$

证 从示性函数过渡到非负可测函数, 证明细节从略.

在上述定理中, 如果有从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到另一可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 的可测映射 ξ, 则可在 $(E,\mathcal{E})$ 上引出一族概率测度 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$:

$$Q(\omega,A)=P(\omega,\xi^{-1}(A)), \tag{7.3.2}$$

这时, 对形如 $f(\xi)$ 的存在期望的随机变量 (其中 f 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的 Borel 可测函数), 我们有 (见习题 3.1.6)

$$E[f(\xi)|\mathcal{G}](\omega)=\int_E f(x)Q(\omega,dx). \tag{7.3.3}$$

在许多情况下, 正则条件概率并不存在, 但满足 (7.3.3) 式的概率测度族 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 存在. 我们称 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的**混合条件分布**.

下面我们给出混合条件分布的确切定义.

7.3.3 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数. 又设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间, ξ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的可测映射 (称 ξ 为在 $(E,\mathcal{E})$ 中取值的**随机元**). 令 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的一族概率测度. 称它为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的**混合条件分布**, 如果:

(1) $\forall A\in\mathcal{E}, Q(\cdot,A)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测;

(2) $\forall A\in\mathcal{E}, Q(\omega,A)$ 为 $P[\xi^{-1}(A)|\mathcal{G}]$ 的一个版本，即 $\forall B\in\mathcal{G}$,

$$\int_B Q(\omega,A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A)),$$

或者等价地，(7.3.3) 式对 $(E,\mathcal{E})$ 上非负或有界的 Borel 可测函数成立.

7.3.4 注 若 $(E,\mathcal{E})=(\Omega,\mathcal{F}),\xi$ 为 Ω 上的恒等映射，则 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布就是 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 因此，正则条件概率存在性的研究可以归结为混合条件分布存在性的研究.

下一定理给出了混合条件分布存在的一个有用的充分条件.

7.3.5 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$(E,\mathcal{E})$ 为一可分可测空间，ξ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的一可测映射. 令 $\mu=P\xi^{-1}$，若 μ 是 $\mathcal{E}$ 上的紧测度 (见定义 4.5.4)，则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ 代数 $\mathcal{G}$，存在 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布.

证 由第 1 章知：存在 E 上一代数 $\mathcal{A}$，其元素个数至多可数，使得 $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{E}$. 此外，依假定，存在 E 上的一紧类 $\mathcal{C}\subset\mathcal{E}$，使得对每个 $A\in\mathcal{E}$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C)\mid\ C\subset A, C\in\mathcal{C}\}.$$

因此，设 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$，则 $\forall i,\exists C_{ik}\in\mathcal{C}, C_{ik}\subset A_i, k\geq 1$，使

$$\mu(A_i)=\sup_k\mu(C_{ik}),\ i=1,2,\cdots \tag{7.3.4}$$

对每个 $A\in\mathcal{E}$，令 $\widetilde{Q}(\omega,A)$ 为 $E[\xi^{-1}(A)|\mathcal{G}]$ 的一个版本，则

$$\begin{aligned}\mu(A_i)&=\sup_k\mu(C_{ik})=\sup_k P(\xi^{-1}(C_{ik}))\\&=\sup_k\int\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})dP\leq\int\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})dP\\&\leq\int\widetilde{Q}(w,A_i)dP=P(\xi^{-1}(A_i))=\mu(A_i).\end{aligned}$$

因此有

$$\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})=\widetilde{Q}(\omega,A_i)\quad\text{a.s..} \tag{7.3.5}$$

现令 $\mathcal{D}=\{C_{ik},i,k=1,2,\cdots\}$，并令 $\mathcal{A}_1$ 为由 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{D}$ 生成的代数，则 $\mathcal{A}_1$ 的元素仍为至多可数，且 $\sigma(\mathcal{A}_1)=\mathcal{E}$. 令

$$\begin{aligned}&\Omega_1=\{\omega\,|\,\widetilde{Q}(\omega,E)=1,\widetilde{Q}(\omega,A)\geq 0,\forall A\in\mathcal{A}_1\},\\&\Omega_2=\{\omega\,|\,\widetilde{Q}(\omega,\cdot)\text{ 在 }\mathcal{A}_1\text{ 上有限可加}\},\\&\Omega_3=\{\omega\,|\,\forall i\geq 1,\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})=\widetilde{Q}(\omega,A_i)\},\end{aligned}$$

则 Ω_1,Ω_2 及 Ω_3 都为 $\mathcal{G}$ 可测集，且 $P(\Omega_1)=P(\Omega_2)=P(\Omega_3)=1$. 由于 $\mathcal{D}$ 是紧集类，故由引理 4.5.3 知，对 $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3\doteq\Omega_0,\widetilde{Q}(\omega,\cdot)$ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ 可加的，从而可以唯一地扩张成为 $\mathcal{E}$ 上的一概率测度，我们用 $Q(\omega,\cdot)$ 表示之. 对 $\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$，我们令 $Q(\omega,\cdot)=\mu$，则 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的一族概率测度. 下面证明它为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 令

$$\mathcal{H}=\Big\{A\in\mathcal{E}\,|\ Q(\cdot,A)\text{ 为 }\mathcal{G}\text{ 可测，且 }\forall B\in\mathcal{G}\text{ 有}\\ \int_B Q(\omega,A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A))\Big\}.$$

依 $Q(\omega,A)$ 的定义，显然有 $\mathcal{A}\subset\mathcal{H}$. 此外，易见 $\mathcal{H}$ 为单调类，故 $\mathcal{H}=\mathcal{E}$(因 $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{E}$). 这表明 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 证毕.

下一定理是定理 7.3.5 的直接推论 (见注 7.3.4)，它给出了正则条件概率存在的一个充分条件.

7.3.6 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可分可测空间，P 为 $\mathcal{F}$ 上的一紧概率测度，则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ 代数 $\mathcal{G}$，存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

下面两个定理是定理 7.3.5 及 7.3.6 的直接推论.

7.3.7 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$(E,\mathcal{E})$ 为一 Radon 可测空间. 则对任何取值于 $(E,\mathcal{E})$ 的随机元 ξ 及 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ 代数 $\mathcal{G}$, 存在 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布.

7.3.8 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一 Radon 可测空间，P 为 $\mathcal{F}$ 上的一概率测度，则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ 代数 $\mathcal{G}$, 存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

对可分可测空间情形，下一定理进一步给出了正则条件概率存在的一个充要条件 (见参考文献 8).

7.3.9 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可分可测空间，f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(R,\mathcal{B}(R))$ 的可测映射，使得 f 在不同的原子上取不同的值，且使 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(\Omega)))=\mathcal{F}$. 令 P 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数，$\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 f 关于 $\mathcal{G}$ 混合条件分布. 则为要 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率存在，必须且只需存在 $\mathcal{G}$ 可测的概率为 1 的集合 Ω_0, 使得对每个 $\omega\in\Omega_0$, $Q^*(\omega,f(\Omega))=1$. 这里 $Q^*(\omega,\cdot)$ 表示 $Q(\omega,\cdot)$ 的外测度.

证 充分性. 设定理中所给条件满足. 对 $A\in\mathcal{F}$, 令

$$P(\omega,A)=\begin{cases}Q^*(\omega,f(A)), & \omega\in\Omega_0,\\ P(A), & \omega\notin\Omega_0,\end{cases}$$

往证 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 首先，对 $\omega\in\Omega_0$, 由于 $Q^*(\omega,f(\Omega))=1$, 故由习题 1.4.1 知，$Q^*(\omega,\cdot)$ 限于 $f(\Omega)\cap\mathcal{B}(R)=\mathcal{B}(f(\Omega))$ 为一概率测度，从而 $P(\omega,\cdot)$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 (由于依假定，$A\cap B=\emptyset\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\emptyset$). 此外，对任何 $A\in\mathcal{F}$, 存在 $B\in\mathcal{B}(R)$, 使 $f(A)=f(\Omega)\cap B$, 故有

$$P(\omega,A)=Q^*(\omega,f(A))=Q^*(\omega,f(\Omega)\cap B)=Q(\omega,B),\quad \omega\in\Omega_0.$$

因此，$P(\cdot,A)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测的，并且有

$$P(\omega,A)=Q(\omega,B)=P[f^{-1}(B)|\mathcal{G}]=P[A|\mathcal{G}]\quad \text{a.s.}.$$

这表明 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

必要性. 设存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$. 令

$$\widetilde{Q}(\omega,A)=P(\omega,f^{-1}(A)),A\in\mathcal{B}(f(\Omega)),$$

则易见 $\{\widetilde{Q}(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 f 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 对任何满足 $G\supset f(\Omega)$ 的 $G\in\mathcal{B}(R)$, 我们有 $f^{-1}(G)=\Omega$, 从而 $\widetilde{Q}(\omega,G)=1$, 因此，对一切 $\omega\in\Omega,\widetilde{Q}^*(\omega,f(\Omega))=1$. 设 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的可数代数，令

$$\Omega_0=\{\omega\,|\,Q(\omega,A_n)=\widetilde{Q}(\omega,A_n),\forall n\geq 1\},$$

则 Ω_0 为 $\mathcal{G}$ 可测集, 且 $P(\Omega_0)=1$. 此外, 对 $\omega\in\Omega_0,Q(\omega,\cdot)$ 与 $\widetilde{Q}(\omega,\cdot)$ 限于 $\mathcal{A}$ 一致, 从而在 $\mathcal{F}$ 上一致. 特别, 对 $\omega\in\Omega_0$ 有 $Q^*(\omega,f(\Omega))=1$.

下一结果称为**测度的分拆 (desintegration of measures)**(见参考文献 6), 它部分地推广了定理 7.2.15.

7.3.10 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数；$(S,\mathcal{S})$ 和 $(E,\mathcal{E})$ 为可测空间，X 为 $\mathcal{G}$ 可测 S 值随机元，Y 为一 E 值随机元. 假定 Y 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布 $Q(\omega,\cdot)$ 存在 (例如，若 $(E,\mathcal{E})$ 为 Radon 空间，则该条件成立). 令 $g(x,y)$ 为 $S\times E$ 上的 $\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ 可测函数，使得 $E[|g(X,Y)|]<\infty$, 则对几乎所有 $\omega\in\Omega$, $g(X(\omega),\cdot)$ 关于概率测度 $Q(\omega,\cdot)$ 可积，且有

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}]=\int_E g(X,y)Q(\cdot,dy)\quad \text{a.s.}. \tag{7.3.6}$$

证 不妨假定 $g(x,y)$ 为非负 $\mathcal{S}\times\mathcal{E}$ 可测函数. 令

$$G(x,\omega)=\int_E g(x,y)Q(\omega,dy),\quad x\in S.$$

则 $G(x,\omega)$ 为 $\mathcal{S}\times\mathcal{G}$ 可测，并且对一切 $x\in E$ 有

$$G(x,\cdot)=E[g(x,Y)|\mathcal{G}]\quad \text{a.s.}.$$

在空间 $(S\times E,\mathcal{S}\times\mathcal{E})$ 上用函数形式的单调类定理容易证明：对任意非负 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 Z, 有

$$E[g(X,Y)Z]=E[G(X,\cdot)Z].$$

于是有

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}]=G(X,\cdot)=\int_E g(X,y)Q(\cdot,dy)\quad \text{a.s.}.$$

定理证毕.

习 题

7.3.1 补足定理 7.3.12 的证明.

7.4 随机变量族的一致可积性

7.4.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{H}$ 为一族可积随机变量. 称 $\mathcal{H}$ 为**一致可积的**, 如果当 $C\to\infty$ 时，积分

$$\int_{[\,|\xi|\geq C]}|\xi|dP,\ \xi\in\mathcal{H}$$

一致趋于零.

下一定理给出了一个一致可积性准则.

7.4.2 定理 令 $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 则为要 $\mathcal{H}$ 为一致可积族，必须且只需下列条件成立：

(1) $a=\sup\{E|\xi|,\xi\in\mathcal{H}\}<+\infty$;

(2) 对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任何满足 $P(A)\leq\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$, 有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_A|\xi|dP\leq\varepsilon. \tag{7.4.1}$$

证 必要性. 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 对给定 $\varepsilon>0$, 取 C 足够大，使得

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{[\,|\xi|\geq C]}|\xi|dP\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，我们有

$$\int_A|\xi|dP\leq CP(A)+\int_{[\,|\xi|\geq C]}|\xi|dP. \tag{7.4.2}$$

在 (7.4.2) 式中令 $A=\Omega$ 得到条件 (1); 令 $\delta=\varepsilon/2C$ 得到条件 (2).

充分性. 设条件 (1) 及 (2) 成立. 对任给 $\varepsilon>0$, 选取 $\delta>0$ 使条件 (2) 中结论成立. 令 $C\geq a/\delta$, 则

$$P([\,|\xi|\geq C])\leq\frac{1}{C}E[\,|\xi|\,]\leq\frac{a}{C}\leq\delta,\ \xi\in\mathcal{H},$$

故由条件 (2) 知

$$\int_{[\,|\xi|\geq C]}|\xi|dP\leq\varepsilon,\ \xi\in\mathcal{H}.$$

这表明 $\mathcal{H}$ 是一致可积族. 证毕.

7.4.3 定理 设 $\mathcal{H}$ 是一致可积族，则 $\mathcal{H}$ 在 $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中的闭凸包也是一致可积的.

证 由定理 7.4.2 易知一致可积族在 L^1 中的闭包是一致可积的, 因此只需证 $\mathcal{H}$ 的凸包 $\mathcal{H}_1$ 是一致可积的. 显然 $\mathcal{H}_1$ 满足定理 7.4.2 的条件 (1). 往证 $\mathcal{H}_1$ 满足条件 (2). 对给定 $\varepsilon>0$, 选取 $\delta>0$, 使条件 (2) 中的结论对 $\mathcal{H}$ 成立. 则对任何 $n\geq 2,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in\mathcal{H}$ 及满足 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=1$ 的非负实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和对任何满足 $P(A)\leq\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$, 有

$$\int_A\Big|\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i\Big|dP\leq\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_A|\xi_i|dP\leq\varepsilon.$$

这表明 $\mathcal{H}_1$ 满足条件 (2), 故 $\mathcal{H}_1$ 为一致可积族. 证毕.

下一定理给出了 L^1 收敛准则.

7.4.4 定理 设 (ξ_n) 为一可积随机变量序列, ξ 为一实值随机变量. 则下列条件等价:

(1) $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$;

(2) $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, 且 (ξ_n) 为一致可积;

(3) $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, 且 $E|\xi_n| \to E|\xi| < \infty$.

证 (1)⇔(3) 见定理 3.2.9. 只需证 (1)⇔(2).

(1)⇒(2). 设 $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 令 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\int_A |\xi_n| dP \leq \int_A |\xi| dP + E[|\xi_n - \xi|]. \tag{7.4.3}$$

给定 $\varepsilon > 0$, 取一正数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $E[|\xi_n - \xi|] \leq \varepsilon/2$. 再选取 $\delta > 0$, 使得对任何满足 $P(A) \leq \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\int_A |\xi| dP \leq \frac{\varepsilon}{2}, \int_A |\xi_n| dP \leq \frac{\varepsilon}{2}, n = 1, 2, \cdots, N. \tag{7.4.4}$$

于是由 (7.4.3) 式及 (7.4.4) 式知, 对任何满足 $P(A) \leq \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有 $\sup_n \int_A |\xi_n| dP \leq \varepsilon$. 此外有 $\sup_n E[|\xi_n|] < \infty$. 故由定理 7.4.2 知, (ξ_n) 为一致可积族. 最后, 显然有 $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$.

(2)⇒(1). 设 (ξ_n) 一致可积, 且 $\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$. 由 Fatou 引理, $E[|\xi|] \leq \sup_n E[|\xi_n|] < +\infty$, 故 ξ 可积. 从而 $(\xi_n - \xi)$ 为一致可积. 对任给 $\varepsilon > 0$, 由定理 7.4.2 知, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何满足 $P(A) < \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\sup_n \int_A |\xi_n - \xi| dP \leq \varepsilon.$$

取 N 充分大, 使得当 $n \geq N$ 时, 有 $P([|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]) < \delta$. 于是当 $n \geq N$ 时, 我们有

$$E[|\xi_n - \xi|] = \int_{[|\xi_n - \xi| < \varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP + \int_{[|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP \leq 2\varepsilon,$$

这表明 $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 定理证毕.

下一定理给出了一致可积性的又一准则.

7.4.5 定理 设 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{H}$ 是一致可积的;

(2) 存在 $\mathbf{R}_+$ 上满足 $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ 的非负 Borel 函数 φ, 使得 $\sup_{\xi \in \mathcal{H}} E[\varphi \circ |\xi|] < \infty$.

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 由于对任何 $a > 0$, 有 $\int_\Omega (|\xi| - a)^+ dP \leq \int_{[|\xi| > a]} |\xi| dP$, 故存在自然数 $n_k \uparrow \infty$, 使得

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}} \int_\Omega (|\xi| - n_k)^+ dP < 2^{-k}, k \geq 1.$$

令

$$\varphi(t) = \sum_{k \geq 1} (n - n_k)^+, \ n \leq t < n+1, n = 0, 1, 2, \cdots$$

则 φ 非负, 单调非降且右连续. 此外有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k \geq 1} (1 - \frac{n_k}{n})^+ = \infty,$$

从而 $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$. 最后

$$\begin{aligned} E[\varphi \circ |\xi|] &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty (n - n_k)^+ P([n \leq |\xi| < n+1]) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty (n - n_k)^+ P([n \leq |\xi| < n+1]) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega (|\xi| - n_k)^+ dP < 1. \end{aligned}$$

(1)⇒(2) 得证.

(2)⇒(1). 设 (2) 成立. 对给定 $\varepsilon > 0$. 令 $a = M/\varepsilon$, 其中 $M = \sup_{\xi\in\mathcal{H}} E[\varphi\circ|\xi|]$. 选取充分大的 C, 使得当 $t \geq C$ 时, 有 $\varphi(t)/t \geq a$. 则在 $[\,|\xi| \geq C]$ 上, 我们有 $|\xi| \leq \dfrac{\varphi\circ|\xi|}{a}$, 故有

$$\int_{[\,|\xi|\geq C]} |\xi| dP \leq \frac{1}{a}\int_{[\,|\xi|\geq C]} \varphi\circ|\xi| dP \leq \frac{M}{a} = \varepsilon,\ \ \xi\in\mathcal{H}.$$

因此 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

7.4.6 系 设 $\mathcal{H} \subset L^p(\Omega,\mathcal{F},P), (p>1)$. 如果 $\sup_{\xi\in\mathcal{H}} E[\,|\xi|^p] < \infty$, 则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

证 令 $\varphi(t) = t^p, t \geq 0$. 由定理 7.4.5 立得系的结论. 另一直接证明如下: 令 $a = \sup_{\xi\in\mathcal{H}} E[\,|\xi|^p]$, 则 $\forall C > 0$, 有

$$\int_{[\,|\xi|>C]} |\xi| dP \leq \int_{[\,|\xi|>C]} \frac{|\xi|^p}{C^{p-1}} dP \leq \frac{1}{C^{p-1}} E[\,|\xi|^p] \leq \frac{a}{C^{p-1}},$$

故由定义知, $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

7.4.7 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, ξ 为一可积随机变量, $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 令 $\eta_i = E[\xi|\,\mathcal{G}_i]$, 则 $(\eta_i, i\in I)$ 为一致可积族.

证 对任何 $C > 0$, 我们有

$$P([\,|\eta_i| \geq C]) \leq \frac{1}{C}E[\,|\eta_i|\,] \leq \frac{1}{C}E[\,|\xi|\,],\ i\in I,$$

于是有 (注意 $|\eta_i| \geq C \in \mathcal{G}_i$)

$$\begin{aligned}\int_{[\,|\eta_i|\geq C]} |\eta_i| dP &\leq \int_{[\,|\eta_i|\geq C]} |\xi| dP \leq \delta P([\,|\eta_i|\geq C]) + \int_{[\,|\xi|\geq\delta]} |\xi| dP \\ &\leq \frac{\delta}{C}E[\,|\xi|\,] + \int_{[\,|\xi|\geq\delta]} |\xi| dP.\end{aligned}$$

对 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$, 使得 $\int_{[\,|\xi|\geq\delta]} |\xi| dP \leq \varepsilon/2$. 则当 $C \geq (2\delta/\varepsilon)E[\,|\xi|\,]$ 时, 有 $\int_{[\,|\eta_i|\geq C]} |\eta_i| dP \leq \varepsilon, i\in I$. 这表明 $(\eta_i, i\in I)$ 为一致可积族.

下面我们进一步研究一致可积随机变量族的性质. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 为可积随机变量. 如果对一切有界随机变量 η, 有 $\lim_{n\to\infty} E[\xi_n\eta] = E[\xi\eta]$, 则称 ξ_n 在 L^1 中弱收敛于 ξ(见定义 3.4.16).

7.4.8 引理 设 (ξ_n) 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上一可积随机变量序列, 则为要 ξ_n 在 L^1 中弱收敛于某可积随机变量 ξ, 必须且只需对每个 $A\in\mathcal{F}$, $E[\xi_n I_A]$ 的极限存在且有穷.

证 必要性显然. 往证充分性. 设引理的条件成立. 令 μ_n 为 ξ_n 关于 P 的不定积分, 由 Vitali-Hahn-Saks 定理 (定理 3.3.15) 知, $\sup_n \|\mu_n\| = \sup_n E[\,|\xi_n|\,] < \infty$. 此外, 存在 $\mathcal{F}$ 上一有限测度 μ, 使对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$, 且有 $\mu \ll P$. 令 $\xi = \frac{d\mu}{dP}$. 则易见 ξ_n 弱收敛于 ξ.(这里用到习题 2.1.3 及 $\sup_n E[\,|\xi_n|\,] < \infty$ 这一事实.)

下一定理是著名的 **Dunford-Pettis 弱紧性准则** 的一个部分 (对概率论最有用的部分).

7.4.9 定理 设 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{H}$ 为一致可积族;

(2) 对 $\mathcal{H}$ 中的任一序列 (ξ_n), 存在其子列 (ξ_{n_k}), 使之在 L^1 中弱收敛.

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 令 (ξ_n) 为 $\mathcal{H}$ 中的一序列, $\mathcal{G} = \sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots)$, 则 $\mathcal{G}$ 为一可分的 σ 代数, 故存在一可数代数 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots\}$, 使 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}$. 由对角线法则, 可选 (ξ_n) 的子列 (ξ_{n_k}) 使得对一切 $j \geq 1$, 极限 $\lim_{k\to\infty} E[\xi_{n_k} I_{A_j}]$ 存在且有穷. 令

$$\mathcal{H} = \{A\in\mathcal{G}\,|\,\lim_{k\to\infty} E[\xi_{n_k} I_A]\text{存在且有穷}\}.$$

利用 (ξ_{n_k}) 的一致可积性 (见定理 7.4.2) 不难看出 $\mathcal{H}$ 为一单调类. 由于 $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, 故由单调类定理知 $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. 于是由引理 7.4.8 知, (ξ_{n_k}) 在 $L(\Omega,\mathcal{G},P)$ 中弱收敛, 从而对一切有界 $\mathcal{G}$ 可测随机变量 η,

极限 $\lim E[\xi_{n_k}\eta]$ 存在且有穷. 现设 $A\in\mathcal{F}$, 令 $\eta=E[I_A|\mathcal{G}]$, 则有 $E[\xi_{n_k}I_A]=E[E[\xi_{n_k}I_A|\mathcal{G}]]=E[\xi_{n_k}\eta]$, 从而极限 $\lim\limits_{k\to\infty}E[\xi_{n_k}I_A]$ 存在且有穷. 再由引理 7.4.8 知, (ξ_{n_k}) 在 $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中弱收敛.

(2)⇒(1). 我们用反证法. 假定 (1) 不成立, 则存在 $\mathcal{H}$ 中一序列 (ξ_n), 使得: 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}E[|\xi_n|]=\infty$; 或者存在某 $\varepsilon>0$ 和 $\mathcal{F}$ 中的一列集合 $(A_n,n\ge 1)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=0$, 且 $\inf\limits_n\int_{A_n}|\xi_n|\ge\varepsilon$. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理知, 该序列不可能有弱收敛子列.

习 题

7.4.1 设 (ξ_n) 为一致可积随机变量序列, 则有

$$\lim_{n\to\infty}E[\frac{1}{n}\sup_{1\le k\le n}|\xi_k|]=0.$$

7.4.2 设 $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 若 $\mathcal{H}$ 满足如下条件:

$$A_n\in\mathcal{F},A_n\downarrow\phi\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP=0,$$

则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F},P(A)<\delta\Rightarrow\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_A|\xi|dP\le\varepsilon.$$

7.4.3 设 $\mathcal{H}_1$ 及 $\mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族. 令

$$\mathcal{H}=\{\xi_1+\xi_2\,|\,\xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

7.5 本性上确界

7.5.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{H}$ 为随机变量的非空族. 称随机变量 η 为 $\mathcal{H}$ 的**本性上确界**, 如果 η 满足下列条件:

(i) 对一切 $\xi\in\mathcal{H}$, 有 $\xi\le\eta$ a.s.;

(ii) 设 η' 为任一随机变量, 使得对一切 $\xi\in\mathcal{H}$ 有 $\xi\le\eta'$ a.s., 则有 $\eta\le\eta'$ a.s..

容易看出: 若 $\mathcal{H}$ 的本性上确界存在, 则必唯一 (不计 a.s. 相等的两个随机变量的差别), 我们用 $\operatorname{ess.sup}\limits_{\xi\in\mathcal{H}}\xi$ 或 $\operatorname{ess.sup}\mathcal{H}$ 表示之.

在上述 (i) 及 (ii) 中将不等号反向, 就得到本性下确界的定义. $\mathcal{H}$ 的本性下确界记为 $\operatorname{ess.inf}\limits_{\xi\in\mathcal{H}}\xi$ 或 $\operatorname{ess.inf}\mathcal{H}$.

下一定理表明, 随机变量的非空族的本性上 (下) 确界总存在.

7.5.2 定理 令 $\mathcal{H}$ 为随机变量的非空族. 则 $\mathcal{H}$ 的本性上 (下) 确界存在, 且有 $\mathcal{H}$ 中的至多可数个元素 (ξ_n), 使得

$$\operatorname{ess.sup}\mathcal{H}=\bigvee_n\xi_n,\ \ (\operatorname{ess.inf}\mathcal{H}=\bigwedge_n\xi_n).$$

若进一步, $\mathcal{H}$ 对取有限上 (下) 端运算封闭 (即: $\xi,\eta\in\mathcal{H}\Rightarrow\exists f\in\mathcal{H}$, 使得 $f=\xi\vee\eta(f=\xi\wedge\eta)$, a.s.), 则 (ξ_n) 可取为一 a.s. 单调增 (降) 序列.

证 只考虑本性上确界情形. 第二结论显然. 为证第一结论, 不妨设 $\mathcal{H}$ 中的元一致有界, 否则可以考虑随机变量族 $\overline{\mathcal{H}}=\{\operatorname{arctg}\xi\,|\,\xi\in\mathcal{H}\}$. 此外, 显然可以进一步假定 $\mathcal{H}$ 对取有限上端运算封闭. 这时, 令 $(\xi_n)\subset\mathcal{H}$ 为一单调增序列, 使得

$$\lim_{n\to\infty}E[\xi_n]=\sup_{\xi\in\mathcal{H}}E[\xi].$$

令 $\eta=\bigvee_n\xi_n$, 往证 η 为 $\mathcal{H}$ 的本性上确界. 为此只需验证定义 7.5.1 中的两个条件. 条件 (ii) 显然成立, 故只需证条件 (i) 成立. 设 $\xi\in\mathcal{H}$, 令 $\xi_n'=\xi_n\vee\xi$, 则 $(\xi_n')\subset\mathcal{H}$, (ξ_n') 单调增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n'=\eta\vee\xi$, 我们有

$$E[\eta\vee\xi]=\lim_{n\to\infty}E[\xi_n']\le\sup_{\xi\in\mathcal{H}}E[\xi]=E[\eta].$$

由于 $\eta\vee\xi\geq\eta$, 上式表明 $\eta\vee\xi=\eta$ a.s., 此即 $\eta\geq\xi$ a.s.. 条件 (i) 得证. 定理证毕.

注 令 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间. 设 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$, 且 $\mathcal{C}$ 非空. 令

$$\mathcal{H}=\{I_C\,|\,C\in\mathcal{C}\},$$

则由定理知, 存在 $(C_n)\subset\mathcal{C}$, 使得

$$I_{\cup_n C_n}=\vee I_{C_n}=\text{ess.sup}\,\mathcal{H}.$$

我们称 $\bigcup\limits_n C_n$ 为 $\mathcal{C}$ 的本性上确界, 并用 ess.sup$\mathcal{C}$ 记之. 类似定义 $\mathcal{C}$ 的本性下确界.

下一定理称为 **Halmos-Savage 定理**.

7.5.3 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的一族 P 绝对连续的概率测度, 且对可列凸组合封闭. 如果对任一 $P(A)>0$ 的 $A\in\mathcal{F}$, 存在 $Q\in\mathcal{M}$, 使得 $Q(A)>0$, 则存在 $Q_0\in\mathcal{M}$, 使得 Q_0 与 P 等价.

证 令 $\mathcal{S}=\left\{\left[\frac{dQ}{dP}>0\right]\,|\,Q\in\mathcal{M}\right\}$. 由于 $\mathcal{M}$ 对可列凸组合封闭, $\mathcal{S}$ 对集合可列并运算 a.s. 封闭. 于是存在 $Q_0\in\mathcal{M}$, 使得 $\left[\frac{dQ_0}{dP}>0\right]$ =ess.sup $\mathcal{S}$, 即有

$$P\left(\left[\frac{dQ_0}{dP}>0\right]\right)=\sup\left\{P(S)\,|\,S\in\mathcal{S}\right\}.$$

往证 Q_0 与 P 等价. 令 $S_0=\left[\frac{dQ_0}{dP}>0\right]$, 只需证 $P(S_0)=1$. 如果 $P(S_0)<1$, 则依假定存在 $Q_1\in\mathcal{M}$, 使 $Q_1(\Omega\setminus S_0)>0$. 于是若令 $Q=\frac{Q_0+Q_1}{2}$, 则 $Q\in\mathcal{M}$, 且 $P\left(\left[\frac{dQ}{dP}>0\right]\right)>P\left(\left[\frac{dQ_0}{dP}>0\right]\right)$, 这导致矛盾. 定理证毕.

下一定理 (见参考文献 11) 在鞅论及金融数学中有重要应用.

7.5.4 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, K 为 L^1 中的一凸集, 且 $0\in K$. 则下列三个条件等价:

(1) 对任一 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$, 存在 $c>0$, 使 $c\eta\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$;

(2) 对任一非不足道 $A\in\mathcal{F}$, 存在 $c>0$, 使 $cI_A\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$;

(3) 存在 $\zeta\in L^\infty$ 使得 $\zeta>0$ a.s. 且 $\sup_{\xi\in K}E[\zeta\xi]<\infty$.

这里 $\overline{B}$ 表示 B 在 L^1 中的闭包.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然. 往证 (2) $\Rightarrow$ (3). 令 $A\in\mathcal{F}$ 且 $P(A)>0$. 由假设, 存在 $c>0$ 使 $cI_A\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$. 由于 $K-(L^\infty)^+$ 是 L^1 中的凸集, L^∞ 是 L^1 的对偶空间, 由泛函分析中的 Hahn-Banach 定理知, 存在 $\theta\in L^\infty$ 使

$$\sup_{\xi\in K,\eta\in(L^\infty)^+}E[\theta(\xi-\eta)]<cE[\theta I_A]. \tag{7.5.1}$$

在 (7.5.1) 式中取 $\xi=0$, $\eta=a\theta^-$, 及 $a>0$ 得到

$$aE[(\theta^-)^2]<cE[\theta I_A]. \tag{7.5.2}$$

由于 (7.5.2) 式对一切 $a>0$ 成立, 必有 $\theta^-=0$ a.s., 即 $\theta\in(L^\infty)^+$. 此外, 显然有 $P(\theta>0)>0$. 若以 $\dfrac{\theta}{E[\theta]}$ 代替 θ, 可假定 $E[\theta]=1$. 于是由 (7.5.1) 式得 $\sup_{\xi\in K}E[\theta\xi]<c$. 令

$$H=\{\theta\in(L^\infty)^+\,|\,E[\theta]=1,\ \sup_{\xi\in K}E[\theta\xi]<\infty\}.$$

我们已证 H 非空. 令 $\mathcal{C}=\{[\theta=0]\,|\,\theta\in H\}$. 往证 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭. 设 $(\theta_n)\subset H, c_n=\sup_{\xi\in K}E[\theta_n\xi]$, $d_n=\|\theta_n\|_{L^\infty}$. 取严格正实数列 (b_n), 满足

$$\sum_n b_n=1,\ \ \sum_n c_nb_n<\infty,\ \ \sum_n b_nd_n<\infty.$$

设 $\theta=\sum_n b_n\theta_n$. 显然 $\theta\in H$ 且 $[\theta=0]=\bigcap_n[\theta_n=0]$. 这表明 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭. 于是存在 $\zeta\in H$, 使

$$P([\zeta=0])=\inf_{\theta\in H}P([\theta=0]). \tag{7.5.3}$$

往证 $\zeta > 0$, a.s.. 假定 $P([\zeta = 0]) > 0$. 令 $A = [\zeta = 0]$, 由上所证, 存在 $\theta \in H$ 使 (7.5.1) 式成立. 特别有 $E[\theta I_{[\zeta=0]}] > 0$. 这蕴含 $P([\theta > 0] \cap [\zeta = 0]) > 0$. 从而 $P([\theta = 0] \cap [\zeta = 0]) < P([\zeta = 0])$. 但 $[\theta = 0] \cap [\zeta = 0] \in \mathcal{C}$, 这与 (7.5.3) 式矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 (1) 不成立. 则存在 $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}$ 使对所有 $c > 0$ 都有 $c\eta \in \overline{K - (L^\infty)^+}$. 对每个 n 存在 $\xi_n \in K, \eta_n \in (L^\infty)^+$ 及 $\delta_n \in L^1$ 使 $n\eta = \xi_n - \eta_n - \delta_n$, 且 $\|\delta_n\|_{L^1} < \dfrac{1}{n}$. 我们有 $\xi_n \geq n\eta + \delta_n$, 且对任一严格正的随机变量 ζ 有

$$\sup_{\xi \in K} E[\zeta\xi] \geq \sup_n E[\zeta\xi_n] = +\infty,$$

这表明 (3) 不成立. (3) $\Rightarrow$ (1) 得证.

7.5.5 系 设 K 是 L^1 中一凸集. 若对 K 中的任一点列 (ξ_n), 有 $\dfrac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ (或者等价地, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $c > 0$ 使 $\forall \xi \in K$, $P(\xi > c) < \varepsilon$.), 则存在 $\zeta \in L^\infty$, 使 $\zeta > 0$, a.s. 且 $\sup_{\xi \in K} E[\zeta\xi] < \infty$.

证 只需证明定理 7.5.4 的条件 (1) 成立. 不妨设 $0 \in K$, 否则任取 $\eta \in K$, 以 $\{x - \eta \,|\, x \in K\}$ 代替 K. 从定理 7.5.4 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明看出, 若 (1) 不成立, 则存在 $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}$, $(\xi_n) \subset K$ 及 $(\delta_n) \subset L^1$, 使得对每个 n, 有 $\|\delta_n\|_{L^1} \leq \dfrac{1}{n}$ 及 $\dfrac{\xi_n}{n} \geq \eta + \dfrac{\delta_n}{n}$. 这与 $\dfrac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ 矛盾. 证毕.

下一定理给出了本性下确界与条件期望可交换的一个充要条件 (见参考文献 12).

7.5.6 定理 设 $\mathcal{H} \subset L^1$ 满足 $\inf\{E[\xi] \,|\, \xi \in \mathcal{H}\} > -\infty$, 则下列条件等价:

(1) 对任意的 $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta_3 \in \mathcal{H}$, 使得

$$E[(\eta_3 - \eta_1 \wedge \eta_2)^+] < \varepsilon;$$

(2) $E[\mathrm{ess.inf}\,\mathcal{H}] = \inf\{E[\xi] \,|\, \xi \in \mathcal{H}\}$;

(3) $\mathrm{ess.inf}\,\mathcal{H}$ 可积, 且对每个 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{G}$, 有

$$E[\mathrm{ess.inf}\,\mathcal{H} \,|\, \mathcal{G}] = \mathrm{ess.inf}\,\{E[\xi \,|\, \mathcal{G}] \,|\, \xi \in \mathcal{H}\}. \tag{7.5.4}$$

证 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 (1) 成立. 取 $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\xi_n] = \inf_{\xi \in \mathcal{H}} E[\xi] \doteq h$. 对给定 $\varepsilon > 0$, 令 $\eta_1 = \xi_1$, 并归纳选取 $\eta_n \in \mathcal{H}$, 使 $E[(\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+] < 1/2^{n-1}$, $n \geq 2$. 令 $\delta_n = (\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+$, $n \geq 2$, $\delta_1 = 0$, 并令

$$\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k, \quad \eta_n' = \eta_n + \gamma_n, \quad n \geq 1.$$

则有

$$\eta_{n+1}' = \eta_{n+1} + \gamma_{n+1} \leq (\eta_n + \delta_{n+1}) + \gamma_{n+1} = \eta_n', \quad n \geq 1.$$

于是 η_n' 单调下降趋于一极限 η'. 由于

$$h \leq E[\eta_n] \leq E[\xi_n] + E[\delta_n], \ E[\eta_n'] = E[\eta_n] + E[\gamma_n],$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\delta_n] = \lim\limits_{n\to\infty} E[\gamma_n] = 0$, 我们有

$$E[\eta'] = \lim_{n\to\infty} E[\eta_n'] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n] = h.$$

现令 $\xi^* = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \xi_n$, 往证 $E[\xi^*] = h$ 及 $\xi^* = \mathrm{ess.inf}\,\mathcal{H}$, 由此推得 (2). 我们有 (注意 $\delta_1 = 0$)

$$\eta_n' = \eta_n + \gamma_n \leq \xi_n + \delta_n + \gamma_n \leq \xi_n + \gamma_1, \quad n \geq 1,$$

从而

$$\eta' = \bigwedge_n \eta_n' \leq \bigwedge_n (\xi_n + \gamma_1) = \xi^* + \gamma_1.$$

因此有

$$E[\xi^*] \geq E[\eta'] - E[\gamma_1] \geq h - \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，且 $E[\xi^*]\le\inf_n E[\xi_n]=h$，故有 $E[\xi^*]=h$. 另一方面，对任一 $\xi_0\in\mathcal{H}$，考虑序列 $(\xi_n, n\ge 0)$. 由已证结果得

$$E[\xi_0\wedge\xi^*]=E[\bigwedge_{k=0}^{\infty}\xi_k]=h=E[\xi^*],$$

由此知 $\xi_0\ge\xi^*$, a.s.. 于是最终有 $\xi^*=\text{ess.inf}\,\mathcal{H}$. (1) $\Rightarrow$ (2) 得证.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 (2) 成立. 令 $\xi^*=\text{ess.inf}\,\mathcal{H}$. 依假定有 $E[\xi^*]=\inf_{\xi\in\mathcal{H}}E[\xi]\doteq h$. 于是对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\xi\in\mathcal{H}$ 使 $E[\xi]\le h+\varepsilon$, 即 $E[\xi-\xi^*]\le\varepsilon$, 这蕴含 (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 (1) 成立. 令 $\mathcal{H}'=\{E[\xi|\mathcal{G}]\,|\,\xi\in\mathcal{H}\}$. 对任给 $\eta_1,\eta_2,\eta_3\in\mathcal{H}$, 由 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}(E[\eta_3|\mathcal{G}]-E[\eta_1|\mathcal{G}]\wedge E[\eta_2|\mathcal{G}])^+&\le(E[\eta_3-\eta_1\wedge\eta_2|\mathcal{G}])^+\\&\le E[(\eta_3-\eta_1\wedge\eta_2)^+|\mathcal{G}],\end{aligned}$$

从而 $\mathcal{H}'$ 满足条件 (1). 对任给 $A\in\mathcal{H}$, 令

$$\mathcal{H}_A=\{I_A\xi\,|\,\xi\in\mathcal{H}\},\quad \mathcal{H}'_A=\{I_A\xi\,|\,\xi\in\mathcal{H}'\}.$$

显然 $\mathcal{H}_A$ 及 $\mathcal{H}'_A$ 满足 (1). 因此由 (1) $\Rightarrow$ (2) 有

$$\begin{aligned}E[I_A\text{ess.inf}\,\mathcal{H}]&=E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}_A]=\inf_{\xi\in\mathcal{H}}E[\xi I_A]\\&=\inf_{\xi\in\mathcal{H}}E[E[\xi|\mathcal{G}]I_A]=\inf_{\eta\in\mathcal{H}'_A}E[\eta]\\&=E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}'_A]\\&=E[I_A\text{ess.inf}\,\mathcal{H}'],\end{aligned}$$

由此推得 (7.5.4) 式.

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然. 事实上, 在 (7.5.4) 式中令 $\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$ 即得 (2).

习 题

7.5.1 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ 代数, $A\in\mathcal{F}$, 则

$$[E[I_A|\mathcal{G}]>0]=\text{ess.inf}\,\{B\in\mathcal{G}\,|\,B\supset A\},$$

$$[E[I_A|\mathcal{G}]=1]=\text{ess.sup}\,\{B\in\mathcal{G}\,|\,B\subset A\}.$$

7.5.2 设 $(\xi,\xi_n,n\ge 1)$ 为一列实值随机变量, 令

$$s\text{-}\limsup_n\xi_n=\text{ess.inf}\,\{\eta\,|\,\lim_n P(\xi_n>\eta)=0\},$$

$$s\text{-}\liminf_n\xi_n=\text{ess.sup}\,\{\eta\,|\,\lim_n P(\xi_n<\eta)=0\},$$

则

$$\liminf_n\xi_n\le s\text{-}\liminf_n\xi_n\le s\text{-}\limsup_n\xi_n\le\limsup_n\xi_n,$$

$$\xi_n\xrightarrow{\text{P}}\xi\Leftrightarrow s\text{-}\limsup_n\xi_n=s\text{-}\liminf_n\xi_n.$$

7.5.3 设定理 7.5.6 中的三个等价条件之一成立. 令 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$, 使得 $\inf_{\xi\in\mathcal{K}}E[\xi]=\inf_{\xi\in\mathcal{H}}E[\xi]$, 则 $\text{ess.inf}\,\mathcal{K}=\text{ess.inf}\,\mathcal{H}$, 且有

$$E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}|\,\mathcal{G}]=\text{ess.inf}\{E[\xi|\mathcal{G}]\,|\,\xi\in\mathcal{K}\}.$$

7.6 解析集与 Choquet 容度

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. 本节主要介绍 $\mathcal{F}$ 解析集的概念和基本性质, 并借助于 Choquet 容度证明 $\mathcal{F}$ 解析集是普遍可测集.

7.6.1 定义 设 F 为一抽象集合, $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$. 令 A 为 F 的一子集, 如果存在一可距离化紧拓扑空间 E 及 $E\times F$ 的一子集 $B\in(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 A 为 B 在 F 上的投影, 则称 A 为 **$\mathcal{F}$解析集**. 这里 $\mathcal{K}(E)$ 表示 E 中紧子集全体, $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}=\{K\times G\,|\,K\in\mathcal{K}(E),G\in\mathcal{F}\}$.

今后用 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 解析集全体，由定义立刻推知如下

7.6.2 引理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{F}$. 则:

(1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$;

(2) $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow$ 存在 $B \in \mathcal{F}_\sigma$, 使 $B \supset A$;

(3) $F \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}_\sigma$;

(4) 若 $\mathcal{G}$ 为 F 上一集类，且 $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

7.6.3 定理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并及可列交运算封闭.

证 设 $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F}), n \geq 1$. 依定义，对每个 n, 存在一可距离化紧空间 E_n 及 $E_n \times F$ 的一子集 $B_n \in (\mathcal{K}(E_n) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 A_n 为 B_n 在 F 上的投影. 令 E 为乘积拓扑空间 $\prod\limits_n E_n$，则易知 E 是可距离化的紧空间. 令 $C_n = E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times B_n \times E_{n+1} \cdots$(下面简记为 $\prod\limits_{m\neq n} E_m \times B_n$), 则有

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_n \pi(C_n) = \pi(\bigcap_n C_n), \tag{7.6.1}$$

这里 π 表示 $E \times F$ 到 F 上的投影，并将 C_n 视为 $E \times F$ 的子集. 设 $B_n = \bigcap\limits_k B_{n,k}$, 其中 $B_{n,k} \in (K(E_n) \otimes \mathcal{F})_\sigma, k \geq 1$. 由于 $\prod\limits_{m\neq n} E_m \times B_{n,m} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_\sigma$, 故 $C_n \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 从而 $\bigcap\limits_n C_n \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 由 (7.6.1) 式知 $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列交运算封闭.

现令 E 为 (E_n) 的拓扑和 $\sum\limits_n E_n$ 的单点紧化，则 E 为可距离化紧空间. 我们将 $\sum\limits_n (E_n \times F)$ 与 $(\sum_n E_n) \times F$ 视为同一，并用 π 表示 $E \times F$ 到 F 上的投影，则有

$$\pi(\sum_n B_n) = \bigcup_n A_n. \tag{7.6.2}$$

由于 $\sum\limits_n B_{n,k} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_\sigma$, 且 $\forall n \neq m, B_{n,k} \cap B_{m,j} = \emptyset$, 故有

$$\sum_n B_n = \sum_n \bigcap_k B_{n,k} = \bigcap_k \sum_n B_{n,k} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}.$$

于是由 (7.6.2) 式知，$\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并运算封闭. 定理证毕.

7.6.4 引理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 令 E 为一可距离化紧空间. 则 $\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})$,$A$ 到 F 上投影为 $\mathcal{F}$ 解析集.

证 依定义, 存在一可距离化紧空间 G 及 $(\mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 的一元素 A_1, 使得 A 为 A_1 在 $E \times F$ 上的投影. 但 $G \times E$ 为可距离化紧空间，$\mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{K}(E) \subset \mathcal{K}(G \times E)$, 且 A_1 在 F 上的投影与 A 在 F 上的投影一致，故 $\pi(A)$ 为 $\mathcal{F}$ 解析集 (因为依定义 $\pi(A_1)$ 为 $\mathcal{F}$ 解析集). 证毕.

7.6.5 定理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 则有:

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$;

(2) 为要 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 必须且只需: $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

证 (1) 设 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$, 则存在一可距离化紧空间 E 及一 $A' \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))_{\sigma\delta}$, 使得 A 为 A' 在 F 上的投影. 但显然有

$$\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F}),$$

故由定理 7.6.3 知 $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})$. 因此，由引理 7.6.4 知 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.(1) 得证.

(2) 只需证充分性. 设 (2) 中条件成立. 令

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \,|\, A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})\},$$

则 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, 并由定理 7.6.3 知，$\mathcal{G}$ 为 σ 代数，故 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 证毕.

7.6.6 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间. 则有:

(1) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X)), \mathcal{A}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$;

(2) $\mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F})$;

(3) $\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}), A$ 在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$ 解析集.

证 (1) 设 $K \in \mathcal{K}(X)$, 则 K^c 为开集. 令 $\mathcal{U}$ 为 X 的可数基, 则对每个 $x \in K^c$, 存在开集 U, 其闭包为紧集, 使得 $x \in U \subset \overline{U} \subset K^c$. 于是存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得 $\overline{V}$ 为紧集, 且 $x \in V \subset \overline{V} \subset K^c$. 令 $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{U} \,|\, \overline{V}$ 为紧集, 且 $\overline{V} \subset K^c\}$, 则 $\mathcal{V}$ 为可数类, 且 $K^c = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$, 故 $K^c \in \mathcal{K}(X)_\sigma$, 从而 $K^c \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$. 由于 $\sigma(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{B}(X)$. 故由定理 7.6.5 知, $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$, 从而有 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$.

(2) $B \in \mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}$, 则 $B^c \in (\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})$. 又由于 $\sigma(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{F}$, 故 $\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})$(定理 7.6.5(2)). 因此由定理 7.6.5(1) 知, $\mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F})$.

(3) 由于 X 是 σ 紧的 (习题 5.1.8), 存在 $K_n \in \mathcal{K}(X), n \geq 1$, 使 $X = \bigcup\limits_n K_n$. 对每个 n, 我们有 (见习题 7.6.1)

$$
\begin{aligned}
&(K_n \times \Omega) \cap \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) \\
&= \mathcal{A}((K_n \times \Omega) \cap (\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})) \\
&= \mathcal{A}((K_n \cap \mathcal{K}(X)) \otimes \mathcal{F}).
\end{aligned}
$$

由于 K_n 为可距离化紧空间, 且 $\mathcal{K}(K_n) = K_n \cap \mathcal{K}(X)$, 故对任何 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}), (K_n \times \Omega) \cap A$ 在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$ 解析集 (引理 7.6.4). 但 $A = \bigcup\limits_n [(K_n \times \Omega) \cap A]$, 故 A 在 Ω 上的投影也是 $\mathcal{F}$ 解析集. 证毕.

下面我们定义 Choquet 容度.

7.6.7 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 它对有限并及有限交运算封闭, 且 $\emptyset \in \mathcal{F}$. 令 $\mathcal{A}(F)$ 表示 F 的所有子集全体, I 为 $\mathcal{A}(F)$ 上的一非负集函数. 称 I 为 F 上的一 **Choquet $\mathcal{F}$容度**, 如果 I 具有下列性质:

(1) I 单调非降: $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$;

(2) I 从下连续: $A_n \uparrow A \Rightarrow I(A_n) \uparrow I(A)$;

(3) I 沿 $\mathcal{F}$ 从上连续: $A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow A \Rightarrow I(A_n) \downarrow I(A)$.

F 的子集 A 称为 **I可容的**, 如果

$$
I(A) = \sup\{I(B) \,|\, B \subset A, B \in \mathcal{F}_\delta\}. \tag{7.6.3}
$$

7.6.8 引理 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$ 容度, 则 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 中每个元素都是 I 可容的.

证 设 $A \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$, 若 $I(A) = -\infty$, 则 $I(\emptyset) = -\infty$. 故 (7.6.3) 式成立. 现设 $I(A) > -\infty$, 令 $A_{n,m} \in \mathcal{F}$, 使得 $A = \bigcap\limits_n \bigcup\limits_m A_{n,m}$. 由于 $\mathcal{F}$ 对有限并运算封闭, 故不妨设对固定 $n, (A_{n,m}, m \geq 1)$ 为非降序列. 令 $A_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, n \geq 1$. 为证 (7.6.3) 式, 只需证明: 对任何 $a < I(A)$, 存在 $B \in \mathcal{F}_\delta, B \subset A$, 使 $I(B) \geq a$.

现设 $a < I(A)$, 由 I 的从下连续性, 我们有

$$
I(A) = I(A \cap A_1) = \lim_{m \to \infty} I(A \cap A_{1,m}).
$$

故存在 m_1, 使 $I(A \cap A_{1,m_1}) > a$. 这时有

$$
I(A \cap A_{1,m_1}) = I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_2) = \lim_{m \to \infty} I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_{2,m}),
$$

于是存在 m_2, 使 $I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_{2,m_2}) > a$. 依此类推, 我们得到一自然数列 $(m_k)_{k \geq 1}$, 使得对一切 $k \geq 1$, 有

$$
I(A \cap A_{1,m_1} \cap \cdots \cap A_{k,m_k}) > a.
$$

令 $B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_{k,m_k}, B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$, 则 $B_n\in\mathcal{F}, B_n\downarrow B\in\mathcal{F}_\delta$. 由于 $I(B_n)>a$, 故由 I 沿 $\mathcal{F}$ 的从上连续性知, $I(B)=\lim_{n\to\infty}I(B_n)\geq a$. 由于 $B_n\subset A_n$, 故 $B\subset A$. 引理证毕.

下一定理称为 **Choquet 定理**.

7.6.9 定理 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$ 容度, 则一切 $\mathcal{F}$ 解析集都是 I 可容的.

证 设 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 则存在一可距离化紧空间 E 及一 $B\in(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 $A=\pi(B)$. 这里 π 为 $E\times F$ 到 F 上的投影. 令 $\mathcal{H}=(\mathcal{H}(E)\otimes\mathcal{F})_{\cup f}$($\mathcal{C}_{\cup f}$ 表示用有限并运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得集类), 由于 $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}$ 对有限交运算封闭, 故 $\mathcal{H}$ 亦然. 此外有 $\mathcal{H}_{\sigma\delta}=(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 令

$$J(H)=I(\pi(H)),\ H\supset E\times F,$$

往证 J 为 $E\times F$ 上的 Choquet $\mathcal{H}$ 容度. 显然 J 满足定义 7.6.7 中的性质 (1) 及 (2). 剩下只需验证性质 (3).

设 $H\in\mathcal{H}, H=\bigcup_{k=1}^{m}(C_k\times D_k)$, 其中 $C_k\in\mathcal{K}(E)$, $D_k\in\mathcal{F}$, 则对 $x\in\pi(H)$, 我们有 $(E\times\{x\})\cap H=C\times\{x\}$, 其中 $C\neq\emptyset$, 且

$$C=\bigcup_{\{k\,|\,x\in D_k\}}C_k\in\mathcal{K}(E).$$

现设 $B_n\in\mathcal{H}, B_n\downarrow$. 令 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\pi(B_n)$, 则对每个 n, 存在 $C_n\in\mathcal{K}(E)$, 使得

$$(E\times\{x\})\cap B_n=C_n\times\{x\}.$$

由于 $B_n\downarrow$, 故 $C_n\downarrow$. 又因 C_n 为 E 的非空紧子集, 故 $\bigcap_n C_n\neq\emptyset$, 于是

$$(E\times\{x\})\cap\bigcap_n B_n=\bigcap_n C_n\times\{x\}\neq\emptyset,$$

即有 $x\in\pi(\bigcap_n B_n)$. 这表明 $\bigcap_n\pi(B_n)\subset\pi(\bigcap_n B_n)$. 但相反的包含关系恒成立, 故有

$$\bigcap_n\pi(B_n)=\pi(\bigcap_n B_n). \tag{7.6.4}$$

由于 $\pi(B_n)\in\mathcal{F},\pi(B_n)\downarrow$, 故由 I 沿 $\mathcal{F}$ 的从上连续性得

$$\begin{aligned}J(\bigcap_n B_n)&=I(\pi(\bigcap_n B_n))=I(\bigcap_n\pi(B_n))\\&=\lim_{n\to\infty}I(\pi(B_n))=\lim_{n\to\infty}J(B_n),\end{aligned}$$

这表明 J 沿 $\mathcal{H}$ 从上连续. 因此 J 为 $E\times F$ 上的 Choquet $\mathcal{H}$ 容度.

下面借助于容度 J 证明 A 是 I 可容的. 由于 $B\in\mathcal{H}_{\sigma\delta}$, 故由引理 7.6.8, B 为 J 可容的. 但由 (7.6.4) 式看出: $C\in\mathcal{H}_\delta\Rightarrow\pi(C)\in\mathcal{F}_\delta$, 于是有

$$\begin{aligned}I(A)&=I(\pi(B))=J(B)=\sup(J(C)\,|\,C\subset B,C\in\mathcal{H}_\delta\}\\&=\sup\{I(\pi(C))\,|\,C\subset B,C\in\mathcal{H}_\delta\}\\&\leq\sup\{I(D)\,|\,D\subset A,D\in\mathcal{F}_\delta\}.\end{aligned}$$

但恒有 $I(A)\geq\sup\{I(D)\,|\,D\subset A,D\in\mathcal{F}_\delta\}$, 故实际上等号成立. 这表明 A 是 I 可容的. 定理证毕.

作为 Choquet 定理的一个重要应用, 我们证明可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 中一切 $\mathcal{F}$ 解析集都是普遍可测的.

7.6.10 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, 令 $\widehat{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化 (即 $\widehat{\mathcal{F}}=\bigcap_{P\in\mathcal{P}}\overline{\mathcal{F}}^P$, 其中 $\mathcal{P}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上概率测度全体), 则有 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\widehat{\mathcal{F}}=\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})$.

证 设 P 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一概率测度, 令

$$I(A)=\inf\{P(B)\,|\ B\supset A,B\in\mathcal{F}\},\ A\subset\Omega, \tag{7.6.5}$$

易证 I 是 Ω 上的 Choquet $\mathcal{F}$ 容度. 由定理 7.6.9 知, 对一切 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 有 (注意 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\delta$)

$$I(A)=\sup\{P(B)\mid B\subset A,B\in\mathcal{F}\}. \tag{7.6.6}$$

由 (7.6.5) 式及 (7.6.6) 式知 $A\in\overline{\mathcal{F}}^P$, 但概率测度 P 是任意的, 故 $A\in\widehat{\mathcal{F}}$. 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\widehat{\mathcal{F}}$, 进一步有

$$\widehat{\mathcal{F}}\subset\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})\subset(\widehat{\mathcal{F}})^{\widehat{}}=\widehat{\mathcal{F}},$$

从而 $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})=\widehat{\mathcal{F}}$. 证毕.

7.6.11 注 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可分且可离的可测空间. 若存在 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(R))$ 使 $(\Omega,\mathcal{F})$ 与 $(A,\mathcal{B}(A))$ 同构, 则称 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为 **Souslin 可测空间**. 由定理 7.6.10 知 Souslin 空间为 Radon 可测空间.

习 题

7.6.1 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$, 设 A 为 F 的一子集, 令 $A\cap\mathcal{F}=\{A\cap B\mid B\in\mathcal{F}\}$, 则有 $\mathcal{A}(A\cap\mathcal{F})=A\cap\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 这里 $A\cap\mathcal{F}$ 考虑为 A 上的集类.

7.6.2 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$ 容度, 则 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}_\delta$ 容度.

第 8 章 离散时间鞅

鞅 (martingale) 这一概念是 J. Ville 于 1939 年首先引进概率论的, 他借用了法文 martingale 有 "倍赌策略"(即赌输后加倍赔注) 这一含义. 中译名 "鞅"(马颔缰) 则是该法文词的另一含义. Lévy 最早研究了鞅序列. 1953 年 Doob 在他的 ≪Stochastic Processes≫ 这部历史性专著中首次系统总结了 Lévy 和他自己有关鞅的理论及应用成果, 使鞅论成了随机过程理论的一个独立分支.

本章介绍有关离散时间鞅的主要结果, 如鞅不等式、Snell 包络、鞅的 Doob 停止定理、Doob 收敛定理、鞅极限定理和局部鞅等.

8.1 鞅 不 等 式

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $(\mathcal{F}_n,n\geq 0)$ 为一列单调增的 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数. 令 $\mathcal{F}_\infty\hat{=}\sigma(\cup_n\mathcal{F}_n)$. 随机变量序列 $(X_n,n\geq 0)$ 称为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的, 如果每个 X_n 为 $\mathcal{F}_n$ 可测的.

8.1.1 定义 设 $(X_n,n\geq 0)$ 为一关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列, 称 $(X_n,n\geq 0)$ 为**鞅** (**上鞅**, **下鞅**), 如果每个 X_n 为可积, 且

$$E[X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]=X_n(\leq X_n,\ \geq X_n)\ \text{ a.s. }.$$

如果进一步每个 X_n 为平方可积, 称 $(X_n,n\geq 0)$ 为**平方可积鞅** (**上鞅**, **下鞅**).

8.1.2 定理 (1) 设 (X_n),(Y_n) 为鞅 (上鞅), 则 (X_n+Y_n) 为鞅 (上鞅), $(X_n\wedge Y_n)$ 为上鞅.

(2) 设 (X_n) 为鞅 (下鞅). f 为 $\mathbf{R}$ 上一连续 (连续非降) 凸函数. 如果每个 $f(X_n)$ 可积, 则 $(f(X_n))$ 为下鞅.

证 (1) 显然. (2) 由 Jensen 不等式推得.

8.1.3 定义 令 $\overline{\mathbf{N}}_0=\{0,1,2,\cdots,\infty\}$. 设 T 为 $\overline{\mathbf{N}}_0$ 值随机变量. 如果对每个 $n\in\mathbf{N}_0, [T=n]\in\mathcal{F}_n$, 则称 T 为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的**停时**. 对停时 T, 令

$$\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}_\infty \mid A\cap[T=n]\in\mathcal{F}_n\,,\forall n\geq 0\}\,,$$

称 $\mathcal{F}_T$ 为 T 前事件 σ 代数.

下一定理列出了有关停时的一些基本结果, 其证明都是不足道的, 故从略.

8.1.4 定理 设 S,T 为停时, (S_n) 为停时列.

(1) $\wedge_n S_n, \vee_n S_n$ 为停时;

(2) $A\in\mathcal{F}_S\Rightarrow A\cap[S\leq T]\in\mathcal{F}_T$, $A\cap[S=T]\in\mathcal{F}_T$;

(3) $S\leq T\Rightarrow\mathcal{F}_S\subset\mathcal{F}_T$;

(4) 设 $A\in\mathcal{F}_S$, 令 $S_A=SI_A+\infty I_{A^c}$, 则 S_A 为停时, 且 $\mathcal{F}_{S_A}\cap A=\mathcal{F}_S\cap A$. 我们称 S_A 为 S 到 A 上的局限.

8.1.5 定理 设 (X_n) 为一适应随机序列, T 为停时, 则 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$ 可测.

证 设 B 为一 Borel 集, $n\geq 0$, 则

$$[X_T I_{[T<\infty]}\in B]\cap[T=\infty]=\emptyset\,,$$

$$[X_T I_{[T<\infty]}\in B]\cap[T=n]=[X_n\in B]\cap[T=n]\in\mathcal{F}_n\,,$$

这表明 $[X_T I_{[T<\infty]}\in B]\in\mathcal{F}_T$, 即 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$ 可测.

下一定理是有界停时的 Doob 停止定理. 它是证明下面的鞅不等式的基础.

8.1.6 定理 设 (X_n) 为鞅 (上鞅), S,T 为有界停时, 且 $S\leq T$, 则有

$$E[X_T\mid\mathcal{F}_S]=X_S(\leq X_S)\ \text{a.s.}\,. \tag{8.1.1}$$

证 只需证上鞅情形. 设 $T\leq n$, 由于 $|X_T|\leq\sum_{j=1}^n|X_j|$, $|X_S|\leq\sum_{j=1}^n|X_j|$, 故 X_S, X_T 可积. 令 $A\in\mathcal{F}_S, j\geq 0$, 则

$$A_j\hat{=}A\cap[S=j]\cap[T>j]\in\mathcal{F}_j\,.$$

首先假定 $T-S\leq 1$. 这时由上鞅性质

$$\int_A(X_S-X_T)dP=\sum_{j=0}^n\int_{A_j}(X_j-X_{j+1})dP\geq 0\,.$$

对一般情形, 令 $R_j=T\wedge(S+j), 1\leq j\leq n$. 则每个 R_j 为停时, 且 $S\leq R_1\leq\cdots\leq R_n$, $R_1-S\leq 1$, $R_{j+1}-R_j\leq 1(1\leq j\leq n-1)$. 令 $A\in\mathcal{F}_S$. 由定理 8.1.4(3) 知 $A\in\mathcal{F}_{R_j}, 1\leq j\leq n$. 故由前面已证结果得

$$\int_A X_S dP\geq\int_A X_{R_1}dP\geq\cdots\geq\int_A X_T dP\,. \tag{8.1.2}$$

由于 X_S 为 $\mathcal{F}_S$ 可测 (定理 8.1.5), 故由 (8.1.2) 式推得 (8.1.1) 式.

8.1.7 定理 设 $k\geq 1, (X_n)_{n\leq k}$ 为一上鞅. 则对 $\lambda>0$ 有

$$\lambda P(\sup_{n\leq k}X_n\geq\lambda)\leq E[X_0]-\int_{[\sup_{n\leq k}X_n<\lambda]}X_k dP\,, \tag{8.1.3}$$

$$\lambda P(\inf_{n\leq k}X_n\leq-\lambda)\leq\int_{[\inf_{n\leq k}X_n\leq-\lambda]}(-X_k)dP\,, \tag{8.1.4}$$

$$\lambda P(\sup_{n\leq k}|X_n|\geq\lambda)\leq E[X_0]+2E[X_k^-]\,. \tag{8.1.5}$$

证 令 $T=\inf\{n\geq 0\mid X_n\geq\lambda\}\wedge k$, 则 T 为有界停时, 且在 $[\sup_{n\leq k}X_n\geq\lambda]$ 上有 $X_T\geq\lambda$, 在 $[\sup_{n\leq k}X_n<\lambda]$ 上有 $T=k$. 于

是由定理 8.1.6 得

$$
\begin{aligned}
E[X_0] \geq E[X_T] &= \int_{[\sup_{n\leq k} X_n \geq \lambda]} X_T dP + \int_{[\sup_{n\leq k} X_n < \lambda]} X_T dP \\
&\geq \lambda P(\sup_{n\leq k} X_n \geq \lambda) + \int_{[\sup_{n\leq k} X_n < \lambda]} X_k dP,
\end{aligned}
$$

此即 (8.1.3) 式. 同理可证 (8.1.4) 式. 由 (8.1.3) 式及 (8.1.4) 式立得 (8.1.5) 式.

8.1.8 定理 设 $k \geq 1, (X_n)_{n\leq k}$ 为一鞅或非负下鞅, 令 $X_k^* = \sup_{n\leq k} |X_n|$.

(1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $p \geq 1$ 有

$$
P(X_k^* \geq \lambda) \leq \lambda^{-p} E[|\, X_k \,|^p] \,. \tag{8.1.6}
$$

(2) 对任何 $p > 1$ 有

$$
\|X_k^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_k\|_p \,. \tag{8.1.7}
$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 为 L^p 范数.

不等式 (8.1.6) 及 (8.1.7) 分别称为**极大值不等式** 及 **Doob 不等式**. 对 $p = 2$ 情形, 不等式 (8.1.6) 称为 **Kolmogorov 不等式**.

证 不妨设 $E[|X_k|^p] < \infty$. 由 Jensen 不等式易知 $E[|X_n|^p] < \infty, 0 \leq n \leq k-1$. 故由定理 8.1.2(2), $(|X_n|^p, n \leq k)$ 为下鞅. 对上鞅 $(-|X_n|^p, 0 \leq n \leq k)$ 及 λ^p 应用不等式 (8.1.4) 即得 (8.1.6) 式.

往证 (8.1.7) 式. 设 Φ 为 $\mathbf{R}_+$ 上一右连续增函数且 $\Phi(0) = 0$.

由 Fubini 定理及 (8.1.4) 式得

$$
\begin{aligned}
E[\Phi(X_k^*)] &= \int_\Omega \int_{[0, X_k^*]} d\Phi(\lambda) dP \\
&= \int_{[0,\infty]} P(X_k^* \geq \lambda) d\Phi(\lambda) \\
&\leq \int_0^\infty (\lambda^{-1} \int_{[X_k^* \geq \lambda]} |X_k| dP) d\Phi(\lambda) \\
&= E\Big[|X_k| \Big(\int_0^{X_k^*} \lambda^{-1} d\Phi(\lambda)\Big)\Big] \,,
\end{aligned} \tag{8.1.8}
$$

在 (8.1.8) 式中令 $\Phi(\lambda) = \lambda^p$, $p > 1$, 则由 (8.1.8) 式及 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
E[(X_k^*)^p] &\leq \frac{p}{p-1} E[|X_k|(X_k^*)^{p-1}] \\
&\leq \frac{p}{p-1} \big(E[|X_k|^p]\big)^{\frac{1}{p}} \big(E[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{p-1}{p}} \,.
\end{aligned} \tag{8.1.9}
$$

由于 $(|X_n|^p, n \leq k)$ 为一下鞅, 有

$$
\|X_k^*\|_p \leq \|\sum_{n=0}^k |X_n|\|_p \leq (k+1)\|X_k\|_p < \infty \,.
$$

在 (8.1.9) 式两边同乘 $\big(E[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{1-p}{p}}$ 即得 (8.1.7) 式.

下面我们将证明上鞅的**上穿不等式**. 为此, 先交代一些记号.

设 (X_n) 为一 $(\mathcal{F}_n)$ 适应随机序列, $[a, b]$ 为一闭区间. 令

$$
T_0 = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \leq a\} \,, \qquad T_1 = \inf\{n > T_0 \mid X_n \geq b\} \,,
$$

$$
T_{2j} = \inf\{n > T_{2j-1} \mid X_n \leq a\} \,, \quad T_{2j+1} = \inf\{n > T_{2j} \mid X_n \geq b\} \,,
$$

则 (T_k) 为一停时上升列 . 我们用 $U_a^b[X, k]$ 表示序列 $(X_0, \cdots, X_k)$ 上穿 $[a, b]$ 的次数, 则显然有

$$
[U_a^b[X, k] = j] = [T_{2j-1} \leq k < T_{2j+1}] \in \mathcal{F}_k \,,
$$

从而 $U_a^b[X,k]$ 为 $\mathcal{F}_k$ 可测随机变量.

8.1.9 定理 设 $N\geq 1, (X_n)_{n\leq N}$ 为一上鞅，则

$$E[U_a^b[X,N]]\leq \frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^-]\ . \tag{8.1.10}$$

证 由定理 8.1.6, 对 $k\geq 0$ 有

$$\begin{aligned}0&\geq E[X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}]\\&=E[(X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]}+I_{[N\geq T_{2k+1}]})]\\&\geq E[(X_N-a)I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]}+(b-a)I_{[N\geq T_{2k+1}]}]\ .\end{aligned}$$

由于 $[U_a^b[X,N]\geq k+1]\subset[N\geq T_{2k+1}]$ 及 $[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]\subset[U_a^b[X,N]=k]$, 故有

$$P(U_a^b[X,N]\geq k+1)\leq\frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^-I_{[U_a^b[X,N]=k]}]\ . \tag{8.1.11}$$

在 (8.1.11) 式两边对 k 求和得 (8.1.10).

8.1.10 定理 设 $(Z_n, 0\leq n\leq N)$ 为一可积随机变量的适应序列，我们倒向归纳定义序列 (U_n) 如下：令 $U_N=Z_N$,

$$U_n=\mathrm{Max}(Z_n, E[U_{n+1}|\mathcal{F}_n]),\quad n\leq N-1.$$

则有如下结论:

(1) (U_n) 为一上鞅，且它是控制 (Z_n) (即 $U_n\geq Z_n, \forall n\geq 0$) 的最小上鞅. 称 (U_n) 为 (Z_n) 的 **Snell 包络**.

(2) 令 $\mathcal{T}_{j,N}$ 表示在 $\{j,\cdots,N\}$ 中取值的停时全体，并令 $T_j=\inf\{l\geq j\,|\,U_l=Z_l\}$, 这里约定 $\inf\emptyset:=N$, 则每个 T_j 为停时，$(U_n^{T_j})$ 为鞅，且对一切 $j\leq N$,

$$U_j=E[Z_{T_j}\mid\mathcal{F}_j]=\operatorname{ess\,sup}\{E[Z_T\mid\mathcal{F}_j]\,|\,T\in\mathcal{T}_{j,N}\}.$$

特别，$E[Z_T]$ 在 $\mathcal{T}_{j,N}$ 上的最大值在 T_j 达到，且等于 $E[U_j]$, 即有

$$E[U_j]=E[Z_{T_j}]=\sup\{E[Z_T]\,|\,T\in\mathcal{T}_{j,N}\}.$$

证 (1) 由于 $U_n\geq E[U_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]$, 且 $U_n\geq Z_n$, (U_n) 为一控制 (Z_n) 的上鞅. 令 (V_n) 为一控制 (Z_n) 的上鞅. 由倒向归纳易知 (V_n) 控制 (U_n). 于是 (U_n) 控制 (Z_n) 的最小上鞅.

(2) 易知 T_n 为停时. 由于 $U_n^{T_j}=U_{n\wedge T_j}$, 对 $n\leq N-1$ 有

$$U_{n+1}^{T_j}-U_n^{T_j}=I[T_j\geq n+1](U_{n+1}-U_n).$$

另一方面，由 T_j 和 U_n 的定义知，在 $[T_j\geq n+1]$ 上有

$$U_n=E[U_{n+1}\mid\mathcal{F}_n].$$

于是有

$$U_{n+1}^{T_j}-U_n^{T_j}=I_{[T_j\geq n+1]}(U_{n+1}-E[U_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]).$$

注意到 $[T_j\geq n+1]=[T_j\leq n]^c\in\mathcal{F}_n$, 上一等式蕴涵

$$E[U_{n+1}^{T_j}-U_n^{T_j}\mid\mathcal{F}_n]=0.$$

因此对每个 j, $(U_n^{T_j})$ 为鞅. 由于 $U_{T_j}=Z_{T_j}$, 我们有

$$U_j=U_j^{T_j}=E[U_N^{T_j}\mid\mathcal{F}_j]=E[Z_{T_j}\mid\mathcal{F}_j].$$

现在对每个 $T\in\mathcal{T}_{j,N}$, 由于 $U_T\geq Z_T$ 且 (U_n) 为上鞅，我们有

$$E[Z_T\mid\mathcal{F}_j]\leq E[U_T\mid\mathcal{F}_j]\leq U_j.$$

(2) 得证.

习 题

8.1.1 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 为一独立随机变量序列，$E[\xi_1]=0$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}E[\xi_i^2]<\infty$，试证：$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i$ a.s. 收敛.（提示：考虑鞅 $(X_n=\sum_{i=1}^{n},n\geq 1)$，利用 Kolmogorov 不等式及定理 2.3.4 证明 (X_n) a.s. 收敛.）

8.1.2 设 (X_n) 为一鞅，T 为一有穷停时，使得 $E|X_T|<\infty$. 试证：$E[X_T]=E[X_1]$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_nI_{[T>n]}]=0$.

8.2 鞅收敛定理及其应用

下一定理是鞅的 **Doob 收敛定理**.

8.2.1 定理 设 (X_n) 为一上鞅. 如果 $\sup_n E[X_n^-]<\infty$(或者等价地，$\sup_n E[|X_n|]<\infty$, 因为 $E[|X_n|]=E[X_n]+2E[X_n^-]$), 则当 $n\to\infty$ 时，X_n a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_n) 为非负上鞅，则对一切 $n\geq 0$ 有

$$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_n]\leq X_n\quad \text{a.s.}. \tag{8.2.1}$$

证 令 Q 表示有理数全体. 设 $a,b\in Q,a<b$. 令 $U_a^b(X)$ 为序列 $(X_n)_{n\geq 0}$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数，即 $U_a^b(X)=\lim_{N\to\infty}U_a^b(X,N)$，由 (8.7) 我们有

$$E[U_a^b(X)]\leq\frac{1}{b-a}\sup_N E[(X_N-a)^-]\leq\frac{1}{b-a}(a^++\sup_N E[X_N^-])<\infty.$$

于是 $U_a^b(X)<\infty$ a.s.. 令

$$W_{a,b}=[\liminf_{n\to\infty}X_n<a\ ,\ \limsup_{n\to\infty}X_n>b],$$
$$W=\bigcup_{a,b\in Q,a<b}W_{a,b}\ .$$

由于 $W_{a,b}\subset[U_a^b(X)=+\infty]$，故 $P(W_{a,b})=0$，从而 $P(W)=0$. 若 $\omega\notin W$，则 $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)$ 存在，记为 $X_\infty(\omega)$; 若 $\omega\in W$，令

$X_\infty(\omega)=0$. 于是 $X_n\longrightarrow X_\infty$ a.s.，且由 Fatou 引理,

$$E[|X_\infty|]\leq\sup_n E[|X_n|]<\infty\ .$$

另一结论由条件期望的 Fatou 引理推得.

8.2.2 系 设 (X_n) 为一鞅 (上鞅). 如果 (X_n) 一致可积，则 X_n a.s. 且 L^1 收敛于 X_∞. 此外，$\forall n\geq 0$

$$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_n]=X_n(\leq X_n)\quad \text{a.s.}. \tag{8.2.2}$$

8.2.3 系 设 ξ 为一可积随机变量，令 $\xi_n=E[\xi\mid\mathcal{F}_n]$, $\eta=E[\xi\mid\mathcal{F}_\infty]$, 则 ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于 η.

证 由于 (ξ_n) 一致可积 (定理 7.4.7), 故由定理 8.2.1 知，ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于某 ζ. 设 $A\in\bigcup_n\mathcal{F}_n$, 则存在某 n，使 $A\in\mathcal{F}_n$，于是有

$$E[\zeta I_A]=E[\xi_nI_A]=E[\xi I_A]=E[\eta I_A].$$

由于 ζ,η 均为 $\mathcal{F}_\infty$ 可测，故由习题 7.2.1 知，$\zeta=\eta$, a.s..

8.2.4 系 设 $1<p<\infty$. 如果 (X_n) 为一鞅，且 $\sup_n E|X_n|^p<\infty$, 则 X_n a.s. 且 L^p 收敛于 X_∞.

证 由 Doob 不等式 (8.1.7) 及已知条件知 $E[\sup_n|X_n|^p]<\infty$, 这蕴涵 $(|X_n|^p,p\geq 1)$ 为一致可积. 于是 X_n a.s. 且 L^p 收敛于 X_∞.

现在我们研究 “反向上鞅”(即以 $-\mathbf{N}_0=\{\cdots,-2,-1,0\}$ 为参数集的上鞅) 的收敛性.

设 $((\mathcal{F}_n))_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 为一列 $\mathcal{F}$ 的子 σ 域，对一切 $n\in-\mathbf{N}_0$, $\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$, 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 适应的随机序列 $(X_n)_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 称为**鞅** (**上鞅**), 如果对每个 $n\in-\mathbf{N}_0$, X_n 可积，且有

$$E[X_n\mid\mathcal{F}_{n-1}]=X_{n-1}(\leq X_{n-1})\ \ \text{a.s.}.$$

8.2.5 定理 设 $(X_n)_{n\in -\mathbf{N}_0}$ 为一上鞅，则极限 $\lim_{n\to-\infty} X_n$ a.s. 存在. 如果 $\lim_{n\to-\infty} E[X_n] < +\infty$, 则 (X_n) 一致可积, X_n a.s. 且 L^1 收敛于 $X_{-\infty}$.

证 我们用 $U_a^b[X,-N]$ 表示序列 $(X_{-N}, X_{-N+1},\cdots,X_0)$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数，则由 (8.1.7) 式得

$$EU_a^b[X,-N] \le \frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-]\ .$$

令 $U_a^b(X) = \lim_{N\to+\infty} U_a^b[X,-N]$, 我们有

$$EU_a^b(X) \le \frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-] < +\infty\ .$$

由于 $U_a^b(X)$ 为序列 $(-X_0,-X_{-1},-X_{-2},\cdots)$ 上穿 $[-b,-a]$ 的次数，故由定理 8.2.1 的证明知 $X_n\to X_{-\infty}$ a.s.(但不必有 $|X|_{-\infty}<\infty$ a.s.).

当 $n\to-\infty$ 时, $E[X_n]\uparrow A > -\infty$. 假定 $A<+\infty$. 往证 $(X_n)_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 一致可积. 由于 $(E[X_0|\mathcal{F}_n])_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 一致可积，只需证 $(X_n - E[X_0|\mathcal{F}_n])$ 一致可积. 于是，不妨假定 (X_n) 为非负上鞅. 给定 $\varepsilon>0$, 取自然数 k 足够大，使得 $A-E[X_{-k}]<\varepsilon/2$. 对 $c>0$ 及 $n<-k$, 由上鞅性，我们有

$$\begin{aligned}\int_{[X_n>c]} X_n dP &= E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_n dP\\ &\le E[X_n] - \int_{[X_n\le c]} X_{-k} dP\\ &= E[X_n] - E[X_{-k}] + \int_{[X_n>c]} X_{-k}dP\,.\end{aligned}$$

由于 $A\ge E[X_n]\ge E[X_{-k}]$, 故对 $n<-k$, $E[X_n]-E[X_{-k}]<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 另一方面，由于 $P(X_n>c)\le \dfrac{1}{c}E[X_n]\le\dfrac{A}{c}$. 故当 c 足够大时，对一切 $n\in-\mathbf{N}_0$ 有

$$\int_{[X_n>c]} X_{-k}dP < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$\int_{[X_j>\varepsilon]} X_j dP < \varepsilon,\ j=0,-1,\cdots,-k\,.$$

于是当 c 足够大时，有

$$\sup_n \int_{[X_n>c]} X_n dP < \varepsilon\ ,$$

这表明 (X_n) 一致可积. 既然 $X_n\to X_{-\infty}$ a.s., 故 (X_n) L^1 收敛于 $X_{-\infty}$.

8.2.6 系 设 ξ 为一可积随机变量, $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ 为一列单调下降的 $\mathcal{F}$ 的子 σ 域. 令 $\xi_n = E[\xi\mid\mathcal{G}_n]$, 则 ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于 $E[\xi\mid\bigcap_n\mathcal{G}_n]$.

证 对一切 $n\in-\mathbf{N}_0$, 令 $\mathcal{F}_n=\mathcal{G}_{-n}$, $\eta_n=\xi_{-n}$, 则 $(\eta_n)_{n\in-\mathbf{N}_0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)$ 为一致可积鞅. 故由定理 8.2.5 推得结论.

作为鞅收敛定理的一个应用，我们介绍 Lévy 给出的强大数定律的一个简单证明.

8.2.7 定理 (Kolmogorov 强大数定律) 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 为一独立同分布随机变量序列，且 $E[|\xi_1|]<\infty$. 令 $X_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$, 则 $\frac{X_n}{n}\to E[\xi_1]$, a.s..

证 由假定, $\forall 1\le i\le n, E[\xi_i\mid X_n]=E[\xi_1\mid X_n]$, 故有

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[\xi_i\mid X_n] = E[\xi_1\mid X_n] = E[\xi_1\mid X_n,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots]\\ &= E[\xi_1\mid X_n, X_{n+1},\cdots].\end{aligned}$$

令 $\mathcal{G}_n=\sigma(X_n,X_{n+1},\cdots), Z=E[\xi_1\mid\cap_n\mathcal{G}_n]$, 则由系 8.2.6 知 $\frac{X_n}{n}$ a.s. 且 L^1 收敛于 Z. Z 作为极限，显然有 $Z\in\cap_n\sigma(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)$, 故由 Kolmogorov 0-1 律知 Z a.s. 等于一常数. 由于 $E[\frac{X_n}{n}]=E[\xi_1]$, 从而有 $Z=E[\xi_1]$. 证毕.

8.2.8 定义 一鞅 (上鞅)$(X_n, n\in\mathbf{N}_0)$ 称为**可右闭的**, 如果存在一可积随机变量 $X_\infty\in\mathcal{F}_\infty$, 使得对一切 $n\in\mathbf{N}_0$, $E[X_\infty|\mathcal{F}_n]=X_n(\le X_n)$ a.s.. 这时 $(X_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 称为**右闭鞅** (**上鞅**), X_∞ 称为 $(X_n, n\in\mathbf{N}_0)$ 的**右闭元**.

下一定理是右闭鞅及右闭上鞅的 **Doob 停止定理**.

8.2.9 定理 设 $(X_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅), S,T 为两个停时, 且 $S\le T$. 则 X_S, X_T 可积, 并且有

$$E[X_T\mid\mathcal{F}_S]=X_S(\le X_S)\quad\text{a.s.}\,. \tag{8.2.3}$$

证 设 $(X_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 为鞅. 令 $S_n=SI_{[S\le n]}+(+\infty)I_{[S>n]}$, 由于集合 $\{0,1,\cdots,n,+\infty\}$ 与集合 $\{0,1,\cdots,n,n+1\}$ 保序同构, 故由定理 8.1.6,

$$X_{S_n}=E[X_\infty\mid\mathcal{F}_{S_n}]\quad\text{a.s.}\,.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_S]=X_S\quad\text{a.s.}\,.$$

特别, 这表明 X_S 可积, 对停时 T 也有同样等式, 故有

$$E[X_T\mid\mathcal{F}_S]=E[E[X_\infty\mid\mathcal{F}_T]\mid\mathcal{F}_S]=X_S\quad\text{a.s.}\,.$$

现在设 $(X_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 为上鞅, 令 $Y_n=E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$, $Z_n=X_n-Y_n$, $Y_\infty=X_\infty$ 及 $Z_\infty=0$, 则 $(Z_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 为非负上鞅, 由于 $E[Z_{S_n}]\le E[Z_0]$(定理 8.1.6), 故由 Fatou 引理, Z_S 可积, 从而 $X_S=Y_S+Z_S$ 可积. 令 $T_n=TI_{[T\le n]}+(+\infty)I_{[T>n]}$, 则由定理 8.1.6

$$Z_{S_n}\ge E[Z_{T_n}\mid\mathcal{F}_{S_n}]\quad\text{a.s.}\,.$$

但由于 $\mathcal{F}_{S_n}\cap[S\le n]=\mathcal{F}_S\cap[S\le n]$, 由习题 7.2.6 有

$$E[Z_{T_n}\mid\mathcal{F}_{S_n}]I_{[S\le n]}=E[Z_{T_n}\mid\mathcal{F}_S]I_{[S\le n]}\,.$$

从而有

$$Z_SI_{[S\le n]}=Z_{S_n}I_{[S\le n]}\ge E[Z_{T_n}\mid\mathcal{F}_S]I_{[S\le n]}\,. \tag{8.2.4}$$

由于 $Z_{T_n}\uparrow Z_T$, 在 (8.2.4) 中令 $n\to\infty$ 得

$$Z_SI_{[S<\infty]}\ge E[Z_T\mid\mathcal{F}_S]I_{[S<\infty]}\quad\text{a.s.}\,.$$

由于 $Z_\infty=0$, 故有 $Z_S\ge E[Z_T\mid\mathcal{F}_S]$, a.s.. 但由已证结果, $Y_S=E[Y_T|\mathcal{F}_S]$ a.s., 所以最终有

$$X_S\ge E[X_T\mid\mathcal{F}_S]\quad\text{a.s.}\,.$$

8.2.10 定理 设 $(X_n, n\in\overline{\mathbf{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅), S,T 为两个停时, 则

$$E[X_T\mid\mathcal{F}_S]=X_{T\wedge S}(\le X_{T\wedge S})\quad\text{a.s.}\,. \tag{8.2.5}$$

证 由于 $X_TI_{[T\le S]}$ 为 $\mathcal{F}_S$ 可测, 故由 (8.2.3) 式得

$$\begin{aligned}E[X_T\mid\mathcal{F}_S]&=E[X_TI_{[T\le S]}+X_{S\vee T}I_{[T>S]}\mid\mathcal{F}_S]\\&=X_TI_{[T\le S]}+X_SI_{[T>S]}(\le X_TI_{[T\le S]}+X_SI_{[T>S]})\\&=X_{T\wedge S},\ \text{a.s.}\,.\end{aligned}$$

8.2.11 系 设 ξ 为一可积随机变量, S,T 为两个有穷停时, 则

$$E[E[\xi\mid\mathcal{F}_S]\mid\mathcal{F}_T]=E[\xi\mid\mathcal{F}_{S\wedge T}],\quad\text{a.s.}\,.$$

下一定理是一般鞅及上鞅关于有穷停时的 Doob 停止定理.

8.2.12 定理 (1) 设 $(X_n, n\ge 0)$ 为一鞅, S,T 为两个有穷停时. 如果 X_T 可积, 则

$$E[X_T\mid\mathcal{F}_S]=X_{T\wedge S},\quad\text{a.s.}\,,$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n I_{[T>n]} \mid \mathcal{F}_S] = 0, \quad \text{a.s.}.$$

(2) 设 $(X_n, n \geq 0)$ 为一上鞅，S, T 为两个有穷停时，如果 X_T 可积且

$$\limsup_{n\to\infty} E[X_n I_{[T>n]} \mid \mathcal{F}_S] \geq 0, \quad \text{a.s.},$$

则

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \leq X_{T\wedge S} \quad \text{a.s.}.$$

证 我们只证 (1), (2) 的证明类似. 设 $(X_n, n \geq 0)$ 为一鞅，由系 8.2.11 和定理 8.1.6 知,

$$\begin{aligned}
E[X_T \mid \mathcal{F}_S] &= \lim_{n\to\infty} E[X_T I_{[T<n]} \mid \mathcal{F}_S] \\
&= \lim_{n\to\infty} E[X_{T\wedge n} - X_n I_{[T\geq n]} \mid \mathcal{F}_S] \\
&= \lim_{n\to\infty} (X_{T\wedge S\wedge n} - E[X_n I_{[T\geq n]} \mid \mathcal{F}_S]) \\
&= X_{T\wedge S} - \lim_{n\to\infty} E[X_n I_{[T\geq n]} \mid \mathcal{F}_S].
\end{aligned}$$

定理证毕.

下一定理称为上鞅的 **Doob 分解定理**.

8.2.13 定理 设 $X = (X_n)$ 为一上鞅，则 X 可唯一地分解为

$$X_n = M_n - A_n, \tag{8.2.6}$$

其中 (M_n) 为一鞅，(A_n) 为一增过程，满足 $A_0 = 0, A_n$ 为 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测，$n \geq 1$.

证 设有满足定理要求的分解 (8.2.5), 则

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= E[A_{n+1} - A_n \mid \mathcal{F}_n] = E[X_n - X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= X_n - E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

从而有

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]), \quad n \geq 1. \tag{8.2.7}$$

这表明：满足要求的分解如果存在，则它是唯一的. 另一方面，由 (8.2.6) 定义 (A_n), 再令 $M_n = X_n + A_n$, 则易知 (M_n) 为鞅，从而 $X_n = M_n - A_n$ 为满足要求的分解.

8.2.14 系 设 $X = (X_n, n \geq 1)$ 为一平方可积鞅，令

$$[X]_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i^2; \quad \langle X \rangle_n = \sum_{i=1}^{n} E[\Delta X_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}], \ n \geq 1, \tag{8.2.8}$$

其中 $X_0 = 0$, $\Delta X_i^2 = (X_i - X_{i-1})^2$, 则 $(X_n^2 - \langle X \rangle_n, n \geq 1)$ 和 $(X_n^2 - [X]_n, n \geq 1)$ 为鞅.

证 由上鞅 $(-X_n^2)$ 的 Doob 分解定理的证明推知 $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)$ 为鞅. 由于 $([X]_n - \langle X \rangle_n)$ 为鞅，故 $(X_n^2 - [X]_n)$ 为鞅.

8.2.15 定理 设 $X = (X_n, n \geq 1)$ 为一平方可积鞅，则 X_n 在 $[\langle X \rangle_\infty < \infty]$ 上 a.s. 收敛.

证 对任意 $a > 0$, 令 $T_a = \inf\{n \mid \langle X \rangle_n > a\}$, 则 $(X_{T_a\wedge n}, n \geq 1)$ 为一鞅，且由系 8.2.13 知 $E[X_{T_a\wedge n}^2] = E[\langle X \rangle_{T_a\wedge n}] \leq a$. 故由鞅收敛定理知：当 $n \to \infty$ 时，$X_{T_a\wedge n}$ a.s. 收敛. 特别，在 $[T_a = \infty]$ 上，X_n a.s. 收敛. 由于 a 是任意的，且 $[\langle X \rangle_\infty < \infty] = \cup_{k=1}^{\infty} [\langle X \rangle_\infty \leq k]$, 故 $(X_n, n \geq 1)$ 在 $[\langle X \rangle_\infty < \infty]$ 上 a.s. 收敛. 定理证毕.

8.2.16 定理 设 $(X_n, n \geq 1)$ 为一零均值鞅，且 $E[\sup_n |X_n - X_{n-1}|] < \infty$. 令 $\Omega_0 = [\sup_n X_n < \infty] \cup [\inf_n X_n > -\infty]$, 则 $(X_n, n \geq 1)$ 在 Ω_0 上 a.s. 收敛.

证 令 $\xi_n = X_n - X_{n-1}$. 对任意 $a > 0$, 令 $T_a = \inf\{n \mid X_n > a\}$, 则 $(X_{T_a\wedge n}, n \geq 1)$ 为一零均值鞅，且有

$$X_{T_a\wedge n}^+ \leq X_{T_a\wedge(n-1)}^+ + \xi_{T_a\wedge n}^+ \leq a + \sup_n (\xi_n^+).$$

由于 $E[|X_{T_a\wedge n}|]=2E[X^+_{T_a\wedge n}]$ 且 $E[\sup_n|\xi_n|]<\infty$，故 $E[|X_{T_a\wedge n}|]$ 关于 n 一致有界，从而当 $n\to\infty$ 时，$X_{T_a\wedge n}$ a.s. 收敛. 特别，在 $[\sup_n X_n\le a]$ 上，X_n a.s. 收敛. 由于 a 是任意的，故 $(X_n,n\ge 1)$ 在 $[\sup_n X_n<\infty]$ 上 a.s. 收敛. 对 $(-X_n)$ 应用已证结果知 $(X_n,n\ge 1)$ 在 $[\inf_n X_n>-\infty]$ 上也 a.s. 收敛.

8.2.17 定理 设 $(Z_n,n\ge 1)$ 为一关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列，且 $0\le Z_n\le 1$. 令 $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$，则 $[\sum_{n=1}^\infty Z_n<\infty]=[\sum_{n=1}^\infty E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}]<\infty]$ a.s..

证 令

$$\xi_n=Z_n-E[Z_n\,|\,\mathcal{F}_{n-1}];\quad X_n=\sum_{i=1}^n\xi_i,\quad n\ge 1,$$

则 $(X_n,n\ge 1)$ 为一零均值鞅，且 $\sup_n|X_n-X_{n-1}|\le 2$. 由于

$$[\sum_{n=1}^\infty Z_n<\infty]\subset[\sup_n X_n<\infty],$$

故由定理 8.2.16 知，$(X_n,n\ge 1)$ 在 $[\sum_{n=1}^\infty Z_n<\infty]$ 上 a.s. 收敛. 因此由

$$\sum_{n=1}^\infty E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}=\sum_{n=1}^\infty Z_n<\infty-\lim_{n\to\infty}X_n$$

推知 $[\sum_{n=1}^\infty Z_n<\infty]\subset[\sum_{n=1}^\infty E[Z_n|\mathcal{F}_{n-1}]<\infty]$ a.s.. 对 $(-X_n)$ 应用上述推理可证相反的包含关系. 定理证毕.

作为定理的一个推论，我们得到 Borel-Cantelli 引理的如下推广.

8.2.18 系 设 $A_n\in\mathcal{F}_n,n\ge 1$，则

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\left[\sum_{n=1}^\infty P[A_{n+1}|\mathcal{F}_n]<\infty\right]\ \text{a.s.}.$$

证 在定理中令 $Z_n=I_{A_n}$，由 $\limsup_{n\to\infty}A_n=[\sum_{n=1}^\infty I_{A_n}<\infty]$ 推得欲证结论.

利用推广了的 Borel-Cantelli 引理和定理 8.2.16，我们得到如下 **Kolmogorov 三级数定理** 的条件形式 (见 Hall-Heyde[4]).

8.2.19 定理 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为一关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i,n\ge 1$，$c>0$ 为一常数，则 S_n 在满足如下三个条件的集合上 a.s. 收敛：

(1) $\sum_{i=1}^\infty P(|X_i|\le c\,|\,\mathcal{F}_{i-1})<\infty$;

(2) $\sum_{i=1}^\infty E[X_iI_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1}]$ 收敛;

(3) $\sum_{i=1}^\infty\{E[X_i^2I_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1}]-(E[X_iI_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1})])^2\}<\infty$.

证 令 A 表示使 (1),(2) 和 (3) 成立的集合，由 (1) 和推广了的 Borel-Cantelli 引理得

$$[S_n\text{收敛}]=\left[\sum_{i=1}^\infty E[X_iI_{[|X_i|\le c]}\text{收敛}\right]=\left[\sum_{i=1}^\infty Y_i\text{收敛}\right],$$

其中

$$Y_i=X_iI_{[|X_i|\le c]}-E[X_iI_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1}],\quad i\ge 1.$$

由于 $(\sum_{i=1}^n Y_i,n\ge 1)$ 为一零均值鞅，且

$$E(Y_i^2\,|\,\mathcal{F}_{i-1}]=E[X_i^2I_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1}]-(E[X_iI_{[|X_i|\le c]}\,|\,\mathcal{F}_{i-1})])^2,$$

故由定理 8.2.16 知 $\sum_{i=1}^\infty Y_i$ 在 A 上 a.s. 收敛. 定理证毕.

8.2.20 定理 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为一关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列，$(S_n=\sum_{i=1}^n X_i,n\ge 1)$ 为鞅，$(U_n,n\ge 1)$ 为一非降的非负随机变量序列，每个 U_n 关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测. 若 $1\le p\le 2$，令

$$\Omega_1=\left[\sum_{i=1}^\infty U_i^{-p}E[|X_i|^p\,|\,\mathcal{F}_{i-1}]<\infty\right],$$

$$\Omega_2 = \Big[\lim_{n\to\infty} U_n = \infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} U_i^{-p} E[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}] < \infty\Big],$$

则在 Ω_1 上有 $\sum_{i=1}^n U_I^{-1} X_i$ a.s. 收敛, 在 Ω_2 上有 $\lim_{n\to\infty} U_n^{-1} S_n = 0$ a.s.. 若 $2 < p < \infty$, 令

$$\Omega_3 = \Big[\sum_{i=1}^{\infty} U_n^{-1} < \infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} U_i^{-1-p/2} E[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}] < \infty\Big],$$

则在 Ω_3 上有 $\sum_{i=1}^n U_I^{-1} X_i$ a.s. 收敛和 $\lim_{n\to\infty} U_n^{-1} S_n = 0$ a.s..

为了证明这一定理, 我们先证明如下的 **Kronecker 引理**.

8.2.21 引理 设 $(x_i, i \ge 1)$ 为一实数序列, $(b_n, n \ge 1)$ 为一正实数序列, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. 令 $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$, $r_n = \sum_{i=1}^n b_i x_i$. 如果极限 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 存在且有穷, 则 $\lim_{n\to\infty} r_n / b_n = 0$.

证 令 $s_0 = 0$. 由于 $b_i x_i = b_i(s_i - s_{i-1})$, 我们有

$$r_n = b_n s_n - \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) s_i, \quad n \ge 2,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{r_n}{b_n} \le \lim_{n\to\infty} |s_n - s| + \limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) s_i - s\Big|.$$

对给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \ge 1$, 使得对 $n \ge n_0$, 有 $|s_n - s| < \varepsilon$. 故有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) s_i - s\Big| &= \Big|\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i+1} - b_i)(s_i - s) + \frac{b_1}{b_n} s\Big| \\ &\le \varepsilon + \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n_0-1} (b_{i+1} - b_i)|s_i - s| + \frac{b_1}{b_n}|s|.\end{aligned}$$

因此有 $\lim_{n\to\infty} r_n / b_n = 0$.

定理 8.2.20 之证 令 $Y_n = U_n^{-1} X_n, n \ge 1$, 则 $(\sum_{i=1}^n Y_i, n \ge 1)$ 为鞅. 当 $1 \le p \le 2$, 由定理 8.2.11 推知, 在 Ω_1 上 $\sum_{i=1}^n U_I^{-1} X_i$ a.s.

收敛, 从而又由 Kronecker 引理推知, 在 Ω_2 上 $\lim_{n\to\infty} U_n^{-1} S_n = 0$ a.s..

下面考虑 $2 < p < \infty$ 情形. 由于当 $[E[|X_n|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}]^{2/p} > U_n$ 时, 有

$$[E[|X_n|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}]^{2/p} < U_n^{1-p/2} E[|X_n|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}],$$

故有

$$\begin{aligned}E[Y_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = U_n^{-2} E[X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] &\le [U_n^{-p} E(|X_n|^p \mid \mathcal{F}_{n-1})]^{2/p} \\ &\le \max\{U_n^{-1}, U_n^{-1-p/2} E[|X_n|^p \mid \mathcal{F}_{n-1}]\}.\end{aligned}$$

余下证明与上面相同. 证毕.

习　题

8.2.1 设 $(\xi, \xi_n, n \ge 1) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\xi_n \to \xi_\infty$, a.s. 且 $|\xi_n| \le |\xi|$, $\forall n \ge 1$, 则 $E[\xi_n \mid \mathcal{F}_n]$ a.s. 且 L^1 收敛于 $E[\xi_\infty \mid \mathcal{F}_\infty]$.

8.2.2 设 $(X_n, n \ge 0)$ 为一鞅 (上鞅), T 为一有穷停时, 且 $E[T] < \infty$. 如果存在常数 $C > 0$, 使得对一切 $n \ge 1$, 在 $[T \ge n+1]$ 上 a.s. 有 $E[|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n] \le C$, 则 $E[X_T] = E[X_0] (\le E[X_0])$. (提示: 利用定理 8.2.12.)

8.2.3 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 为一独立同分布随机变量序列, 且 $E[|\xi_1|] < \infty$. 令 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $T \ge 1$ 为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的有穷停时, 且 $E[T] < \infty$. 证明 **Wald 等式** 成立: $E[\sum_{i=1}^T \xi_i] = E[\xi_1] E[T]$. 如果进一步假定 $E[\xi_1^2] < \infty$, 证明另一 **Wald 等式** 成立:

$$E[(\sum_{i=1}^T \xi_i - T E[\xi_1])^2] = E[(\xi_1 - E[\xi_1])^2] E[T].$$

(提示: 利用习题 8.2.2.)

8.2.4 利用 Kolmogorov 三级数定理证明如下结果 (见 Chow, Ann. Math. Statist. 36, 552-558): 设 $1 \le p \le 2$, $(X_n, n \ge 1)$ 为一关于

$(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列, $(S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1)$ 为鞅, 则 S_n 在 $[\sum_{i=1}^{\infty} E[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}] < \infty]$ 上 a.s. 收敛.

8.2.5 设 $X = (X_n, n \geq 1)$ 为一平方可积鞅, 证明在 $[\langle X\rangle_\infty = \infty]$ 上有 $\lim_{n\to\infty}\langle X\rangle_n^{-1} X_n = 0$ a.s..

8.2.6 设 $X = (X_n, n \geq 1)$ 为一上鞅, $X_n = M_n - A_n$ 为其 Doob 分解. 证明在 $A_\infty < \infty$ 上 X_n a.s. 收敛.

8.2.7 设 $X = (X_n, n \geq 1)$ 为一平方可积鞅, 证明在 $[\langle X\rangle_\infty < \infty]$ 上 X_na.s. 收敛. (提示: 考虑下鞅 (X_n^2) 和 $((X_n+1)^2)$ 并利用习题 8.2.6.)

8.2.8 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 为一独立随机变量序列, 且 $E[\xi_n^2] < \infty, \forall n \geq 1$. 令 $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. 如果 $b_n \uparrow \infty$ 使得 $\sum_{n=1}^\infty \frac{E[(\xi_n - E[\xi_n])^2]}{b_n^2} < \infty$, 证明 $\frac{X_n - E[X_n]}{b_n} \to 0$ a.s.. (提示: 利用习题 8.1.1 和 Kronecker 引理.)

8.3 局 部 鞅

下面我们对鞅的概念作三种推广, 并将证明这三种推广的等价性.

8.3.1 定义 设 $X = (X_n, n \geq 0)$ 为 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列, 称 X 为**局部鞅**, 如果存在一列停时 $T_k \uparrow \infty$, 使得对每个 $k \geq 1$ $(X_{n\wedge T_k} I_{[T_k>0]}, n \geq 0)$ 为一鞅; 称 X 为**广义鞅**, 如果对每个 n, X_{n+1} 关于 $\mathcal{F}_n$ 为 σ 可积, 且有 $E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s.

8.3.2 定义 设 $(M_n, n \geq 0)$ 为一适应序列, (H_n) 为一可料序列 (即每个 (H_n) 为 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测, $n \geq 0$, $\mathcal{F}_{-1} \hat{=} \mathcal{F}_0$). 令 $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, 并令

$$X_0 = H_0 M_0, \; X_n = H_0 M_0 + \sum_{i=1}^n H_i \Delta M_i, \; n \geq 1, \tag{8.3.1}$$

记为 $H.M$. 如果 $(M_n, n \geq 0)$ 为一鞅, 称 $H.M$ 为 M 关于 H 的**鞅变换**.

下一定理是 Meyer 在 Martingales and Stochastic Integrals I (LN in Math., 284 (1972), Springer-Verlag) 中给出的.

8.3.3 定理 设 $X = (X_n, n \geq 0)$ 为一适应序列, 则下列断言等价:

(1) X 为局部鞅; (2) X 为广义鞅; (3) X 为鞅变换.

证 (1)⇒ (2). 设 X 为局部鞅. 令 $T_k \uparrow \infty$ 为一列停时, 使得对每个 $k \geq 1$, $(X_{n\wedge T_k} I_{[T_k>0]}, n \geq 0)$ 为一鞅. 故有

$$E[X_{(n+1)\wedge T_k} I_{[T_k>0]} \mid \mathcal{F}_n] = X_{n\wedge T_k} I_{[T_k>0]}, \quad n \geq 0,$$

从而有

$$E[X_{n+1} I_{[T_k>n]} \mid \mathcal{F}_n] = X_n I_{[T_k>n]}, \quad n \geq 0.$$

由于当 $k \to \infty$ 时 $[T_k > n] \uparrow \Omega$, 我们推得 X 为广义鞅.

(2)⇒ (3). 设 X 为广义鞅. 令

$$H_0 = |X_0|, H_n = E[|X_n - X_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}], \quad n \geq 1,$$

$$V_n = \frac{1}{H_n} I_{[H_n>0]}, \quad n \geq 0,$$

则 (V_n) 为一可料序列. 令 $M = V.X$, 则 M 为鞅, 且有 $X = H.M$. 这表明 X 为鞅变换.

(3)⇒ (1). 设 $X = H.M$ 为一鞅变换, 其中 M 为一鞅, (H_n) 为一可料序列. 令

$$T_k = \inf\{n \mid |H_{n+1}| \geq k\}.$$

则每个 T_k 为一停时, $T_k \uparrow \infty$, 且 H 停止于 T_k 在 $[T_k > 0]$ 上被 k 界住. 于是每个 $X_{n\wedge T_k} I_{[T_k>0]}$ 为可积, 且有

$$\begin{aligned}
&E[(X_{(n+1)\wedge T_k} - X_{n\wedge T_k}) I_{[T_k>0]} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= H_n I_{[T_k>0]} E[(M_{n+1\wedge T_k} - M_{n\wedge T_k}) \mid \mathcal{F}_n] = 0.
\end{aligned}$$

这表明 $(X_{n\wedge T_k} I_{[T_k>0]}, n \geq 0)$ 为鞅. 于是 X 为局部鞅.

8.3.4 系 设 M 为局部鞅. 如果每个 M_n 可积, 则 M 为鞅. 特别, 如果 M 为非负局部鞅, 且 M_0 可积, 则 M 为鞅.

8.3.5 系 设 X 为局部鞅, (K_n) 为一可料序列. 则 $K.X$ 为鞅变换.

证 由定理 8.3.3, $X = H.M$ 为一鞅变换, 其中 M 为一鞅, (H_n) 为一可料序列. 令 $W = HK$, 则 W 为一可料序列, 且容易验证 $K.X = W.M$, 故 $K.X$ 为鞅变换.

8.3.6 定理 如果 $(M_n, 0 \le n \le N)$ 为一可积随机变量的适应序列, 使得对任一有界可料序列 $(H_n, 0 \le n \le N)$, 对任意 $1 \le j \le N$, 有 $E[\sum_{j=1}^{N} H_j \Delta M_j] = 0$, 则 $(M_n, 0 \le n \le N)$ 为一鞅.

证 对 $1 \le j \le N$, $A \in \mathcal{F}_{j-1}$, 令 $H_n = 0, n \neq j, H_j = I_A$. 则 (H_n) 为一有界可料序列, 且依假定 $E[I_A(M_j - M_{j-1})] = 0$. 这表明 $E[M_j|\mathcal{F}_{j-1}] = M_{j-1}$. 于是 (M_n) 为一鞅.

习 题

8.3.1 设 M 为一局部鞅. 令 $X_0 = 1$, $X_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k), n \ge 1$. 则 X 为一鞅变换. 特别, 若对每个 $k \ge 1$, $\Delta M_k \ge -1$, 则 X 为一鞅.

第 9 章 Hilbert 空间和 Banach 空间上的测度

本章首先介绍欧氏空间上有限 Borel 测度的 Fourier 变换和 Bochner 定理, 然后介绍 Hilbert 空间上有限 Borel 测度 Fourier 变换的刻画 (Minlos-Sazanov 定理) 和它的一个更加常用的形式——Minlos 定理, 给出 Hilbert 空间上 Gauss 测度 Fourier 变换的刻画, 最后介绍 Hilbert 空间上 Gauss 测度到 Banach 空间上的提升 (Gross 定理) 和一个有关 Banach 空间上对称 Gauss 测度的 Fernique 定理. 本章的 9.2 至 9.5 节内容取材于参考文献 5 的第 1 章部分内容.

9.1 R^n 上 Borel 测度的 Fourier 变换和 Bochner 定理

9.1.1 定义 设 μ 为 $\mathbf{R}^m$ 上的一有限 Borel 测度. 令

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{it\cdot x}\mu(dx)\,,\ t \in \mathbf{R}^m, \tag{9.1.1}$$

称 $\widehat{\mu}$ 为 μ 的 **Fourier 变换**.

显然, $\widehat{\mu}$ 具有如下几条性质:

(1) $\widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbf{R}^m)$;

(2) $\widehat{\mu}$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上连续;

(3) $\widehat{\mu}$ 是**非负定的**, 即对任意自然数 $n \ge 2$ 及 $t_1, \cdots, t_n \in \mathbf{R}^m$ 和复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 有

$$\sum_{l,k=1}^{n} \widehat{\mu}(t_l - t_k)\alpha_l \bar{\alpha}_k \ge 0. \tag{9.1.2}$$

事实上，(9.1.2) 式可由下式推得

$$\sum_{l,k=1}^{n}\widehat{\mu}(t_l-t_k)\alpha_l\bar{\alpha}_k=\int_{\mathbf{R}^m}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e^{it_k\cdot x}\right|^2\mu(dx).$$

9.1.2 定义 设 F 是 $\mathbf{R}^m$ 上的一非负右连续增函数 (关于 $\mathbf{R}^m$ 上的增函数的定义见定义 1.5.3)，且 $F(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}F(x)\geq 0, F(\infty)<\infty, \mu_F$ 为与 F 联系的 Lebesgue-Stieltjes 测度 (见定理 1.5.4). 令

$$f(t)=\widehat{\mu}_F=\int_{\mathbf{R}^m}e^{it\cdot x}dF(x), t\in\mathbf{R}^m,$$

也称 f 为 F 的 Fourier 变换.

9.1.3 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\xi=\{\xi_i,1\leq i\leq m\}$ 为 m 维实值随机变量，$F(x_1,\cdots,x_m)=P(\xi_1\leq x_1,\cdots,\xi_m\leq x_m), x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^n$ 为其分布函数，令

$$f(t)=\widehat{\mu}_F=E[e^{it\cdot\xi}]=\int_{\mathbf{R}^m}e^{it\cdot x}dF(x),\quad t=(t_1,\cdots,t_m)\in\mathbf{R}^m,$$

称 f 为随机变量 ξ(或分布函数 F) 的**特征函数**.

下一定理是 Lévy 关于增函数的 Fourier 变换的反演公式. 特别地，由该定理知特征函数唯一决定其相应的分布函数.

9.1.4 定理 设 F 是 $\mathbf{R}^m$ 上的一非负右连续增函数，且 $F(-\infty):=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, F(\infty)<\infty, f$ 为 F 的 Fourier 变换，则对任意满足 $a<b$ 的 F 的连续点 a,b 有

$$\Delta_{b,a}F=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\lim_{T\to\infty}\int_{[-T,T]^m}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{-it_jb_j}-e^{-it_ja_j}}{-it_j}\right)\times f(t_1,\cdots,t_m)dt_1\cdots dt_m,$$

其中记号 $\Delta_{b,a}F$ 见定义 1.5.3.

证 考虑积分

$$\begin{aligned}I_T&=\int_{[-T,T]^m}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{-it_jb_j}-e^{-it_ja_j}}{-it_j}\right)f(t_1,\cdots,t_m)dt_1\cdots dt_m\\&=\int_{[-T,T]^m}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{-it_jb_j}-e^{-it_ja_j}}{-it_j}\right)\\&\qquad\int_{\mathbf{R}^m}e^{i\sum_{j=1}^m t_jx_j}dF(x_1,\cdots,x_m)dt_1\cdots dt_m\\&=\int_{\mathbf{R}^m}\int_{[-T,T]^m}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{-it_j(b_j-x_j)}-e^{-it_j(a_j-x_j)}}{-it_j}\right)\\&\qquad dt_1\cdots dt_mdF(x_1,\cdots,x_m)\\&=\int_{\mathbf{R}^m}\int_{[-T,T]^m}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\sin t_j(b_j-x_j)}{t_j}-\frac{\sin t_j(a_j-x_j)}{t_j}\right)\\&\qquad dt_1\cdots dt_mdF(x_1,\cdots,x_m).\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}I_T&=\int_{\mathbf{R}^m}\prod_{j=1}^{m}(\pi\mathrm{sgn}(b_j-x_j)-\pi\mathrm{sgn}(a_j-x_j))\,dF(x_1,\cdots,x_m)\\&=(2\pi)^m\Delta_{b,a}F.\end{aligned}$$

定理证毕.

下一定理是 Lévy 关于特征函数的**连续性定理**.

9.1.5 定理 设 (F_n) 为 $\mathbf{R}^m$ 上的一列分布函数，(f_n) 为相应的特征函数列. 则为要 (F_n) 全收敛于 $\mathbf{R}^m$ 上的一分布函数 F(即测度 (μ_{F_n}) 弱收敛于 μ_F)，必须且只需 (f_n) 在 $\mathbf{R}^m$ 上处处收敛于一在 0 处连续的函数 f. 这时 f 必为 F 的特征函数. 特别若特征函数列 (f_n) 在 $\mathbf{R}^m$ 上处处收敛于一在 0 处连续的函数 f，则 f 必为特征函数.

证 必要性显然，因为若 (F_n) 全收敛于一分布函数 F，令 f 为 F 的特征函数，则由定理 6.1.3 知，(f_n) 在 $\mathbf{R}^m$ 上处处收敛于 f.

往证充分性. 设 (F_n) 为一列分布函数, (f_n) 为相应的特征函数列. 设 (f_n) 在 $\mathbf{R}^m$ 上处处收敛于一在 0 处连续的函数 f. 我们只需证 (F_n) 全收敛于一分布函数 F. 由 Helly 定理 (定理 6.1.4) 知, 存在 (F_n) 的一个子序列 (F_{n_k}) 弱收敛于一非负右连续增函数 F(即测度 $(\mu_{F_{n_k}})$ 淡收敛于 μ_F). 下面我们证明 F 是一分布函数, 且序列 (F_n) 本身全收敛于分布函数 F.

首先考虑 $m=1$ 情形. 假定 F 不是分布函数, 即 $F(\infty)-F(-\infty)=\delta<1$. 令 $\varepsilon>0$ 使得 $\delta<1-\varepsilon$. 由于 $f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=1$, 且 f 在 0 处连续, 可取 $\tau>0$ 足够小, 使得

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(t)dt\right|>\delta+\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取 $x>\frac{2}{\tau\varepsilon}$ 使得 x 和 $-x$ 都是 F 的连续点, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f_{n_k}(t)dt\right| &\leq \left|\frac{1}{2\tau}\int_{|y|<x}dF_{n_k}(y)\int_{-\tau}^{\tau}e^{ity}dt\right|\\ &\quad+\left|\frac{1}{2\tau}\int_{|y|\geq x}dF_{n_k}(y)\int_{-\tau}^{\tau}e^{ity}dt\right|\\ &\leq F_{n_k}(x)-F_{n_k}(-x)+\frac{1}{\tau}\left|\int_{|y|\geq x}\frac{\sin\tau y}{y}dF_{n_k}(y)\right|\\ &< F_{n_k}(x)-F_{n_k}(-x)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

在上式中令 $k\to\infty$ 得

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}f(t)dt\right|<F(x)-F(-x)+\frac{\varepsilon}{2}<\delta+\frac{\varepsilon}{2},$$

这导致矛盾. 因此 F 必须是一分布函数. 于是 (F_{n_k}) 全收敛于分布函数 F, 且 f 为 F 的特征函数. 由于特征函数唯一决定分布函数, 故 (F_n) 的任一弱收敛子序列都全收敛于同一分布函数 F. 再由 Helly 定理推知, 序列 (F_n) 本身全收敛于分布函数 F.

现在考虑 $m>1$ 情形. 任取 $t_j\in\mathbf{R}, t_j\neq 0, 1\leq j\leq m$. 令 $t=(t_1,\cdots,t_m), S_x=\{y\in\mathbf{R}^m\,|\,t\cdot y\leq x\}, x\in\mathbf{R}$. 又令 $G_n(x)=\mu_{F_n}(S_x)$. 如果 F_n 是 m 维随机变量 $\xi(n)=(\xi_1(n),\cdots,\xi_m(n))$ 的分布函数, 令 $X_n=t\cdot\xi(n)$, 则 $P(X_n\leq x)=P(\xi(n)\in S_x)=\mu_{F_n}(S_x)$, 从而 G_n 是 X_n 的分布函数, 其特征函数 $\phi_n(u)=E[e^{iuX_n}]=E[e^{iu(t\cdot\xi(n))}]=f_n(ut), u\in\mathbf{R}$. 令 $\phi(u)=f(ut)$, 依假定, ϕ_n 处处收敛于在 0 处连续的函数 ϕ, 于是由上面已证结果, G_n 全收敛于一分布函数 G. 另一方面, 设 (F_{n_k}) 弱收敛于一非负右连续增函数 F, 即测度 $(\mu_{F_{n_k}})$ 淡收敛于 μ_F, 则对 F 的连续点 x 有 $\lim_{k\to\infty}G_{n_k}(x)=\lim_{k\to\infty}\mu_{F_{n_k}}(S_x)=\mu_F(S_x)$. 于是对 F 的连续点 x 有 $G(x)=\mu_F(S_x)$. 最终有

$$\mu_F(\mathbf{R}^m)=\lim_{x\to\infty}\mu_F(S_x)=\lim_{x\to\infty}G(x)=1.$$

因此 F 是一分布函数, 且 (F_{n_k}) 全收敛于分布函数 F. 再由 Helly 定理推知, 序列 (F_n) 本身全收敛于分布函数 F. 定理证毕.

9.1.6 引理 设 $m\geq 1, 0<T<\infty, \phi_T$ 为 $\mathbf{R}^m$ 上的一复值连续函数, 满足如下性质:

$$\phi_T(0)=1,\ \phi_T(t)=0,\ \forall t\in\mathbf{R}^m\setminus[-T,T]^m.$$

如果对一切 $x\in\mathbf{R}^m$,

$$P_T(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}e^{-it\cdot x}\phi_T(t)dt\geq 0$$

则 $\int_{\mathbf{R}^m}P_T(x)dx=1, \phi_T(t)=\int_{\mathbf{R}^m}e^{it\cdot x}P_T(x)dx$ 为一特征函数.

证 对 $N>0$, 令 $\psi_N(x)=\prod_{j=1}^m[1-(|x_j|/N)]I_{[-N,N]}(x_j), x\in\mathbf{R}^m$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^m} P_T(x)dx &= \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbf{R}^m}\psi_N(x)P_T(x)dx\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}\phi_T(t)\int_{\mathbf{R}^m}e^{-it\cdot x}\psi_N(x)dxdt\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}\phi_T(t)\prod_{j=1}^m\frac{(\sin(t_jN/2))^2}{t_j^2N/4}dt_1\cdots dt_m\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}\phi_T(\frac{2v}{N})\prod_{j=1}^m\frac{\sin^2 v_j}{v_j^2}dv_1\cdots dv_m\\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}\phi_T(0)\prod_{j=1}^m\frac{\sin^2 v_j}{v_j^2}dv_1\cdots dv_m = \phi_T(0)=1.\end{aligned}$$

在上述推导中我们用了单调收敛定理和控制收敛定理. 这表明 $P_T(x)$ 为 $\mathbf{R}^m$ 上一分布函数的密度函数. 类似可证

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^m} e^{it\cdot x}P_T(x)dx &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^m\int_{\mathbf{R}^m}\phi_T(t-\frac{2v}{N})\prod_{j=1}^m\frac{\sin^2 v_j}{v_j^2}dv_1\cdots dv_m\\ &= \phi_T(t).\end{aligned}$$

从而 $\phi_T(t)$ 为一特征函数.

下一定理是著名的 **Bochner 定理**, 它给出了 $\mathbf{R}^m$ 上有限 Borel 测度 Fourier 变换的一个刻画.

9.1.7 定理 设 f 为一 $\mathbf{R}^m$ 上的有界复值连续函数, 则 f 为一有限 Borel 测度的 Fourier 变换, 当且仅当 f 是非负定的.

证 只需证充分性. 不妨假定 $f(0)=1$, 这时只需证 f 为特征函数. 令

$$P_T(x)=\left(\frac{1}{2\pi T}\right)^m\int_{[0,T]^{2m}}f(u-v)e^{-iu\cdot x}e^{iv\cdot x}dudv,\quad x\in\mathbf{R}^m.$$

将 $P_T(x)$ 视为 Riemann 和的极限, 由 f 的非负定性知 $P_T(x)\geq 0$. 在上述多重积分中做如下变量代换: $u=u, v=u-t$, 则变换

Jacobi 行列式为 $J=(a_{i,j})$, 其中

$$a_{i,j}=a_{i,j+m}=\delta_{i,j},\ a_{i+m,j}=0,\ a_{i+m,j+m}=-\delta_{i,j},\ 1\leq i,j\leq m.$$

于是有

$$\begin{aligned}P_T(x) &= \left(-\frac{1}{2\pi T}\right)^m\int_0^T\cdots\int_0^T du\int_{u_m}^{u_m-T}\cdots\int_{u_1}^{u_1-T}f(t)e^{-it\cdot x}dt\\ &= \left(\frac{1}{2\pi T}\right)^m\int_0^T\cdots\int_0^T dt\int_{t_m}^T\cdots\int_{t_1}^T f(t)e^{-it\cdot x}du\\ &\quad+\left(\frac{1}{2\pi T}\right)^m\int_{-T}^0\cdots\int_{-T}^0 dt\int_0^{T-|t_m|}\cdots\int_0^{T-|t_1|}f(t)e^{-it\cdot x}du\\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m\int_{-T}^T\cdots\int_{-T}^T e^{-it\cdot x}\prod_{j=1}^m(1-\frac{|t_j|}{T})f(t)dt\geq 0.\end{aligned}$$

故由引理 9.1.6 知 $\phi_T(t):=\prod_{j=1}^m(1-\frac{|t_j|}{T})I_{[-T,T]^m}f(t)$ 为特征函数. 由于 $\lim_{T\to\infty}\phi_T(t)=f(t), t\in\mathbf{R}^m$, 且 f 为一 $\mathbf{R}^m$ 上的复值连续函数, 故由特征函数的连续性定理知 f 为特征函数. 证毕.

9.1.8 系 设 f 为 $\mathbf{R}^m$ 上的一复值连续函数, 且 $f(0)=1$, 则 f 为特征函数, 当且仅当 f 是非负定的.

由定理 9.1.7 的证明我们得到 $\mathbf{R}^m$ 上有限 Borel 测度 Fourier 变换的另一个刻画 (属于 Cramér).

9.1.9 定理 设 f 为一 $\mathbf{R}^m$ 上的有界复值连续函数, 则 f 为一有限 Borel 测度的 Fourier 变换, 当且仅当对一切 $T>0$,

$$P_T(x)=\int_{[0,T]^{2m}}f(u-v)e^{i(u-v)\cdot x}dudv\geq 0,\quad x\in\mathbf{R}^m.$$

9.2 测度的 Fourier 变换和 Minlos-Sazanov 定理

设 H 为一实可分 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(H)$ 为它的 Borel σ 代数. 易知 $\mathcal{B}(H)$ 为可分 σ 代数 (即 $\mathcal{B}(H)$ 是可数生成的). 可测空间

$(H,\mathcal{B}(H))$ 上的测度称为 H 上的 **Borel 测度**. 下面我们只讨论 H 上的有限 Borel 测度.

9.2.1 定义 设 μ 为 H 上的一有限 Borel 测度. 令

$$\widehat{\mu}(x)=\int_H e^{i(x,y)}\mu(dy),\ x\in H,$$

称 $\widehat{\mu}$ 为 μ 的 **Fourier 变换**.

显然, $\widehat{\mu}$ 具有如下几条性质:

(1) $\widehat{\mu}(0)=\mu(H)$;

(2) $\widehat{\mu}$ 在 H 上连续 (甚至关于 H 的弱拓扑连续);

(3) $\widehat{\mu}$ 是非负定的.

人们自然要问: 是否与有穷维欧氏空间情形类似, 无穷维 Hilbert 空间上的任何非负定连续泛函都是某一有限 Borel 测度的 Fourier 变换? 答案是否定的. 下面我们将致力于给出 Hilbert 空间上有限 Borel 测度的 Fourier 变换的一个刻画 (Minlos-Sazanov 定理). 为此先证明若干引理.

9.2.2 引理 设 φ 为 H 上一非负定泛函. 则:

(1) $|\varphi(x)|\le\varphi(0),\overline{\varphi(x)}=\varphi(-x)$, $\forall x\in H$;

(2) $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le 2\sqrt{\varphi(0)}\sqrt{|\varphi(0)-\varphi(x-y)|}$, $\forall x,y\in H$;

(3) $|\varphi(0)-\varphi(x)|\le\sqrt{2\varphi(0)(\varphi(0)-\mathrm{Re}\,\varphi(x))}$, $\forall x\in H$.

证 设 $x,y\in H$. 令

$$A=\begin{pmatrix}\varphi(0)&\varphi(x)\\ \varphi(-x)&\varphi(0)\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\varphi(0)&\varphi(x)&\varphi(y)\\ \varphi(-x)&\varphi(0)&\varphi(y-x)\\ \varphi(-y)&\varphi(x-y)&\varphi(0)\end{pmatrix}.$$

由 φ 的非负定性推知 A 和 B 为非负定矩阵. 特别有 $\overline{A^\tau}=A$, 这里 A^τ 表示 A 的**转置**. 故有 $\overline{\varphi(x)}=\varphi(-x)$. 此外由 $\det A\ge 0$ 推知 $|\varphi(x)|\le\varphi(0)$. (1) 得证. 由 (1) 知, 矩阵 B 中的元素 $\varphi(-x),\varphi(-y)$ 及 $\varphi(y-x)$ 可用 $\overline{\varphi(x)},\overline{\varphi(y)}$ 及 $\overline{\varphi(x-y)}$ 替换. 计算 B 的行列式可得

$$\begin{aligned}\det B&=\varphi(0)^3-\varphi(0)|\varphi(x-y)|^2-\varphi(x)[\varphi(0)\overline{\varphi(x)}-\overline{\varphi(x-y)\varphi(y)}]\\&\quad+\varphi(y)[\overline{\varphi(x)}\varphi(x-y)-\varphi(0)\overline{\varphi(y)}]\\&=\varphi(0)^3-\varphi(0)|\varphi(x-y)|^2-\varphi(0)|\varphi(x)-\varphi(y)|^2\\&\quad+2\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}(\varphi(x-y)-\varphi(0))].\end{aligned}$$

因为

$$\varphi(0)^3-\varphi(0)|\varphi(x-y)|^2\le 2\varphi(0)^2|\varphi(0)-\varphi(x-y)|,$$

所以

$$0\le\det B\le 4\varphi(0)^2|\varphi(0)-\varphi(x-y)|-\varphi(0)|\varphi(x)-\varphi(y)|^2,$$

由此推得 (2). (3) 式可由如下不等式推出

$$\begin{aligned}|\varphi(0)-\varphi(x)|^2&=(\varphi(0)-\varphi(x))(\varphi(0)-\overline{\varphi(x)})\\&=\varphi(0)^2-2\varphi(0)\mathrm{Re}\,\varphi(x)+|\varphi(x)|^2\\&\le 2\varphi(0)^2-2\varphi(0)\mathrm{Re}\,\varphi(x).\end{aligned}$$

引理证毕.

设 A 为 H 上线性算子, 若 $(Ax,x)\ge 0,(Ax,y)=(x,Ay),\forall x,y\in H$, 则称 A 为非负对称算子. 若进一步有 $(Ax,x)>0,\forall x\ne 0$, 则称 A 为**正对称算子**. 设 A 为 H 上的一非负对称算子, 令 $\{e_n\}$ 为 H 的一组标准正交基, 则 $\mathrm{Tr}\,A:=\sum_n(Ae_n,e_n)$ 不依赖标准正交基的选取. 若 $\mathrm{Tr}\,A<\infty$, 则称 A 为对称**迹算子**, 并称 $\mathrm{Tr}A$ 为 A 的**迹**.

设 A 为 H 上的非负对称迹算子, 则存在 H 中的一标准正交系 $\{e_n\}$ 及一列非负实数 $\{\lambda_n\}$, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$, 使得 $Ae_n=\lambda_n e_n$, 且有

$$Ax=\sum_n \lambda_n(x,e_n)e_n\ ,\ \forall x\in H\ . \tag{9.2.1}$$

我们称 (9.2.1) 式为对称迹算子 A 的**谱分解**. 这时有 $\mathrm{Tr}A=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n$.

9.2.3 引理 设 μ 为 H 上的有限 Borel 测度, 则下列断言等价:

(1) $\int_H \|x\|^2\mu(dx)<\infty$;

(2) 存在一正对称迹算子 S, 使得 $\forall x,y\in H$ 有

$$(Sx,y)=\int_H (x,z)(y,z)\mu(dz). \tag{9.2.2}$$

如果 (2) 成立, 则

$$\mathrm{Tr}\,S=\int_H \|x\|^2\mu(dx). \tag{9.2.3}$$

证 设 (2) 成立. 令 $\{e_n\}$ 为 H 的一组标准正交基, 则有

$$\begin{aligned}\int_H \|x\|^2\mu(dx)&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_H (x,e_j)^2\mu(dx)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(Se_j,e_j)=\mathrm{Tr}\,S.\end{aligned} \tag{9.2.4}$$

这表明 (1) 成立, 并有 (9.2.3) 式. 反之, 设 (1) 成立, 则

$$\int_H |(x,z)(y,z)|\mu(dz)\le \|x\|\,\|y\|\int_H \|z\|^2\mu(dz).$$

于是存在 H 上一有界线性算子 S, 使得 (9.2.2) 式成立. 显然 S 是正的和对称的. 此外, 由 (9.2.4) 式知

$$\mathrm{Tr}\,S=\int_H \|x\|^2\mu(dx)<\infty.$$

从而 S 是迹算子.

下一定理是 **Minlos-Sazanov 定理**, 它给出了有限 Borel 测度的 Fourier 变换的一个刻画.

9.2.4 定理 设 φ 是 H 上的一正定泛函, 则下列断言等价:

(1)φ 为 H 上某一有限 Borel 测度 μ 的 Fourier 变换;

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在对称迹算子 S_ε, 使得

$$(S_\varepsilon x,x)<1\Longrightarrow \mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(x))<\varepsilon; \tag{9.2.5}$$

(3) 存在 H 上对称迹算子 S, 使得 φ 关于 H 的如下范数 $\|\cdot\|_*$ 连续 (或只在 $x=0$ 处连续):

$$\|x\|_*=(Sx,x)^{1/2}=\|S^{1/2}x\|. \tag{9.2.6}$$

证 (1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $\varphi=\widehat{\mu}$. 对一切 $\gamma>0$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(x))&=\int_H (1-\cos(x,z))\mu(dz)\\&\le\frac{1}{2}\int_{\|z\|\le\gamma}(x,z)^2\mu(dz)+2\mu(\{z\mid \|z\|>\gamma\}).\end{aligned}$$

令 $\mu_1(A)=\mu(A\cap[\|z\|\le\gamma])$. 对 μ_1 应用引理 9.2.3 知, 存在一正的对称迹算子 B_γ 使得

$$(B_\gamma z_1,z_2)=\int_{\|z\|\le\gamma}(z,z_1)(z,z_2)\mu(dz).$$

对给定 $\varepsilon>0$, 先选取 $\gamma>0$ 使得 $\mu([\|z\|>\gamma])<\varepsilon/4$, 再令 $S_\varepsilon=\varepsilon^{-1}B_\gamma$, 则有

$$\mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(x))<\frac{\varepsilon}{2}(S_\varepsilon x,x)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 (2) 成立, 则 $\mathrm{Re}\,\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 故由引理 9.2.2 知 φ 在 H 上连续. 现在任意取定 H 上的一组标准正交基

$\{e_n\}$, 并对每个自然数 $n \geq 1$, 令

$$f_{i_1,\cdots,i_n}(\omega_1,\cdots,\omega_n)=\varphi(\omega_1 e_{i_1}+\cdots+\omega_n e_{i_n}),\ \omega_j\in\mathbf{R},\ 1\leq j\leq n, \tag{9.2.7}$$

则 $f_{i_1,\cdots,i_n}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的一正定函数. 由 Bochner 定理知, $f_{i_1,\cdots,i_n}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上一有限 Borel 测度 $\mu_{i_1,\cdots,i_n}$ 的 Fourier 变换. 显然, 测度族 $\{\mu_{i_1,\cdots,i_n}\}$ 满足 Kolmogorov 测度扩张定理的相容性条件. 于是存在 $(\mathbf{R}^\infty,\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty))$ 上唯一的有限测度 ν 使得

$$\mu_{i_1,\cdots,i_n}=\nu\circ(X_{i_1},\cdots,X_{i_n})^{-1}, \tag{9.2.8}$$

其中 $X_j(\omega)=\omega_j$, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)\in\mathbf{R}^\infty$.

下面我们要证明 $\sum_{k=1}^\infty X_k^2<\infty$, ν-a.e.. 为此, 令 P_n 为 $\mathbf{R}^n$ 上标准 Gauss 测度. 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)}P_n(dy)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_j^2\Big\}. \tag{9.2.9}$$

任给 $\varepsilon>0$, 依据假定, 存在正的对称迹算子 S_ε 使 (9.2.5) 式成立. 于是有

$$\varphi(0)-\operatorname{Re}\varphi(x)\leq\varepsilon+2\varphi(0)(S_\varepsilon x,x)\ ,\ \forall x\in H. \tag{9.2.10}$$

由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}&\varphi(0)-\int_{\mathbf{R}^\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n X_{k+j}^2\Big\}d\nu\\&=\varphi(0)-\int_{\mathbf{R}^\infty}d\nu\int_{\mathbf{R}^n}\exp\Big\{i\sum_{j=1}^n y_jX_{k+j}\Big\}P_n(dy)\\&=\varphi(0)-\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\Big(\sum_{j=1}^n y_je_{k+j}\Big)P_n(dy)\\&=\int_{\mathbf{R}^n}\Big[\varphi(0)-\operatorname{Re}\varphi\Big(\sum_{j=1}^n y_je_{k+j}\Big)\Big]P_n(dy),\end{aligned}$$

由 (9.2.10) 式, 上式不超过

$$\begin{aligned}&\varepsilon+2\varphi(0)\int_{\mathbf{R}^n}\Big(S_\varepsilon\sum_{j=1}^n y_je_{k+j},\sum_{j=1}^n y_je_{k+j}\Big)P_n(dy)\\&=\varepsilon+2\varphi(0)\sum_{j=1}^n(S_\varepsilon e_{k+j},e_{k+j}).\end{aligned}$$

由于 $n\geq1$ 是任意的, 故由上式推知

$$\varphi(0)-\int_{\mathbf{R}^\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^\infty X_j^2\Big\}d\nu\leq\varepsilon+2\varphi(0)\sum_{j=k+1}^\infty(S_\varepsilon e_j,e_j). \tag{9.2.11}$$

在 (9.2.11) 中先令 $k\to\infty$ 再令 $\varepsilon\downarrow0$ 即得 (注意 $\varphi(0)=\nu(\mathbf{R}^\infty)$)

$$\varphi(0)-\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^\infty X_j^2\Big\}d\nu=0,$$

这表明 $\sum_{j=1}^\infty X_j^2<\infty,\nu$-a.e..

最后, 令 $X(\omega)=\sum_{j=1}^\infty X_j(\omega)e_j$, 则 X 在 $\mathbf{R}^\infty$ 上 ν-a.e. 有定义, 且 X 为 H- 值可测函数. 令 $\mu=\nu\circ X^{-1}$, 则 μ 为 H 上的有限 Borel 测度, 且由 (9.2.8) 式知

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}\Big(\sum_{j=1}^n(x,e_j)e_j\Big)&=f_{1,\cdots,n}((x,e_1),\cdots,(x,e_n))\\&=\varphi\Big(\sum_{j=1}^n(x,e_j)e_j\Big).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\widehat{\mu}=\varphi$. (2) $\Longrightarrow$ (1) 证毕.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3). 设 (2) 成立. 令 $S_{1/k}$ 为与 $\varepsilon=1/k$ 相应的正的对称迹算子, 选取 $\lambda_k>0$, 使得 $\sum_k\lambda_k\mathrm{Tr}S_{1/k}<\infty$, 令 $S=\sum_k\lambda_kS_{1/k}$. 则 S 为正的对称迹算子. 显然有

$$\begin{aligned}(Sx,x)<\lambda_k&\Longrightarrow(S_{1/k}x,x)<1\\&\Longrightarrow\operatorname{Re}(\varphi(0)-\varphi(x))<\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{Re}\,\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处关于范数 $\|\cdot\|_*$ 连续, 从而由引理 9.2.2 知 φ 在 H 上关于范数 $\|\cdot\|_*$ 连续. 这表明 (2) $\Longrightarrow$ (3). 反之, 设 (3) 成立. 对给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\|x\|_*<\delta \Longrightarrow \mathrm{Re}(\varphi(0)-\varphi(x))<\varepsilon$. 令 $S_\varepsilon=\delta^{-1}S$, 则 (9.2.5) 式成立. 从而 (3) $\Longrightarrow$ (2) 得证.

9.3 Minlos 定理

下面我们将给出 Minlos-Sazanov 定理的一个更加常用形式——Minlos 定理. 为此, 先引进若干记号和准备一些引理.

设 B 为 H 上一正的对称可逆迹算子. 在 H 上引进新的内积 $(\cdot,\cdot)_-$ 及范数 $\|\cdot\|_-$ 如下:

$$(x,y)_-=(Bx,y),\qquad \|x\|_-=(Bx,x)^{1/2}=\|B^{1/2}x\|.$$

我们用 H_- 表示 H 关于 $\|\cdot\|_-$ 的完备化, 则内积 $(\cdot,\cdot)_-$ 可以连续扩张到 H_- 上, 且 H_- 关于 $(\cdot,\cdot)_-$ 为一可分 Hilbert 空间. 另一方面, 令 H_+ 表示 $B^{-1/2}$ 的定义域, 则易知 H_+ 为 $B^{1/2}$ 的值域 (即 $H_+=B^{1/2}(H)$). 在 H_+ 上引进内积 $(\cdot,\cdot)_+$ 及范数 $\|\cdot\|_+$ 如下:

$$(x,y)_+=(B^{-1/2}x,B^{-1/2}y)\ ,\ \|x\|_+=\|B^{-1/2}x\|\ ,x\in H_+. \tag{9.3.1}$$

则显然有

$$\|Bx\|_+=\|x\|_-\ ,\quad x\in H, \tag{9.3.2}$$

$$\|B^{-1}x\|_-=\|x\|_+\ ,\quad x\in B(H), \tag{9.3.3}$$

$$\|x\|\le\|B\|^{1/2}\|x\|_+\ ,\quad x\in H_+. \tag{9.3.4}$$

关于空间 H_- 及 H_+, 我们有如下结果:

9.3.1 引理 在上述假定及记号下, 我们有:

(1) H_+ 按内积 $(\cdot,\cdot)_+$ 为一可分 Hilbert 空间;

(2) B 可延拓成为 H_- 到 H_+ 上的保范算子, B^{-1} 可延拓成为 H_+ 到 H_- 上的保范算子;

(3) 作为 H_- 中的线性算子, B 是正的对称迹算子, 并且有 $\mathrm{Tr}_-B=\mathrm{Tr}B$. 这里 Tr_-B 表示在 H_- 中计算 B 的迹.

(4) H_+ 与 H_- 互为对偶, $H_+\times H_-$ 上的典则双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为

$$\langle x,y\rangle=(B^{-1}x,y)_-\ ,\quad x\in H_+\ ,\ y\in H_-\ . \tag{9.3.5}$$

证 (1) 设 $\{x_n\}$ 为 H_+ 中按范数 $\|\cdot\|_+$ 的基本列. 由 (9.3.4) 式知, $\{x_n\}$ 亦为 H 中的基本列, 记其极限为 x. 令 $y_n=B^{-1/2}x_n$, 则 $\{y_n\}$ 为 H 中的基本列, 其极限为 y. 于是有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}B^{1/2}y_n=B^{1/2}y.$$

这表明 $x\in H_+$, 且有

$$\|x_n-x\|_+=\|B^{-1/2}(x_n-x)\|=\|y_n-y\|\to 0.$$

于是, H_+ 按范数 $\|\cdot\|_+$ 是完备的, 即 H_+ 按内积 $(\cdot,\cdot)_+$ 为 Hilbert 空间.

(2) 直接由 (9.3.2) 式及 (9.3.3) 式推得.

(3) 作为 H_- 上的线性算子, B 的正性及对称性容易验证. 往证 B 是 H_- 上的迹算子. 设 B 在 H 上的谱分解为

$$Bx=\sum_n\lambda_n(x,e_n)e_n\ ,\quad x\in H.$$

由于假定 B 可逆, $\{e_n\}$ 构成 H 的一组基. 令 $f_n=e_n/\sqrt{\lambda_n}$, 则 $(Bf_n,f_m)=(\lambda_n\lambda_m)^{-1/2}(Be_n,e_m)=\delta_{n,m}$. 故 $\{f_n\}$ 为 H_- 的一组基. 我们有

$$\mathrm{Tr}_-B=\sum_{n=1}^\infty(Bf_n,f_n)_-=\sum_{n=1}^\infty\|Bf_n\|^2=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n=\mathrm{Tr}\,B\,.$$

(4) 由 (2) 知 (9.3.5) 式定义的双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 有意义，此外有

$$|\langle x,y\rangle| \le \|B^{-1}x\|_-\|y\|_- = \|x\|_+\|y\|_- \ .$$

这表明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为使 H_+ 和 H_- 相互对偶的典则双线性型.

有了上面的准备以后，我们可以证明如下的 **Minlos 定理**.

9.3.2 定理 设 φ 为 H 上一连续正定泛函， B 为 H 上一正的对称可逆迹算子， H_- 如前面所定义. 则存在 H_- 上唯一的有限 Borel 测度 μ, 使得

$$\int_{H_-} e^{i\langle x,z\rangle}\mu(dz) = \varphi(x)\ , \quad \forall x\in H_+\ . \tag{9.3.6}$$

证 对 $x\in H_-$, 令 $\psi(x)=\varphi(Bx)$. 则显然 ψ 为 H_- 上的正定泛函. 由引理 9.2.1 知， B 为 H_- 上的正的对称可逆迹算子. 在 H_- 上定义新范数 $\|\cdot\|_*$ 如下：

$$\|x\|_* = \|B^{1/2}x\|_- = \|Bx\|\ .$$

由 φ 在 H 上连续性推知 ψ 在 H_- 上关于范数 $\|\cdot\|_*$ 的连续性. 故由定理 9.2.4 知 ψ 为 H_- 上某一有限 Borel 测度 μ 的 Fourier 变换，即有

$$\int_{H_-} e^{i(y,z)_-}\mu(dz) = \psi(y)\ , \quad \forall y\in H_-\ . \tag{9.3.7}$$

在 (9.3.7) 式中令 $y=B^{-1}x$, $x\in H_+$, 则由 (9.3.5) 式推得 (9.3.6) 式. 定理证毕.

9.4 Hilbert 空间上的 Gauss 测度

下面我们研究 H 上的一类特殊的 Borel 概率测度 ——Gauss 测度. 首先，我们对 H 上一般的 Borel 概率测度引进均值向量和协方差算子概念.

9.4.1 定义 设 μ 为 H 上的一 Borel 概率测度. 如果对一切 $x\in H$, 函数 $z\mapsto(x,z)$ 关于 μ 可积，且存在 H 的一元素 m, 使得

$$(m,x) = \int_H (x,z)\mu(dz)\ , \quad x\in H, \tag{9.4.1}$$

则称 m 为 μ 的**均值向量**. 如果进一步存在 H 上的一正的对称线性算子 B, 使得

$$(Bx,y) = \int_H (z-m,x)(z-m,y)\mu(dz)\ , \quad \forall x,y\in H, \tag{9.4.2}$$

则称 B 为 μ 的**协方差算子**.

均值向量和协方差算子一般未必存在. 但若 $\int_H\|x\|\mu(dx)<\infty$, 则由 Riesz 表现定理知均值向量 m 存在，且 $\|m\|\le\int_H\|x\|\mu(dx)$. 如果进一步有 $\int_H\|x\|^2\mu(dx)<\infty$, 则由引理 9.2.3 知，存在一正的对称迹算子 S, 使得

$$(Sx,y) = \int_H (x,z)(y,z)\mu(dz)\ , \quad \forall x,y\in H. \tag{9.4.3}$$

令

$$Bx = Sx-(m,x)m\ . \tag{9.4.4}$$

容易验证 B 满足 (9.4.2) 式，即 B 为 μ 的协方差算子. 这时 B 亦为正对称迹算子.

9.4.2 定义 设 μ 为 H 上的一 Borel 概率测度. 如果对每个 $x\in H$, 随机变量 $(x,\cdot)$ 服从 Gauss 分布，则称 μ 为 **Gauss 测度**.

下面我们将通过 Fourier 变换来刻画 Gauss 测度. 为此，我们需要一个分析引理.

9.4.3 引理 设 $\{\alpha_j\}$ 为一列实数，满足 $\sum_{j=1}^\infty\alpha_j^2=\infty$. 则存在一列实数 $\{\beta_j\}$, 使得 $\alpha_j\beta_j\ge0$, $\forall j\ge1$, $\sum_{j=1}^\infty\beta_j^2<\infty$ 且 $\sum_{j=1}^\infty\alpha_j\beta_j=\infty$.

证明 令 $n_0=0$, 并归纳定义 n_k 如下:

$$n_k \equiv \inf\{l \mid \textstyle\sum_{j=n_{k-1}+1}^{l} \alpha_j^2 \geq 1\}, \quad k \geq 1.$$

显然有 $n_k \uparrow \infty$. 令

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{k+1}\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j^2\Big)^{-1/2}, \ n_k+1 \leq j \leq n_{k+1}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

则 $\alpha_j\beta_j \geq 0$, $\forall j \geq 1$, 且有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\beta_j^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} < \infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\beta_j = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j\beta_j = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j^2\Big)^{1/2}$$
$$\geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} = \infty.$$

引理证毕.

下一定理给出了 Gauss 测度的一个刻画.

9.4.4 定理 H 上的 Borel 概率测度 μ 是 Gauss 测度的必要充分条件是其 Fourier 变换 $\widehat{\mu}$ 有如下表达式:

$$\widehat{\mu}(x) = \exp\{i(m,x) - \tfrac{1}{2}(Bx,x)\}, \tag{9.4.5}$$

其中 $m \in H$, B 为 H 上的一正的对称迹算子. 这时, m 为 μ 的均值向量, B 为 μ 的协方差算子. 此外还有

$$\int_H \|x\|^2\mu(dx) = \mathrm{Tr}\, B + \|m\|^2. \tag{9.4.6}$$

证 必要性. 设 μ 为一 Gauss 测度. 先证 $\int_H \|x\|^2\mu(dx) < \infty$. 依假定, 对每个 x, $(x,\cdot)$ 服从 Gauss 分布, 于是存在实数 m_x 及正

数 σ_x, 使得

$$\widehat{\mu}(x) = \int_H e^{i(x,z)}\mu(dz) = \exp\{im_x - \tfrac{1}{2}\sigma_x^2\}. \tag{9.4.7}$$

令 $\{e_j\}$ 为 H 的标准正交基, 则

$$\int_H \|x\|^2\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_H (e_j,x)^2\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty}(\sigma_{e_j}^2 + m_{e_j}^2). \tag{9.4.8}$$

设 $\{\beta_j\}$ 为一列实数, 使得 $\beta_j m_{e_j} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^2 < \infty$. 令

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j(e_j,x), \tag{9.4.9}$$

则 ξ 为一 Gauss 随机变量 (因由 Schwarz 不等式, 上述级数绝对收敛), 其均值必有限, 即 $\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j m_{e_j} < \infty$. 于是由引理 9.4.3 知, 必有 $\sum_{j=1}^{\infty} m_{e_j}^2 < \infty$. 因此, 为证 $\int_H \|x\|^2\mu(dx) < \infty$, 只需证 $\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_{e_j}^2 < \infty$. 由定理 9.2.4 知, 存在正的对称迹算子 S, 使得 $(Sx,x) < 1 \Longrightarrow 1 - \mathrm{Re}\,\widehat{\mu}(x) < \frac{1}{3}$. 于是我们有

$$1 - \exp\{-\frac{1}{2}\sigma_x^2\} \leq 1 - \mathrm{Re}\widehat{\mu}(x) \leq (Sx,x) + \frac{1}{3}, \ \forall x \in H. \tag{9.4.10}$$

不妨设 S 的零空间为 $\{0\}$. 对 $x \in H$, $x \neq 0$, 令 $y = [3(Sx,x)]^{-1/2}x$, 则 $\sigma_y^2 = [3(Sx,x)]^{-1}\sigma_x^2$, $(Sy,y) = \frac{1}{3}$. 用 y 代替 (9.4.10) 中的 x, 得到

$$1 - \exp\Big\{-\frac{\sigma_x^2}{6(Sx,x)}\Big\} \leq \frac{2}{3},$$

即有 $\sigma_x^2 \leq (6\log 3)(Sx,x)$, $\forall x \in H$. 由此推知

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_{e_j}^2 \leq (6\log 3)\mathrm{Tr}\, S < \infty.$$

因此, 最终证明了 $\int_H \|x\|^2\mu(dx) < \infty$. 由定义 9.4.1 下面的说明知, μ 的均值向量 m 及协方差算子 B 存在. 采用前面的记号, 我

们有

$$m_x = \int_H (x,z)\mu(dz) = (m,x),$$
$$\sigma_x^2 = \int_H (x,z)^2\mu(dz) - m_x^2 = \int_H [(x,z)^2 - (m,x)^2]\mu(dz)$$
$$= \int_H (x, z-m)^2\mu(dz) = (Bx,x).$$

故由 (9.4.7) 式推得 (9.4.5) 式，由 (9.4.8) 式推得 (9.4.6) 式.

充分性. 设 $m \in H$, B 为 H 上的一正的对称迹算子,

$$\varphi(x) = \exp\{i(m,x) - \tfrac{1}{2}(Bx,x)\},$$

则容易验证 φ 是 H 上的正定泛函. 令

$$Sx = Bx + (m,x)m,$$

则 S 为 H 上正对称迹算子. 在 H 上定义范数 $\|\cdot\|_*$ 如下:

$$\|x\|_* = \|S^{1/2}x\| = ((Bx,x) + (m,x)^2)^{1/2}.$$

显然 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处关于范数 $\|\cdot\|_*$ 连续，故由定理 9.2.4 知 φ 为 H 上某一 Borel 概率测度 μ 的 Fourier 变换. 显然在测度 μ 下，对一切 $x \in H$, $(x,\cdot)$ 服从均值为 (m,x), 方差为 (Bx,x) 的 Gauss 分布. 于是依定义 μ 为 Gauss 测度. 定理证毕.

9.5 Banach 空间上的 Gauss 测度

现在我们转向研究 Banach 空间上的 Gauss 测度. 首先引进柱集及柱测度等基本概念.

设 X 为一实可分 Banach 空间， X^* 为其对偶空间. 我们用 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{X^*}$ 分别表示 X 和 X^* 上的范数, 并用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $X \times X^*$

上的典则双线性型. 令 $\mathcal{F}(X^*)$ 表示 X^* 的有限维线性子空间的全体. 对给定 $K \in \mathcal{F}(X^*)$, 我们称形如

$$C = \{x \in X \mid (\langle x, y_1\rangle, \cdots, \langle x, y_n\rangle) \in E\} \tag{9.5.1}$$

的集为**以 K 为底的柱集**, 这里 $n \geq 1$, E 为 $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 子集, $y_1, \cdots, y_n \in K$. 我们用 $\mathcal{C}(K)$ 表示由以 K 为底的柱集在 X 上生成的 σ 代数. 令

$$\mathcal{R}(X) = \bigcup_{K \in \mathcal{F}(X^*)} \mathcal{C}(K), \tag{9.5.2}$$

则 $\mathcal{R}(X)$ 为代数.

9.5.1 引理 设 X 为一实可分 Banach 空间, 则 $\sigma(\mathcal{R}(X)) = \mathcal{B}(X)$. 这里 $\mathcal{B}(X)$ 为 X 的 Borel σ 代数.

证 首先, 显然有 $\sigma(\mathcal{R}(X)) \subset \mathcal{B}(X)$. 由于 X 为可分距离空间. 每个开集可表为可数个闭球的并. 因此, 为证 $\sigma(\mathcal{R}(X)) = \mathcal{B}(X)$, 只需证每个闭球属于 $\sigma(\mathcal{R}(X))$. 设 $S = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$, 其中 $x_0 \in X$, $r > 0$. 令 $\{a_n\}$ 为 X 的可数稠子集. 由 Hahn-Banach 定理, 对每个 $n \geq 1$, 存在 $z_n \in X^*$, 使得 $\|z_n\|_{X^*} = 1$, $\langle a_n, z_n\rangle = \|a_n\|$. 令

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid |\langle x - x_0, z_n\rangle| \leq r\}.$$

显然 $S \subset T$, $T \in \sigma(\mathcal{R}(X))$. 往证 $S = T$. 如果 $x \notin S$, 即 $\|x - x_0\| = r_1 > r$, 则存在某个 n, 使得 $\|x - x_0 - a_n\| < (r_1 - r)/2$. 这时必有 $\|a_n\| > (r_1 + r)/2$, 且有

$$|\langle x - x_0, z_n\rangle| \geq |\langle a_n, z_n\rangle| - |\langle x - x_0 - a_n, z_n\rangle|$$
$$\geq \|a_n\| - \|x - x_0 - a_n\| > r.$$

这表明 $x \notin T$. 于是 $T \subset S$. 最终有 $S = T \in \sigma(\mathcal{R}(X))$. 证毕.

9.5.2 定义 设 μ 为 $\mathcal{R}(X)$ 上的非负集函数. 如果 $\mu(X)=1$, 且对一切 $K\in\mathcal{F}(X^*)$, μ 限于 σ- 代数 $\mathcal{C}(K)$ 为一测度, 则称 μ 为 X 上的**柱 (概率) 测度**. X 上的复值函数 f, 如果存在某个 $K\in\mathcal{F}(X^*)$, 使得 f 关于 $\mathcal{C}(K)$ 为可测, 则 f 称为**柱函数**.

有界柱函数 f 关于柱测度 μ 的积分是有意义的, 只要把柱测度看成使 f 可测的 σ- 代数 $\mathcal{C}(K)$ 上的测度. 我们用 $\int_X f(x)\mu(dx)$ 表示这一积分. 特别, 对柱测度 μ, 我们可令

$$\widehat{\mu}(z)=\int_X e^{i\langle x,z\rangle}\mu(dx)\,,\ z\in X^*\,, \tag{9.5.3}$$

称 $\widehat{\mu}$ 为 μ 的**特征泛函**.

显然, 柱测度的特征泛函是 X^* 上的连续正定泛函. 反之, 设 φ 为 X^* 上的连续正定泛函, 且 $\varphi(0)=1$, 则存在唯一的柱测度 μ, 使得 φ 为 μ 的特征泛函.

一个自然的问题是: 什么样的柱测度可以扩张成为 X 上的一 Borel 测度? 下面我们将对一种特殊情形回答这一问题. 这一特殊情形是: Banach 空间 X 是某个实可分 Hilbert 空间 H 关于某个较弱范数的完备化, 而 X 上的柱测度是由 H 上的某个柱测度 "提升" 得到的.

设 H 为一实可分 Hilbert 空间. 我们用 $(\cdot,\cdot)$ 及 $|\cdot|$ 分别表示 H 中的内积及范数. 设 $\|\cdot\|$ 为 H 上的另一范数, 满足如下条件: 存在一常数 $c>0$, 使得 $\|x\|\le c|x|$. 这时, 我们说范数 $\|\cdot\|$ 比范数 $|\cdot|$ 弱. 令 X 为 H 关于范数 $\|\cdot\|$ 的完备化, 则 X 为一可分 Banach 空间, H 可视为 X 的一线性子空间. 我们将 H 的对偶 H^* 与 H 等同起来, 则 X 的对偶空间 X^* 可以视为 H 的如下子集:

$$X^*=\left\{y\in H\ \middle|\ \sup_{x\in H,\|x\|=1}|(x,y)|<\infty\right\}. \tag{9.5.4}$$

我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $X\times X^*$ 上的典则双线性型, 则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $H\times X^*$ 上与内积 $(\cdot,\cdot)$ **吻合, 即有**

$$\langle x,y\rangle=(x,y)\,,\quad \forall x\in H,\ y\in X^*. \tag{9.5.5}$$

我们用 $\mathcal{F}(X^*)$ 及 $\mathcal{F}(H)$ 分别表示 X^* 及 H 的有限维子空间全体. 由于 $\mathcal{F}(X^*)\subset\mathcal{F}(H)$, 且对每个 $K\in\mathcal{F}(X^*)$, 若以 $\mathcal{C}_X(K)$ 及 $\mathcal{C}_H(K)$ 分别表示以 K 为底的柱集在 X 及 H 上生成的 σ 代数, 则 $\mathcal{C}_X(K)\cap H\subset\mathcal{C}_H(K)$. 因此, 我们有 $\mathcal{R}(X)\cap H\subset\mathcal{R}(H)$. 这样一来, 对 H 上的每个柱测度 μ, 我们可以定义 X 上的一柱测度 μ^* 如下:

$$\mu^*(C)=\mu(C\cap H)\,,\quad C\in\mathcal{R}(X)\,, \tag{9.5.6}$$

我们称 μ^* 为 μ 到 X 上的**提升**. 显然, 对 $x\in X^*$, 我们有 $\widehat{\mu^*}(x)=\widehat{\mu}(x)$. 这表明 μ^* 的特征泛函是 μ 的特征泛函在 X^* 上的限制. 今后我们用 (H,X,μ) 表示上面引进的 Hilbert 空间、Banach 空间及 H 上的柱测度, 并称它为**基本三元组**. 在回答前面提出的问题之前, 我们还需要引进可测范数概念, 它是 Gross 在 [3] 中最早提出的.

下面我们用 $\mathcal{P}$ 表示 H 中有限维 (正交) 投影算子全体. 对 $P\in\mathcal{P}$, 令 $f(x)=\|Px\|$, $x\in H$, 则 f 是 H 上的柱函数.

9.5.3 定义 设 $(H,|\cdot|)$ 为一 Hilbert 空间, μ 为 H 上的柱测度, $\|\cdot\|$ 为 H 上的另一范数, 且比范数 $|\cdot|$ 弱. 如果对于每个 $\varepsilon>0$, 存在 $P_\varepsilon\in\mathcal{P}$, 使得对任何与 P_ε 正交的 $P\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu\{x\in H\ |\ \|Px\|>\varepsilon\}<\varepsilon\,,$$

则称 $\|\cdot\|$ **关于 μ 可测**.

9.5.4 定义 设 μ 为 H 上的柱测度. 如果 $\widehat{\mu}(x)=\exp\{-\frac{1}{2}|x|^2\}$, 则称 μ 为 H 上的**(标准)Gauss 柱测度**.

显然，μ 为 Gauss 柱测度，当且仅当对一切 $P\in\mathcal{P}$, $\mu\circ P^{-1}$ 为 $P(H)$ 上的 Gauss 测度.

下一定理是著名的 **Gross 定理**(见 Gross, L., Abstract Wiener spaces, In: *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. II*, Part **1**, Univ. California Press, Berkeley, 1965, 31–41.), 下面的简化证明是 Kallianpur 在 Z. Wahr. verw. Gebiete 17(1971): 113-123 中给出的.

9.5.5 定理 设 (H,X,μ) 为一基本三元组. 如果 μ 是 Gauss 柱测度，且范数 $\|\cdot\|$ 为 μ 可测的，则 μ 到 X 上的提升 μ^* 可以扩张成为 X 上的 Borel 测度，称它为 X 上的 Gauss 测度.

证 令 $\{\xi_n\}$ 为某个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$ 上的一列相互独立的标准正态随机变量. 由范数 $\|\cdot\|$ 的 μ 可测性，存在 H 的一列有限维正交投影 $\{P_n\}$, 使得 $P_n\uparrow I$(I 为恒等算子) 且对任何与 P_n 正交的 $P\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu\{x\in H\mid \|Px\|>2^{-n}\}<2^{-n}\ .$$

我们可以选取 H 的一组标准正交基 $\{e_n\}$，使得 $\{e_1,\cdots,e_{n_k}\}$ 为 $P_k(H)$ 的标准正交基. 令

$$\eta_k(\omega)=\sum_{j=1}^{n_k}\xi_j(\omega)e_j\ ,$$

则我们有

$$\eta_{k+1}-\eta_k=\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\xi_j(\omega)e_j\ .$$

由于 $P_{k+1}x-P_kx=\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}(x,e_j)e_j$, 且 $\forall E\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n_{k+1}-n_k})$,

$$\begin{aligned}&\lambda\{\omega\,|\,(\xi_{n_k+1}(\omega),\cdots,\xi_{n_{k+1}}(\omega))\in E\}\\&=\mu\{x\in H\,|\,((e_{n_k+1},x),\cdots,(e_{n_{k+1}},x))\in E\},\end{aligned}$$

于是有

$$\lambda(\|\eta_{k+1}-\eta_k\|>2^{-k})=\mu\{x\in H\mid \|P_{k+1}x-P_kx\|>2^{-k}\}<2^{-k}\ .$$

因此，$\{\eta_k\}$ 依概率收敛于一 X 值随机元 η. 令 ν 为 η 的分布，即 $\nu=\lambda\circ\eta^{-1}$, 则对每个 $z\in X^*$,

$$\begin{aligned}\widehat{\nu}(z)&=\int_X e^{i\langle x,z\rangle}\nu(dx)=\int_\Omega e^{i\langle\eta(\omega),z\rangle}\lambda(d\omega)\\&=\lim_{k\to\infty}\int_\Omega\exp\Big\{i\langle\sum_{j=1}^{n_k}\xi_j(\omega)e_j,z\rangle\Big\}\lambda(d\omega)\\&=\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n_k}e^{-\langle e_j,z\rangle^2/2}=e^{-|z|^2/2}=\widehat{\mu}^*(z)\ .\end{aligned}$$

这表明 μ^* 与 ν 在 $\mathcal{R}(X)$ 上一致，即 ν 为 μ^* 的扩张.

9.5.6 定义 设 X 为一实可分 Banach 空间，μ 为 X 上的 Borel 概率测度，如果对一切 $z\in X^*$, $\langle\cdot,z\rangle$ 为 X 上的零均值正态随机变量，则称 μ 为 X 上的**对称 Gauss 测度**. 这时称 $(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 为 **Gauss 测度空间**.

设 $(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 为 Gauss 测度空间. H 为一 Hilbert 空间，它在 X 中稠，X 的范数 $\|\cdot\|$ 限于 H 比 H 的 Hilbert 范数 $|\cdot|$ 弱，这时将 H 的对偶空间与 H 等同，则 X 的对偶空间 X^* 可视为 H 的子集. 若 μ 的特征泛函 $\widehat{\mu}(z)=\exp\{-\frac{1}{2}|z|^2\}$, $z\in X^*$, 则称三元组 (H,X,μ) 为一**抽象 Wiener 空间**.

最后我们以有关 Banach 空间上对称 Gauss 测度的 Fernique 定理结束这一节.

9.5.7 定理 设 E 为一实可分 Banach 空间，μ 为 $(E,\mathcal{B}(E))$ 上的对称 Gauss 测度. 则存在 $\lambda>0$, 使得

$$\int_E e^{\lambda\|x\|^2}\mu(dx)<\infty\ . \tag{9.5.7}$$

证 设 X, Y 为某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的两个独立 E 值随机元，其分布都是 μ. 令

$$\widetilde{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \quad \widetilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y).$$

容易看出，$\widetilde{X}$ 与 $\widetilde{Y}$ 相互独立，且其分布仍为 μ. 设 $t \geq s \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned}
P(\|X\| \leq s)P(\|X\| > t) &= P(\|\widetilde{Y}\| \leq s)P(\|\widetilde{X}\| > t) \\
&= P\left(\frac{\|X-Y\|}{\sqrt{2}} \leq s\right)P\left(\frac{\|X+Y\|}{\sqrt{2}} > t\right) \\
&= P\left(\frac{\|X-Y\|}{\sqrt{2}} \leq s,\ \frac{\|X+Y\|}{\sqrt{2}} > t\right) \\
&\leq P(|\,\|X\| - \|Y\|\,| \leq \sqrt{2}s,\ \|X\| + \|Y\| > \sqrt{2}t) \\
&\leq P\left(\|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}},\ \|Y\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left[P\left(\|X\| > \frac{t-s}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 .
\end{aligned} \tag{9.5.8}$$

固定 $r > 0$. 令 $t_0 = r$, $t_{n+1} = r + \sqrt{2}t_n, n \geq 1$, 定义

$$\alpha_n(r) = \frac{P(\|X\| > t_n)}{P(\|X\| \leq r)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

则由 (9.5.8) 式得到

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}(r) &= \frac{P(\|X\| > r + \sqrt{2}t_n)}{P(\|X\| \leq r)} \\
&\leq \left[\frac{P(\|X\| > t_n)}{P(\|X\| \leq r)}\right]^2 = \alpha_n(r)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

于是有

$$\alpha_n(r) \leq \exp\{2n \log \alpha_0(r)\}, \ n = 0, 1, \cdots$$

此外，由于 $(\sqrt{2})^{n+4}r > t_n$, 故有

$$\begin{aligned}
P(\|X\| > (\sqrt{2})^{n+4}r) &\leq P(\|X\| > t_n) = \alpha_n(r)P(\|X\| \leq r) \\
&\leq \exp\{2n \log \alpha_0(r)\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

因此，对 $\lambda > 0$, 令

$$\Sigma_n = \{x \in E \mid (\sqrt{2})^{n+4}r < \|x\| \leq (\sqrt{2})^{n+5}r\},$$

我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\|x\|>4r} e^{\lambda\|x\|^2}\mu(dx) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Sigma_n} e^{\lambda\|x\|^2}\mu(dx) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\|X\| > (\sqrt{2})^{n+4}r)\exp\{\lambda r^2 2^{n+5}\} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{2n(\log \alpha_0(r) + 32\lambda r^2)\}.
\end{aligned}$$

先取 r 充分大，使 $P(\|X\| > r) < e^{-1}P(\|X\| \leq r)$, 再取 λ 充分小，使得

$$\log \frac{P(\|X\| > r)}{P(\|X\| \leq r)} + 32\lambda r^2 \leq -1,$$

由于 $2n \leq 2^n$, 故有

$$\int_E e^{\lambda\|x\|^2}\mu(dx) \leq e^{16\lambda r^2} + \frac{e^2}{e^2-1}.$$

定理证毕.

参考文献

1. Cohn, D.L.. Measure Theory. Birkhäuser, 1980

2. Diestel, J.. Sequences and Series in Banach Spaces. Springer-Verlag, 1984

3. Dudley, R.M.. Real Analysis and Probability. Cambridge University Press, 2002

4. Hall, P., Heyde, C.C.. Martingale Limit Theory and Its Application. Academic press, 1980

5. 黄志远、严加安. 无穷维随机分析引论. 北京：科学出版社, 1997

6. Kallenberg, O.. Foundations of Modern Probability. 2nd Edition. Springer-Verlag, 2002

7. Kallenberg, O.. Random Measure. Academic Press, 1976

8. Ma, Z.M. (马志明). Some Results on Regular Conditional Probabilities. Acta Math. Sinica, New Series, **1(4)**(1985), 128–133

9. Mukherjes, A., Pothoven, K.. Real and Functional Analysis. 2nd Edition. Part A: Real Analysis, Plenum Press, 1984

10. 严加安. 鞅与随机积分引论. 上海：上海科技出版社, 1981

11. Yan, J.A. (严加安). Charactérisation d'une classe d'ensembles convex de L^1 ou $\mathcal{H}^1$. Séminaire de Probabilités XIV, LN in Math. **784**. Springer-Verlag, 1980, 220–222

12. Yan, J.A. (严加安). On the communitability of essential infimum and conditional expectation operations. Chinese Science Bulletin, **30(8)**(1985), 1013–1018

13. Yan, J.A. (严加安). A remark on conditional expectations. Chinese Science Bulletin, **35(9)** (1990), 719–722

14. Yan, J.A. (严加安). Constructing Kernels via Stochastic Measures. In: Gaussian Random Fields, T. Hida et al.(eds.), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, 396–405

名 词 索 引

一 至 四 画

五 画

六 画

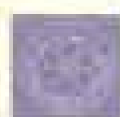
七 画

八 画

九 画

十画以上

其它



中国科学院研究生教学丛书



测度论讲义

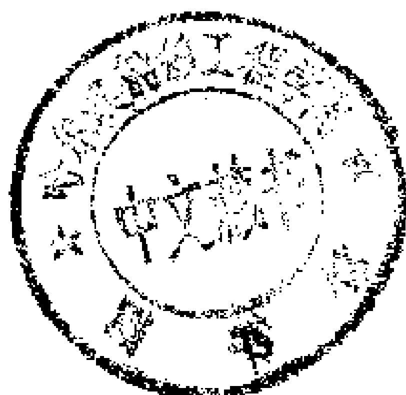
严加安 著

科学出版社

中国科学院研究生教学丛书

测 度 论 讲 义

严加安 著



科 学 出 版 社

1998

内 容 简 介

本书系统介绍了一般可测空间上的测度与积分，Hausdorff空间上的测度与积分以及测度的弱收敛和淡收敛. 此外，书中还介绍了与测度论有关的概率论基础知识，如条件数学期望，正则条件概率，一致可积性，解析集及经典缺论.

本书可作为概率统计专业及其它数学专业的研究生教材，也可作为概率论研究工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

测度论讲义/严加安著. —北京：科学出版社，1998

（中国科学院研究生教学丛书/路甬祥主编）

ISBN 7-03-006680-4

Ⅰ. 测… Ⅱ. 严… Ⅲ. 测度论 Ⅳ. O174. 12

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第08059号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1998年10月第一次印刷 印张：7 1/4

印数：1—2200 字数：185 000

定价：15.00元

序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了.相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量.世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争.而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科学人才的数量和质量.我国要想在21世纪顺利地实施"科教兴国"和"可持续发展"战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军.这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生.当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好"三个基地"的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业

发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作. 由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.” 我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把它们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

前　言

测度论是现代数学的一个重要分支，它的主要奠基人是法国数学家 Lebesgue(1875—1941). 受他的老师 Borel 关于容量研究的深刻影响，他在 1902 年的论文《积分、长度与面积》中，首次把 $\mathbb{R}^2$ 中的长度和面积概念推广为一般 Borel 集的 Lebesgue 测度，并定义了可测函数关于 Lebesgue 测度的积分. 他用累次积分计算重积分的结果后来被 Fubini(1907) 完善为一般的定理. Radon(1913) 进一步研究了 $\mathbb{R}^d$ 中在紧集上为有穷的一般 Borel 测度 (Radon 测度). 抽象可测空间上的测度和符号测度概念是 Fréchet(1915) 最先提出的. Radon-Nikodym(1930) 给出了符号测度为一不定积分的充要条件 (Radon-Nikodym 定理). 在早期的测度论发展史中，积分概念的两个推广值得一提. 其一是 Daniell(1918) 从一类函数上的正线性泛函出发研究了测度和积分；其二是 Bochner(1933) 和 Pettis(1938) 定义了 Banach 空间值函数关于测度的积分. 到本世纪 30 年代，测度与积分理论已趋于成熟，并在概率论、泛函分析和调和分析中得到广泛应用. 例如，Kolmogorov(1933) 从测度论观点出发创立了概率公理化体系，为现代概率论奠定了数学基础. 其中非常重要的条件数学期望概念就源于测度论中的 Radon-Nikodym 定理. 随着时间的推移，测度论在数学中的基础性地位愈来愈显示出来. 50 年代以后发展起来的无穷维空间中的测度和泛函积分成了研究量子物理的重要手段和工具.

本书是为概率统计专业和其它数学专业的研究生编写的一部测度论教材，它的前身是作者的《测度与积分》(陕西师大出版社，1988). 这里改正了原书中出现的错误，并对原书的第五章作了较大修改，还在第三章、第六章及第七章中增加了若干新的内

容. 全书内容分为三个部分: (1) 一至四章介绍一般可测空间中的测度与积分. 这一部分内容与通常测度论教材大体相当, 但第三章中的 Daniell 积分、Bochner 积分和 Pettis 积分以及第四章中的 Tulcea 定理在通常测度论教材中是不易找到的. (2) 第五章系统、完整地介绍了 Hausdorff 空间中的测度和积分. 这一部分内容对初学者有一定难度, 教师在讲授时可以跳过它. (3) 第六章介绍有关测度的弱收敛和淡收敛的主要结果; 第七章介绍与测度论有关的概率论基础知识, 如条件数学期望, 正则条件概率, 一致可积性, 本性上确界, 解析集及经典鞅论等. 这一部分内容是专门为概率统计专业的研究生设计的, 在对其它数学专业的研究生讲授时可以略去. 本书几乎每一节都附有一定数量的习题, 其中不少是对正文的补充, 有些习题还在一些定理的证明中被引用.

本书的写作和出版分别得到了中国国家自然科学基金 (项目编号 79790130) 和中国科学院研究生教材出版基金的资助, 特此表示感谢.

严加安

1997 年 8 月于北京

目　录

第一章 集类与测度

§1 集合运算与集类

集合是现代数学的最基本的概念之一. 任何一组彼此可以区别的事物便构成一个集合. 在测度论中, 我们通常在某一 (或某些) 给定的集合 (称为 **空间**) 中讨论问题.

1.1 令 Ω 为一给定的非空集合, 其元素以 ω 记之. 设 A 为 Ω 的子集, 我们用 $\omega \in A$ 或 $\omega \notin A$ 分别表示 ω 属于 A 或不属于 A. 不含任何元素的集称为 **空集**, 以 $\emptyset$ 记之. 我们用 $A \supset B$ 或 $B \subset A$ 表示 B 是 A 的子集, 用

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ A \triangle B$$

分别表示 A 与 B 的 **交**、**并**、**差** 和 **对称差**, 即

$$A \cap B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 且} \omega \in B\},\ A \cup B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 或} \omega \in B\},$$
$$A \setminus B = \{\omega:\ \omega \in A \text{ 且} \omega \notin B\},\ A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

我们用 A^c 表示 $\Omega \setminus A$, 并称 A^c 为 A(在 Ω 中) 的 **余集**, 于是有 $A \setminus B = A \cap B^c$. 有时也用 AB 表示 $A \cap B$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 称 A 与 B **互不相交**. 显然有 $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = \Omega$.

1.2 集合交和并运算满足如下的 **交换律**、**分配律及结合律**:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A;$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

此外, 它们关于余集运算有如下的 **de Morgan 公式**:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A^c)^c = A.$$

1.3 以 Ω 的某些子集为元素的集合称为 (Ω 上的)**集类**. 今后，如无特别说明，总假定集类是非空的，即至少含一个元素 (可以是空集). 设 $\{A_i,\ i\in I\}$ 为一集类, 其中 I 为 **指标集**, 它用以给集类元素"编号", 则可如下定义集类中元素的交与并:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega:\ \omega\in A_i,\ \text{对一切}\, i\in I\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega:\ \omega\in A_i,\ \text{对某一}\, i\in I\}.$$

我们有相应的交换律、分配律、结合律及 de Morgan 公式.

1.4 设 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为一集合序列. 若对每个 n, 有 $A_n\subset A_{n+1}$ (相应地, $A_n\supset A_{n+1}$), 则称 (A_n) 为 **单调增**(相应地, **单调降**). 二者统称为 **单调列**. 对单调增或单调降序列 (A_n), 我们分别令 $A=\bigcup_n A_n$ 或 $A=\bigcap_n A_n$, 称 A 为 (A_n) 的 **极限**, 通常记为 $A_n\uparrow A$ 或 $A_n\downarrow A$. 一般地, 对任一集列 (A_n), 令

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

分别称其为 (A_n) 的 **上极限** 和 **下极限**. 显然有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega:\ \omega\ \text{属于无穷多个}\,A_n\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega:\ \omega\ \text{至多不属于有限多个}\,A_n\},$$

从而恒有 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 称 (A_n) 的极限存在, 并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示 (A_n) 的 **极限**(即令 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$).

1.5 设 $\{A_n, n\geq 1\}$ 为一集列. 若 (A_n) 两两不相交 (即 $n\neq m\Rightarrow A_n\cap A_m=\emptyset$), 则常用 $\sum_n A_n$ 表示 $\bigcup_n A_n$. 若有 $\sum_n A_n=\Omega$, 称 $\{A_n,\ n\geq 1\}$ 为 Ω 的一个 **划分**.

对任一集列 (A_n), 令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n A_1^c \cdots A_{n-1}^c\,,\ n \geq 2,$$

则 $\{B_n, n \geq 1\}$ 中集合两两不相交，且有 $\sum_n B_n = \bigcup_n A_n$. 这一将可列并表示为可列不交并的技巧是很有用的.

1.6 设 $\mathcal{C}$ 为一集类 (约定是非空的). 如果 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ (从而 $A_1, A_2, \cdots A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow A_1 A_2 \cdots, A_n \in \mathcal{C}$), 称 $\mathcal{C}$ **对有限交封闭**. 如果 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{C}$, 称 $\mathcal{C}$ **对可列交封闭**. 类似可定义"对有限并封闭"及"对单调极限封闭"等概念. 令

$$\mathcal{C}_{\cap f} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \ : \ n \geq 1, A_i \in \mathcal{C}, i = 1, \cdots, n \right\},$$

则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 对有限交封闭, 我们称 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 为用有限交运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 类似地, 我们用

$$\mathcal{C}_{\cup f},\ \mathcal{C}_{\Sigma f},\ \mathcal{C}_{\delta},\ \mathcal{C}_{\sigma},\ \mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$$

分别表示用有限并、有限不交并、可列交、可列并及可列不交并封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类. 此外, 我们用 $\mathcal{C}_{\cap f, \cup f}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\cap f})_{\cup f}$, 用 $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ 表示 $(\mathcal{C}_{\sigma})_{\delta}$. 今后常用这些记号, 读者应熟悉并牢记它们.

1.7 命题 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则有如下结论:

(1) $\mathcal{C}_{\cap f, \cup f} = \mathcal{C}_{\cup f, \cap f}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭, 则 $\mathcal{C}_{\cup f}, \mathcal{C}_{\Sigma f}, \mathcal{C}_{\sigma}$ 及 $\mathcal{C}_{\Sigma\sigma}$ 亦然;

(3) 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭, 则 $\mathcal{C}_{\cap f}$ 及 $\mathcal{C}_{\delta}$ 亦然.

证 直接从集合的交和并的分配律推得.

现在我们用对集合运算的封闭性来划分不同类型的集类. 下面是测度论中常用的一些集类的定义.

1.8 定义 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 称 $\mathcal{C}$ 为 π-**类**, 如果它对有限交封闭.

(2) 称 $\mathcal{C}$ 为 **半环**, 如果 $\emptyset \in \mathcal{C}$, 且有

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C},\ A \setminus B \in \mathcal{C}_{\Sigma f}.$$

(3) 称 $\mathcal{C}$ 为 **半代数**, 如果它是半环, 且 $\Omega \in \mathcal{C}$.

(4) 称 $\mathcal{C}$ 为 **代数**(或 **域**), 如果它对有限交及取余集运算封闭 (由此推知 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对有限并及差运算封闭).

(5) 称 $\mathcal{C}$ 为 **σ- 代数**, 如果它对可列交及取余集运算封闭 (由此推知 $\mathcal{C}$ 对可列并及差运算封闭, 且 $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$).

(6) 称 $\mathcal{C}$ 为 **单调类**, 如果它对单调序列极限封闭 (即 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1, A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$).

(7) 称 $\mathcal{C}$ 为 **λ-类**, 如果它满足下列条件:

(i) $\Omega \in \mathcal{C}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{C},\ B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$;

(iii) $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1,\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{C}$.

易知: σ- 代数为 λ- 类, λ- 类为单调类.

1.9 例 设 $\mathbb{R}$ 为实直线 (即 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$), 令

$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{C}_2 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C}_3 = \{(a, b] : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\},$$

则 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 及 $\mathcal{C}_3$ 为 π- 类, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ 为半环, $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{\mathbb{R}\}$ 为半代数.

习题

1.10
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C),$$
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C),$$
$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

1.11 $(\liminf\limits_{n \to \infty} A_n) \cap (\limsup\limits_{n \to \infty} B_n) \subset \limsup\limits_{n \to \infty} (A_n \cap B_n)$.

1.12 对可列不交并封闭的代数为 σ- 代数.

1.13 若 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类或同时为 π- 类和 λ- 类, 则 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

1.14 设 $\mathcal{C}$ 为半代数, 则 $\mathcal{C}_{\Sigma f}$ 为代数.

1.15 λ- 类定义中的条件 (i) 及 (ii) 等价于如下二条件:

(i)′ $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}$;

(ii)′ $A,B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}$.

1.16 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，且 $\emptyset\in\mathcal{C}$，令

$$\mathcal{G}=\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j^c\right):\ n,m\geq 1,A_i,B_j\in\mathcal{C},\right.$$

$$\left.1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m\right\},$$

则 $\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$，且 $\mathcal{G}$ 为半环．特别若 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，则 $\{A\cap B^c:A,B\in\mathcal{C}\}$ 为半环．

§2 单调类定理 (集合形式)

设 $\{\mathcal{C}_i:\ i\in I\}$ 为 Ω 上一族集类，若每个集类 $\mathcal{C}_i$ 对某种集合运算封闭，则其交 $\bigcap_i\mathcal{C}_i$ 亦然．于是对 Ω 上的任一非空集类 $\mathcal{C}$，存在包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ- 代数、最小 λ- 类和最小单调类，我们分别称之为由 $\mathcal{C}$ **生成的σ-代数、λ-类和单调类**，并分别用 $\sigma(\mathcal{C}),\lambda(\mathcal{C})$ 和 $m(\mathcal{C})$ 记之．我们恒有 $m(\mathcal{C})\subset\lambda(\mathcal{C})\subset\sigma(\mathcal{C})$．本节主要研究在什么条件下有 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$．

2.1 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类．

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，则 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$．

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为一 π- 类，则 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$．

证 (1) 令

$$\mathcal{G}_1=\{A\in m(\mathcal{C}):\ A^c\in m(\mathcal{C}),A\cap B\in m(\mathcal{C}),\forall B\in\mathcal{C}\},$$

则 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_1$，且 $\mathcal{G}_1$ 为单调类，故 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$．令

$$\mathcal{G}_2\doteq\{A\in m(\mathcal{C}):\ A\cap B\in m(\mathcal{C}),\forall B\in m(\mathcal{C})\},$$

则由上所证 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$ 知，$\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_2$．但 $\mathcal{G}_2$ 为单调类，故 $\mathcal{G}_2=m(\mathcal{C})$．综上所证，我们有

$$A\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C});\ A,B\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A\cap B\in m(\mathcal{C}),$$

即 $m(\mathcal{C})$ 为一代数，从而 $m(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数 (习题 1.13)，因此有 $m(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立，故最终有 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

(2) 的证明类似，请读者自行完成.

此定理称为 **单调类定理**. 它表明：为验证某 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 中元素有某种性质，只需验证：(1) 有一生成 $\mathcal{F}$ 的代数 (π- 类)$\mathcal{C}$, 其元素有该性质；(2) 有该性质的集合全体构成一单调类 (相应地，λ- 类). 而这后二者的验证往往比较容易. 单调类定理是测度论中的一个重要的证明工具. 今后我们将陆续给出它的应用.

作为定理 2.1 的一个简单推论，我们有单调类定理的如下更有用的形式.

2.2 定理 设 $\mathcal{C},\mathcal{F}$ 为两个集类，且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

(1) 若 $\mathcal{C}$ 为代数，且 $\mathcal{F}$ 为单调类，则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$;

(2) 若 $\mathcal{C}$ 为 π- 类且 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类，则 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

现在我们着手推广定理 2.1, 即寻找使 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 或 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ 的充要条件. 细心的读者可能已经看出：在定理 2.1(1) 的证明中，只要 $\mathcal{C}$ 满足

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A,\, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}),$$

则定理结论仍成立. 于是我们得到定理 2.1 的下述推广.

2.3 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A,\, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \lambda(\mathcal{C}).$$

由此定理，我们还可推得如下的

2.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类.

(1) 为要 $m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需：

$$A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{C});\ A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in m(\mathcal{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$, 必须且只需:

$$A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\lambda(\mathcal{C}).$$

证 令 $\mathcal{D}=\{A^c: A\in\mathcal{C}\}$, 则由定理 2.3, 分别在 (1) 及 (2) 的条件下推得 $m(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{D})$ 及 $\lambda(\mathcal{D})=\sigma(\mathcal{D})$. 我们分别有 $m(\mathcal{D})\subset m(\mathcal{C})$ (因 $\mathcal{D}\subset m(\mathcal{C})$) 及 $\lambda(\mathcal{D})=\lambda(\mathcal{C})$ (请读者自行验证). 故定理中条件的充分性得证. 条件的必要性是显然的.

上述两个定理过于一般, 实际难于应用, 但它们的下述推论是有用的 (例如见下面的例 2.6 及定理 6.3). 需要指出: 如果不首先建立定理 2.3 及 2.4, 那么是不易发现定理 2.5 的.

2.5 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 若它满足下列条件之一, 则有 $m(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$:

(1) $A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{C}$, $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\delta$;

(2) $A, B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}$, $A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in\mathcal{C}_\sigma$.

(关于记号 $\mathcal{C}_\delta$ 及 $\mathcal{C}_\sigma$ 见 1.6)

证 若 $\mathcal{C}$ 对有限交封闭, 则 $\mathcal{C}_\delta\subset m(\mathcal{C})$; 若 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭, 则 $\mathcal{C}_\sigma\subset m(\mathcal{C})$. 因此条件 (1) 及 (2) 分别蕴含定理 2.3 及 2.4 的 (1) 中条件, 定理得证.

2.6 例 设 X 为一距离空间, $\mathcal{F}$ 表示 X 中闭集全体, $\mathcal{G}$ 表示 X 中开集全体. 显然有 $\sigma(\mathcal{F})=\sigma(\mathcal{G})$, 我们称它为 X 的 **Borel σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(X)$. 显然 $\mathcal{G}$ 及 $\mathcal{F}$ 分别满足定理 2.5 的条件 (1) 及 (2), 于是我们有 $m(\mathcal{F})=m(\mathcal{G})=\mathcal{B}(X)$. 但这一结果并不能从定理 2.1 推得. 由此可见, 我们将经典的单调类定理进行推广是有意义的.

作为本节的结束, 我们引进可分 σ- 代数及原子概念.

2.7 定义 设 $\mathcal{F}$ 为一 σ- 代数. 称 $\mathcal{F}$ 为**可分的**(或**可数生成的**), 如果存在 $\mathcal{F}$ 的一可数子类 $\mathcal{C}$, 使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$.

注意: 可分 σ- 代数的元素未必是可数多个.

由习题 1.16 及 1.14 易知: 若 $\mathcal{F}$ 可分, 则存在一代数 $\mathcal{C}$, 其元素个数至多可数, 使得 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$.

2.8 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数. 对任一 $\omega \in \Omega$, 令

$$\mathcal{F}_\omega = \{B \in \mathcal{F}: \ \omega \in B\}, \ A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}_\omega} B,$$

称 $A(\omega)$ 为含 ω 的**原子**.

请读者证明下述结论:

(1) 设 $\omega, \omega' \in \Omega$, 则或者 $A(\omega) = A(\omega')$, 或者 $A(\omega) \cap A(\omega') = \emptyset$;

(2) 设 $\mathcal{F}$ 可分, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的可数代数. 对任何 $\omega \in \Omega$, 令 $\mathcal{C}_\omega = \{B \in \mathcal{C} : \omega \in B\}$, 则有

$$A(\omega) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}_\omega} B.$$

习题

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类, $A \subset \Omega$. 令

$$A \cap \mathcal{C} = \{A \cap B : B \in \mathcal{C}\}$$

(这一记号以后常用到), 并用 $\sigma_A(A \cap \mathcal{C})$ 表示 $A \cap \mathcal{C}$(视为 A 上集类) 在 A 上生成的 σ- 代数, 则有

$$\sigma_A(A \cap \mathcal{C}) = A \cap \sigma(\mathcal{C}).$$

对 $m(\mathcal{C})$ 、 $\lambda(\mathcal{C})$ 亦有类似结果.

2.10 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m, \sum_n A_n = \Omega$), 则对任何 $B \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{C})$, 存在 $B_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A_n).$$

2.11 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 则对任何 $A \in \sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A \in \sigma(\mathcal{D})$.

2.12 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，则对任何 $A\in m(\mathcal{C})$, 存在 $B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$ (提示：令 $\mathcal{G}$ 表示具有所说性质的集合 A 全体，证明 $\mathcal{G}$ 为单调类).

2.13 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，则下列二条件等价：

(1) $\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

(2) $A\in\mathcal{C}\Rightarrow m(\mathcal{C})$; $A,B\in\mathcal{C}$, $A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

2.14 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 如果

$$A,\ B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}_{\Sigma\sigma},$$

则有 $\lambda(\mathcal{C})=\sigma(\mathcal{C})$)(提示：利用习题 1.14).

§3 测度与非负集函数

学过实分析的人都知道：Lebesgue测度是线段长度概念的延伸 (或更一般地，是欧氏空间中面积或体积概念的延伸). 下面我们将要引入的测度概念则是 Lebesgue 测度的抽象化.

3.1 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数，称序偶 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一**可测空间**, $\mathcal{F}$ 中的元称为 **$\mathcal{F}$-可测集**. 设 μ 为定义于 $\mathcal{F}$ 取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$ 的函数. 如果 $\mu(\emptyset)=0$ 且 μ 有 **可数可加性** 或 σ- **可加性**, 即

$$A_n\in\mathcal{F}\ \ n\geq 1,\ A_n\cap A_m=\emptyset, n\neq m\Rightarrow$$
$$\mu(\sum_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

则称 μ 为 Ω 上的 (或 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的)**测度**.

设 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度，称三元组 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为 **测度空间**. 若 $\mu(\Omega)<\infty$, 则称 μ 为 **有限测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为 **有限测度空间**. 若 $\mu(\Omega)=1$, 则称 μ 为 **概率测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为 **概率空间**. 若存在 $A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$, 使得 $\bigcup_n A_n=\Omega$, 且使 $\mu(A_n)<\infty$ 对一切 $n\geq 1$ 成立 (由 1.5 知，可取 (A_n) 为 Ω 的一个划分), 则称 μ 为 **σ-有限测度**, 并称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为 **σ-有限测度空间**.

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 若 $A\in\mathcal{F}$, 且 $\mu(A)=0$, 称 A 为 **μ-零测集**. 如果任何 μ- 零测集的子集皆属于 $\mathcal{F}$, 称 $\mathcal{F}$ 关于 μ 是**完备的**, 称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为**完备测度空间**.

为了下节研究测度的扩张的需要, 我们引进一般的非负集函数的概念. 设 $\mathcal{C}$ 为任一集类. 定义于 $\mathcal{C}$ 取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的函数称为 $\mathcal{C}$ 上的**非负集函数**. 在下面的定义叙述中, 我们总约定 $\emptyset\in\mathcal{C}$, 且非负集函数 μ 满足 $\mu(\emptyset)=0$ 及**单调性**:

$$A,\ B\in\mathcal{C}, A\subset B\Rightarrow\mu(A)\le\mu(B).$$

3.2 定义 设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上非负集函数.

(1) 称 μ 为**有限可加的**, 如果对一切 $n\ge2$,

$$A_i\in\mathcal{C}, 1\le i\le n,\ \sum_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

(2) 称 μ 为 **σ-可加的**, 如果

$$A_i\in\mathcal{C},\ i\ge1,\ \sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(3) 称 μ 为**半 σ- 可加的**, 如果

$$A\in\mathcal{C}; A_i\in\mathcal{C}, i\ge1, \text{ 且 } A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\mu(A)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(4) 称 μ **从下连续**, 如果

$$A_n\in\mathcal{C}, A_n\uparrow A\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(5) 称 μ **从上连续**, 如果

$$A_n\in\mathcal{C}, A_n\downarrow A\in\mathcal{C} \text{ 且 } \mu(A_1)<\infty\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(6) 称 μ **在 $\emptyset$ 处连续**, 如果

$$A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow \emptyset, \text{ 且 } \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

(7) 称 μ **在 $\mathcal{C}$ 上有限**, 如果对一切 $A \in \mathcal{C}$, 有 $\mu(A) < \infty$.

(8) 称 μ **在 $\mathcal{C}$ 上 σ- 有限**, 如果对任一 $A \in \mathcal{C}$, 存在 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 使得 $A \subset \bigcup_n A_n$, 且 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 n 成立.

这些概念都是可以"顾名思义"的, 读者很容易记住它们.

下一定理概括了测度的最基本性质.

3.3 定理 设 μ 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上一测度, 则 μ 从下连续且从上连续 (从而也在 $\emptyset$ 处连续). 此外, μ 有单调性及如下的 **可减性**:

$$A, B \in \mathcal{F}, A \subset B, \text{ 且 } \mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

证 单调性及可减性是显然的. 由可减性及从下连续性立刻推得从上连续性, 只需证 μ 的从下连续性. 设 $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1, A_n \uparrow A$. 为证 $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, 不妨设 $\forall n \geq 1$, 有 $\mu(A_n) < \infty$, 则有

$$\mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n).$$

由于 $A = \bigcup_n A_n = A_1 \cup \sum_{n=1}^{\infty}(A_{n+1} \setminus A_n)$, 故有

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty}[\mu(A_{n+1} - \mu(A_n)] = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

下一定理推广了定理 3.3 的结论.

3.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为一代数, μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负集函数, 则 μ 有单调性及可减性. 此外, μ 为 σ- 可加 $\Leftrightarrow$ μ 从下连续 $\Rightarrow$ μ 从上连续 $\Rightarrow$ μ 在 $\emptyset$ 处连续. 若进一步 $\mu(\Omega) < \infty$, 则上述诸条件等价.

证 设 μ 从下连续，往证 μ 为 σ- 可加的. 令 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, 则 $B_n = \sum_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{C}$, 且 $B_m \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 于是由 μ 的有限可加性及从下连续性得

$$\mu\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{m\to\infty} \mu\Big(\sum_{n=1}^{m} A_n\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

这表明 μ 有 σ- 可加性. 其余结论显然 (参见上一定理的证明).

下一引理将使我们在许多场合把与 σ- 有限测度有关的问题归结为与概率测度有关的问题.

3.5 引理 设 μ 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一 σ- 有限测度. 若 $\mu(\Omega) > 0$, 令 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为 Ω 的一个可数划分，使得 $\forall n, A_n \in \mathcal{F}$, 且 $0 < \mu(A_n) < \infty$, 置

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)}, \ A \in \mathcal{F}, \tag{3.1}$$

则 ν 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一概率测度，此外有 $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(A) = 0$, 并且对任何 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \nu(A \cap A_n) \mu(A_n). \tag{3.2}$$

证 只需证 (3.2), 其余结论显然. 在 (3.1) 中令 $A \cap A_m$ 代替 A, 得

$$\nu(A \cap A_m) = \frac{\mu(A \cap A_m)}{2^m \mu(A_m)}.$$

由此立得 (3.2).

习题

3.6 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负函数，则 μ 有单调性及可减性. 此外，设 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1, A \in \mathcal{C}$, 且 $\sum_n A_n \subset A$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.

3.7 设 $(I,\prec)$ 为一定向集，$(\mu_i, i\in I)$ 为 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 上的一族测度，满足 $i\prec j \Rightarrow \mu_i \le \mu_j$. 令

$$\mu(A)=\sup_i \mu_i(A),\quad A\in\mathcal{F},$$

则 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

3.8 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，$\mu(\Omega)<\infty$,$\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数，则对任何 $A\in\mathcal{F}$, 我们有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B): B\in\mathcal{C}_\delta, B\subset A\}=\inf\{\mu(B): B\in\mathcal{C}_\sigma, B\supset A\}.$$

(提示：令 $\mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中使上式成立的集 A 全体，证明 $\mathcal{G}$ 为单调类，再利用单调类定理)

3.9 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间，$\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 若 $A\in\mathcal{F}$, 则 $\forall\epsilon>0$, 存在 $B\in\mathcal{C}$, 使得 $\mu(A\triangle B)<\epsilon$. (提示：利用习题 3.8)

§4 外测度与测度的扩张

本节研究如何把一半环 $\mathcal{C}$ 上的一 σ- 可加非负集函数扩张成为 σ- 代数 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的测度，通常采用的方法是外测度方法.

4.1 定义 令 $\mathcal{A}(\Omega)$ 表示 Ω 的所有子集 (包括空集) 所构成的集类，设 μ 为 $\mathcal{A}(\Omega)$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset)=0$). 如果 μ 满足如下的 **次 σ- 可加性**：

$$A_n\subset\Omega, n\ge 1\Rightarrow \mu(\bigcup_n A_n)\le\sum_n\mu(A_n),$$

则称 μ 为 Ω 上的一 **外测度**.

下一定理是测度扩张的基础.

4.2 定理 设 μ 为 Ω 上的一外测度. 令

$$\mathcal{U}=\{A\subset\Omega: \forall D\subset\Omega, \text{有}\ \mu(D)=\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D)\},\quad (4.1)$$

则 $\mathcal{U}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 我们称 $\mathcal{U}$ 中的元素为 **μ-可测集**.

证 首先注意：为要 $A\in\mathcal{U}$, 当且仅当 $\forall D\subset\Omega$

$$\mu(D)\geq\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D). \tag{4.2}$$

设 $A,B\in\mathcal{U}$, 则由 (4.1) 及 μ 的次可加性知： $\forall D\subset\Omega$,

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D)\\&=\mu(A\cap D)+\mu(B\cap A^c\cap D)+\mu(B^c\cap A^cD)\\&\geq\mu((A\cup B)\cap D)+\mu((A\cup B)^c\cap D).\end{aligned}$$

这表明 $A\cup B\in\mathcal{U}$. 此外，由 (4.1) 知， $A\in\mathcal{U}\Rightarrow A^c\in\mathcal{U}$, 故 $\mathcal{U}$ 为一代数.

下面证明 $\mathcal{U}$ 为 σ- 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 为此，设 $A_n\in\mathcal{U},n\geq1$, 且 $A_n\cap A_m=\emptyset,n\neq m$, 则对任何 $D\subset\Omega$, 我们有 (注意 $A_k\cap A_{k-1}^c\cap\cdots\cap A_1^c=A_k$)

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\mu(A_1\cap D)+\mu(A_1^c\cap D)\\&=\mu(A_1\cap D)+\mu(A_2\cap D)+\mu(A_2^c\cap A_1^c\cap D)=\cdots\\&=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\cap D)+\mu((\sum_{k=1}^{n}A_k)^c\cap D)\\&\geq\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\cap D)+\mu((\sum_{k=1}^{\infty}A_k)^c\cap D).\end{aligned}$$

在上式中令 $n\to\infty$, 并由 μ 的次 σ- 可加性立得

$$\begin{aligned}\mu(D)&\geq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\cap D)+\mu((\sum_{k=1}^{\infty}A_k)^c\cap D)\\&=\mu((\sum_{k=1}^{\infty}A_k)\cap D)+\mu((\sum_{k=1}^{\infty}A_k)^c\cap D).\end{aligned}$$

这表明 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}$. 此外，在上式中令 $D = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 得

$$\mu(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

因此，$\mathcal{U}$ 为一 σ- 代数，且 μ 限于 $\mathcal{U}$ 为一测度. 证毕.

下一命题的证明是不足道的，故从略.

4.3 命题 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{C}$. 又设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一半 σ- 可加非负集函数，且 $\mu(\emptyset) = 0$. 令

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},\ A \subset \Omega \qquad (4.3)$$

(这里及今后，约定 $\inf \emptyset = +\infty$)，则 μ^* 为 Ω 上的外测度，且 μ^* 限于 $\mathcal{C}$ 与 μ 一致，我们称 μ^* 为**由 μ 引出的外测度**.

4.4 命题 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset) = 0$). 则为要 μ 是 σ- 可加的，必须且只需 μ 为有限可加且半 σ- 可加的.

证 **必要性** 设 μ 为 σ- 可加，显然 μ 为有限可加. 令 $A \in \mathcal{C}, A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 且 $A \subset \bigcup_n A_n$, 往证 $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 令

$$B_1 = A_1,\ B_n = A_n A_1^c \cdots A_{n-1}^c,\ n \geq 2,$$

则由半环的定义知 $B_n \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$(记号见 1.6), 且有 $\bigcup_n A_n = \sum_n B_n$, 从而 $A = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cap A)$. 由于 $B_n \cap A \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$, 故存在 $C_{n,m} \in \mathcal{C}, 1 \leq m \leq k(n)$, 使得

$$B_n \cap A = \sum_{m=1}^{k(n)} C_{n,m}\ ,\quad n \geq 1.$$

由 μ 的可加性推知

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k(n)} \mu(C_{n,m}).$$

但由于 $A_n \supset \sum_m C_{n,m}, A_n \setminus \sum_m C_{n,m} = A_n \cap (\bigcap_m C^c_{n,m}) \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$，故由 μ 的有限可加性易知

$$\mu(A_n) \geq \sum_{m=1}^{k(n)} \mu(C_{n,m}).$$

因此有 $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$，此即 μ 的半 σ- 可加性.

充分性 现设 μ 有限可加且半 σ- 可加. 设 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, $\sum_n A_n = A \in \mathcal{C}$, 我们要证 $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$. 由于对一切 $k \geq 1, A \setminus \sum_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{C}_{\Sigma f}$, 故由 μ 的有限可加性知 $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$. 但 k 是任意的，故 $\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 再由 μ 的半 σ- 可加性知 $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 证毕.

下一引理给出了 μ^*- 可测集的一个刻画.

4.5 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{C}$. 又设 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一半 σ- 可加非负集函数，且 $\mu(\emptyset) = 0$, μ^* 为 μ 引出的外测度. 则为要 A 为 μ^*- 可测集，必须且只需对一切 $C \in \mathcal{C}$, 有

$$\mu(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c)\,(\text{或者等价地，等号成立}). \quad (4.4)$$

证 只需证充分性. 设 $A \subset \Omega$, 且对一切 $C \in \mathcal{C}$,(4.4) 成立. 任取 $D \subset \Omega$. 若 $\mu^*(D) = \infty$, 显然 (4.2) 成立 (μ^* 代替 μ). 若 $\mu^*(D) < \infty$, 则由 μ^* 的定义，对任给 $\epsilon > 0$, 可取 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_n A_n \supset D$, 且 $\mu^*(D) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \epsilon$. 于是由 (4.4) 及 μ^* 的次 σ- 可加性有

$$\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geq \sum_n \Big[\mu^*(A_n \cap A) + \mu^*(A_n \cap A^c)\Big] - \epsilon \\
&\geq \mu^*\Big(\big(\bigcup_n A_n\big) \cap A\Big) + \mu^*\Big(\big(\bigcup_n A_n\big) \cap A^c\Big) - \epsilon \\
&\geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c) - \epsilon.
\end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，故有 (4.2) 成立 (以 μ^* 代替 μ). 这表明 A 为 μ^* - 可测集. 证毕.

下一引理是应用单调类定理的一个典型例子，我们在讨论测度扩张的唯一性时将用到它.

4.6 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π- 类，μ_1 及 μ_2 为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的两个有限测度. 若 $\Omega\in\mathcal{C}$, 且 μ_1 与 μ_2 限于 $\mathcal{C}$ 一致，则 μ_1 与 μ_2 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致.

证 令 $\mathcal{G}=\{A\in\sigma(\mathcal{C}):\mu_1(A)=\mu_2(A)\}$, 则由定理 3.3 知 $\mathcal{G}$ 为 λ- 类. 但依假定，有 $\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$, 故由单调类定理知 $\mathcal{G}\supset\sigma(\mathcal{C})$, 从而 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$. 证毕.

下一定理称为 **Carathéodory测度扩张定理**.

4.7 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一半环，μ 为 $\mathcal{C}$ 上的一 σ- 可加非负集函数，则 μ 可以扩张成为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的一测度. 若进一步 μ 在 $\mathcal{C}$ 上为 σ- 有限，且 $\Omega\in\mathcal{C}_\sigma$, 则这一扩张是唯一的，并且扩张所得的测度在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上也是 σ- 有限的.

证 由命题 4.4, μ 在 $\mathcal{C}$ 上有半 σ- 可加性. 令 μ^* 为 μ 按 (4.3) 引出的外测度，令 $\mathcal{U}$ 为 μ^*- 可测集全体. 现设 $A\in\mathcal{C}$, 往证 $A\in\mathcal{U}$. 对任何 $C\in\mathcal{C}$, 我们有 $C\cap A^c=\sum_{j=1}^n B_j$, 其中 $B_1,\cdots,B_n\in\mathcal{C}, B_i\cap B_j=\emptyset, i\neq j$, 于是有

$$\mu^*(C\cap A^c)\leq\sum_{i=1}^n\mu(B_i).$$

但我们有 $C=(C\cap A)\cup\sum_{i=1}^n B_i$, 故由 μ 的有限可加性得

$$\begin{aligned}\mu(C)&=\mu(C\cap A)+\sum_{i=1}^n\mu(B_i)\\&\geq\mu^*(C\cap A)+\mu^*(C\cap A^c),\end{aligned}$$

由引理 4.5 便知 $A\in\mathcal{U}$. 最终我们有 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{U}$. 令 $\widetilde{\mu}$ 为 μ^* 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的限制，则 $\widetilde{\mu}$ 为 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的测度. 显然 $\widetilde{\mu}$ 与 μ 在 $\mathcal{C}$ 上一致，即 $\widetilde{\mu}$ 为 μ 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的扩张.

现假定 μ 在 $\mathcal{C}$ 上 σ- 有限，且 $\Omega\in\mathcal{C}_\sigma$. 由于 $\mathcal{C}$ 是半环，不难证明存在 Ω 的一个可数划分 (A_n), 使得 $A_n\in\mathcal{C},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$,

且 $\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$. 设 μ_1 与 μ_2 为 μ 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的两个测度扩张，则由于 $A_n\cap\mathcal{C}$ 为 π- 类，且 $A_n\cap\mathcal{C}\subset\mathcal{C}$, 故由引理 4.6 知， μ_1 与 μ_2 在 $A_n\cap\sigma(\mathcal{C})$ 上一致，从而 μ_1 与 μ_2 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致.

4.8 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu(B):\ B\supset A,\,B\in\mathcal{F}\},\ A\subset\Omega,$$

则 μ^* 为 Ω 上的外测度. 令 $\mathcal{U}$ 为 μ^*- 可测集全体，则 $(\Omega,\mathcal{U},\mu^*)$ 为完备测度空间. 我们称 $(\Omega,\mathcal{U},\mu^*)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的 **完备化**, 称 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{F}$ 的 **μ-完备化**.

习题

4.9 (测度的限制) 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间， $\Omega_0\subset\Omega$, 且 $\mu^*(\Omega_0)=\mu(\Omega)$. 则 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有 $\mu^*(A\cap\Omega_0)=\mu(A)$, 并且 μ^* 限于 $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 为一测度. 称 μ^* 为 μ 到 $(\Omega_0,\Omega_0\cap\mathcal{F})$ 上的 **限制**.

4.10 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间，$\Omega_0\subset\Omega$. 令 $\mathcal{F}_0=\Omega\cap\mathcal{F}$,

$$\nu(A)=\inf\{\mu(G):G\in\mathcal{F},G\cap\Omega_0=A\},\quad A\in\mathcal{F}_0,$$

则 ν 为 $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ 上一测度. 令

$$\tilde{\mu}(B)=\nu(B\cap\Omega_0),\quad \forall B\in\mathcal{F},$$

则 $\tilde{\mu}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度，且 $\tilde{\mu}\leq\mu$.

4.11 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mathcal{N}=\{N\subset\Omega:\ \exists A\in\mathcal{F},\mu(A)=0,\ \text{使}\,A\supset N\},$$
$$\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup N:\ A\in\mathcal{F},\ N\in\mathcal{N}\},$$

则 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 σ- 代数，μ 可以唯一扩张成为 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的测度 $\overline{\mu}$, 且 $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的完备化.

§5 欧氏空间中的 Lebesgue-Stieltjes 测度

本节将利用上节的结果来建立 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 为此, 我们先引进若干记号.

设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点. 若对一切 i 有 $a_i\le b_i$(相应地, $a_i<b_i$), 则记为 $a\le b$(相应地, $a<b$). 设 $a\le b$, 我们令

$$\mathcal{C}=\{(a,b]:a\le b,\ a,b\in\mathbb{R}^n\},$$

$$\mu((a,b])=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i).$$

5.1 引理 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的半环, 且 μ 为 $\mathcal{C}$ 上的 σ- 可加非负集函数.

证 $\mathcal{C}$ 显然为半环. 由归纳法易证 μ 在 $\mathcal{C}$ 上是有限可加的 (直观上看, 体积具有有限可加性). 为证 μ 在 $\mathcal{C}$ 上为 σ- 可加的, 只需证 μ 为半 σ- 可加的 (命题 4.4). 为此, 设

$$I=(a,b],\ I_i\in(a^{(i)},b^{(i)}],$$

其中 $a<b,a^{(i)}<b^{(i)}$, 且 $I\subset\bigcup_i I_i$. 对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\overline{a},\overline{b}^{(i)},a<\overline{a}<b$ 及 $\overline{b}^{(i)}>b^{(i)},i\ge1$, 使得

$$\mu((\overline{a},b])\ge\mu((a,b])-\epsilon$$

$$\mu((a^{(i)},\overline{b}^{(i)}])\le\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+2^{-i}\epsilon,\ i=1,2,\cdots.$$

由有限覆盖定理, 存在自然数 $N\ge1$, 使得 $[\overline{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^N(a^{(i)},\overline{b}^{(i)})$, 从而有 $[\overline{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^N(a^{(i)},\overline{b}^{(i)}]$, 故有

$$\mu((a,b])-\epsilon\le\mu((\overline{a},b])\le\sum_{i=1}^N\mu((a^{(i)},\overline{b}^{(i)}])$$

$$\le\sum_{i=1}^\infty\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+\epsilon.$$

令 $\epsilon\downarrow 0$ 得 $\mu(I)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(I_i)$, μ 的半 σ- 可加性得证. 证毕.

令 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ- 代数. 易知: $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 于是由测度扩张定理立得如下的

5.2 定理 μ 可以唯一地扩张成为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的一 σ- 有限测度 (称之为 **Lebesgue 测度**).

令 $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 的 μ- 完备化, 称 $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ 中元为 **Lebesgue 可测集**, 而 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 中的元称为 **Borel 可测集**.

5.3 定义 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一右连续实值函数, 对 $a,b\in\mathbb{R}^n$, $a\le b$, 令

$$\triangle_{b,a}F=\triangle^{(n)}_{b_n,a_n}\triangle^{(n-1)}_{b_{n-1}a_{n-1}}\cdots\triangle^{(1)}_{b_1,a_1}F,$$

其中

$$\begin{aligned}\triangle^{(i)}_{b_i,a_i}G(x)=&G(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\&-G(x_1,\cdots,x_{i-1},a_ix_{i+1},\cdots,x_n).\end{aligned}$$

如果对一切 $a\le b$, 有 $\triangle_{b,a}F\ge 0$, 称 F 为 **增函数**.

设 μ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上一 σ- 有限测度. 称 μ 为 **Lebesgue-Stieltjes 测度** (简称为 L-S 测度), 如果对任何 $C\in\mathcal{C}$, 有 $\mu(C)<\infty$(即 μ 在 $\mathcal{C}$ 上有限). 下一定理表明: $\mathbb{R}^n$ 上的 L-S 测度与 $\mathbb{R}^n$ 上的右连续增函数之间有某种对应关系.

5.4 定理 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一右连续增函数. 令

$$\mu_F(\emptyset)=0,\ \mu_F((a,b])=\triangle_{a,b}F,\ a\le b,\ a,b\in\mathbb{R}^n,$$

则 μ_F 可以唯一地扩张成为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 反之, 设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一 L-S 测度, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一右连续增函数 F(但不唯一), 使得 μ 为 μ_F 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的唯一扩张.

证 设 F 为右连续增函数. 与引理 5.1 类似可证: μ_F 为 $\mathcal{C}$ 上的一 σ- 可加集函数, 从而可以唯一地扩张成为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度. 定理后半部分证明比较复杂, 我们就省略了 (如果 μ 比较特殊, 满足 $\mu((-\infty,x])<\infty$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 则令 $F(x)=\mu((-\infty,x])$ 即得所要的增函数, 这至少对概率论来说是够用了).

§6 测度的逼近

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 本节研究在什么条件下, $\mathcal{F}$- 可测集的测度可以通过 $\mathcal{F}$ 的一子类 $\mathcal{C}$ 中的元素的测度来逼近. 这一问题在研究拓扑空间上测度的正则性时很重要.

6.1 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子类. 令

$$\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)=\sup[\mu(B):B\in\mathcal{C}_\delta,B\subset A]\},$$

则 $\mathcal{H}\supset\mathcal{C}_\delta$, 且 $\mathcal{H}$ 有如下性质:

(1) $A_n\in\mathcal{H},\ n\geq 1,\ A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathcal{H}$;

(2) $A_n\in\mathcal{H},\ \mu(A_n)<\infty,\ n\geq 1\Rightarrow\bigcap\limits_n A_n\in\mathcal{H}$.

特别, 若 μ 为有限测度, 则 $\mathcal{H}$ 为单调类, 且对可列交封闭.

证 (1) 设 $A_n\in\mathcal{H},n\geq 1,A_n\uparrow A$. 若 $\mu(A)=\infty$, 则 $\mu(A_n)\uparrow\infty$, 于是易从 $\mathcal{H}$ 的定义知 $A\in\mathcal{H}$. 现设 $\mu(A)<\infty$. 对任给 $\epsilon>0$, 先取 n_0, 使得 $\mu(A_{n_0})\geq\mu(A)-\frac{\epsilon}{2}$. 再取 $B\in\mathcal{C}_\delta,B\subset A_{n_0}$, 使得 $\mu(B)\geq\mu(A_{n_0})-\frac{\epsilon}{2}$. 则有 $B\subset A$, 且 $\mu(B)\geq\mu(A)-\epsilon$, 这表明 $A\in\mathcal{H}$.

(2) 设 $A_n\in\mathcal{H},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$. 对每个 $n\geq 1$, 令 $B_n\in\mathcal{C}_\delta,B_n\subset A_n$, 使得 $\mu(B_n)\geq\mu(A_n)-2^{-n}\epsilon$. 令 $B=\bigcap\limits_n B_n$, 则 $B\in\mathcal{C}_\delta,B\subset\bigcap\limits_n A_n$, 且有

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcap_n A_n\Big)-\mu(B)&=\mu\Big(\bigcap_n A_n\setminus\bigcap_n B_n\Big)\leq\mu\Big(\bigcup_n(A_n\setminus B_n)\Big)\\&\leq\sum_n[\mu(A_n)-\mu(B_n)]\leq\epsilon,\end{aligned}$$

这表明 $\bigcap_n A_n\in\mathcal{H}$.

6.2 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间, $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子类. 令

$$\mathcal{G}=\Big\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)=\inf\{\mu(B):B\in\mathcal{D}_\sigma,B\supset A\}\Big\},$$

则 $\mathcal{G}\supset\mathcal{D}_\sigma$,$\mathcal{G}$ 为单调类，且对可列并封闭.

证 令 $\mathcal{C}=\{D^c, D\in\mathcal{D}\}$, 并如引理 6.1 中定义 $\mathcal{H}$, 则易见 $A\in\mathcal{G}\Leftrightarrow A^c\in\mathcal{H}$. 故由引理 6.1 立得本引理结论.

下一定理是测度逼近定理，它的证明依赖于推广了的单调类定理 (定理 2.5).

6.3 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子类，且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{F}$. 此外设 $\mathcal{C}$ 满足如下条件：

$$A,\,B\in\mathcal{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C};\quad A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in(\mathcal{C}_\delta)_\sigma.$$

若 $A\in\mathcal{F}$, 且 μ 在 A 上为 σ- 有限，则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B):\,B\subset A,\,B\in\mathcal{C}_\delta\}. \tag{6.1}$$

证 首先假定 $\mu(A)<\infty$, 令

$$\nu(B)=\mu(A\cap B),\;B\in\mathcal{F},$$

则 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限测度. 令

$$\mathcal{H}=\big\{C\in\mathcal{F}:\,\nu(C)=\sup\{\nu(B):\,B\subset C,B\in\mathcal{C}_\delta\}\big\},$$

则由引理 6.1 知， $\mathcal{H}$ 为单调类，且 $\mathcal{H}\supset\mathcal{C}_\delta$. 由 $\mathcal{C}$ 满足的条件推得

$$A,\,B\in\mathcal{C}_\delta\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{C}_\delta;\,A\in\mathcal{C}_\delta\Rightarrow A^c\in(\mathcal{C}_\delta)_\sigma.$$

于是由定理 2.5 知 $\mathcal{H}\supset m(\mathcal{C}_\delta)=\sigma(\mathcal{C}_\delta)=\mathcal{F}$, 特别有 $A\in\mathcal{F}$, 即有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(B):\,B\subset A,\,B\in\mathcal{C}_\delta\},$$

此即 (6.1).

现设 $\mu(A)=\infty$. 令 $A_n\in\mathcal{F},\mu(A_n)<\infty,n\geq 1$, 使得 $A_n\uparrow A$, 则由上所证，我们有

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(B):\,B\subset A,B\in\mathcal{C}_\delta\}&\geq\sup\{\mu(B):\,B\subset A_n,B\in\mathcal{C}_\delta\}\\&=\mu(A_n).\end{aligned}$$

但 $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$, 故 (6.1) 成立. 定理证毕.

作为定理的推论, 我们有如下命题, 它推广了习题 3.8.

6.4 命题 在定理 6.3 条件下, 假定 μ 为有限测度, 则对一切 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(B):\ B \subset A, B \in \mathcal{C}_\delta\}\\ &= \inf\{\mu(C):\ C \supset A, C \in \mathcal{D}_\sigma\},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D} = \{C^c : C \in \mathcal{C}\}$.

第二章 可测映射

§1 定义及基本性质

1.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间，f 为 Ω 到 E 中的映射 (简记为 $f:\Omega\longrightarrow E$). 如果对一切 $A\in\mathcal{E}$, 有 $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$, 则称 f 为 **$\mathcal{F}$-可测映射**.

今后，我们用 $f^{-1}(\mathcal{E})$ 表示集类 $\{f^{-1}(A):A\in\mathcal{E}\}$. 于是，$f$ 为 $\mathcal{F}$- 可测映射 $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$.

1.2 定义 设 $\mathbb{R}$ 为实数域，$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. 我们分别用 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 及 $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 表示 $\mathbb{R}$ 及 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的 Borel σ- 代数. 令 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，f 为 Ω 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的映射. 如果 $f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))\subset\mathcal{F}$, 称 f 为 **Borel 可测函数**, 简称可测函数. 若进一步 f 只取实值，则称 f 为 **实值可测函数**. 设 $\mathbb{C}$ 为复数域，$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ 称为 **复值可测函数**, 是指它的实部和虚部同时为实值可测函数.

容易看出：f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的实值可测函数，当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 中的可测映射.

下一命题给出了可测映射的一个有用刻画.

1.3 命题 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间，$\mathcal{C}$ 为生成 σ- 代数 $\mathcal{E}$ 的一集类. 如果 f 为 Ω 到 E 中的一个映射，使得 $f^{-1}(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$, 则 f 为可测映射.

证 令 $\mathcal{G}=\{A\subset E:f^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$, 则 $\mathcal{G}$ 为 E 上的一 σ- 代数. 由假定，$\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$, 从而 $\mathcal{G}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{E}$, 这表明 $f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$, 即 f 为可测映射.

1.4 系 设 f 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一数值函数 (即取值于 $\overline{\mathbb{R}}$), 则下列条件等价:

(1) f 为可测函数;

(2) $\forall a\in\mathbb{R},[f<a]\in\mathcal{F}$;

(3) $\forall a\in \mathbb{R}, [f\le a]\in \mathcal{F}$;

(4) $\forall a\in \mathbb{R}, [f> a]\in \mathcal{F}$;

(5) $\forall a\in \mathbb{R}, [f\ge a]\in \mathcal{F}$.

这里及今后，$[f<a]$ 表示集合 $\{\omega: f(\omega)<a\}$.

证 令 $\mathcal{C}_1=\{[-\infty,a): a\in\mathbb{R}\}$, 则易知 $\sigma(\mathcal{C}_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, 故由命题 1.3 知 (2)$\Leftrightarrow$(1). 类似可证 (3)$\Leftrightarrow$(1). 此外，显然有 (2)$\Leftrightarrow$(5) 及 (3)$\Leftrightarrow$(4). 证毕.

由于可测函数可以取 $+\infty$ 和 $-\infty$, 我们在研究可测函数的算术运算 (即加、减、乘、除) 时，作如下约定：

(1) $(\pm\infty)+x=x+(\pm\infty)=x-(\mp\infty)=\pm\infty,\ |x|<\infty$;

(2) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$;

(3) $x/\pm\infty=0,\ |x|<\infty$;

(4) $x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \mp\infty, & x<0;\end{cases}$

(5) 下列运算被认为无意义：$(\pm\infty)-(\pm\infty)$, $(\pm\infty)+(\mp\infty)$, $\pm\infty/\pm\infty$, $\pm\infty/\mp\infty$, $x/0$.

1.5 命题 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上实值 (复值) 可测函数全体构成实域 (复域) 上的一向量空间.

证 只需考虑实值可测函数情形. 令 $\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{R}$ 中的有理数全体. 设 f,g 为实值可测函数，则 $\forall a\in\mathbb{R}$, 有

$$[f+g<a]=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}([f<r]\cap[g<a-r]),$$

从而 $f+g$ 为实值可测函数. 此外，对任何 $a\in\mathbb{R}$, af 显然为实值可测函数. 证毕.

1.6 命题 设 f, g, $\{f_n, n\ge 1\}$ 都为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的可测函数.

(1) fg 为可测函数;

(2) 若 $f+g$ 处处有意义，则 $f+g$ 为可测函数;

(3) 若 f/g 处处有意义，则 f/g 为可测函数;

(4) $\inf\limits_n f_n$, $\sup\limits_n f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 及 $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 均为可测函数;

(5) $[f=g]$ 及 $[f\le g]$ 为可测集.

证 (1) 首先假定 f 及 g 非负, 则 $\forall a\in \mathbb{R}, a>0$ 有

$$[fg<a]=[f=0]\cup[g=0]\cup\Big(\bigcup_{r\in Q_+}[f<r]\Big)\cap\Big[g<\frac{a}{r}\Big]\in\mathcal{F},$$

故 fg 为可测函数. 对一般的可测函数 f 及 g, 令

$$f^+=f\vee 0,\qquad f^-=(-f)\vee 0,$$

显然 f^+ 及 f^- 为可测函数. 于是 fg 的可测性由下式及 (2) 推得

$$fg=(f^+-f^-)(g^+-g^-)=(f^+g^++f^-g^-)-(f^+g^-+f^-g^+).$$

(2) 由命题 1.5 的证明看出.

(3) 设 $|g|>0$ 处处成立, 则易知 g^{-1} 为可测函数. 若 f/g 处处有意义, 则 $f/g=f\cdot g^{-1}$, 故 f/g 为可测函数.

(4) $\forall a\in\mathbb{R}$, 我们有

$$[\inf_n f_n<a]=\bigcup_n[f_n<a],\quad [\sup_n f_n\le a]=\bigcap_n[f_n\le a],$$

故由 (1) 和 (3) 推得 (4).

(5) 令 $f_n=(f\wedge n)\vee(-n)$, $g_n=(g\wedge n)\vee(-n)$, 则

$$[f=g]=\bigcap_n[f_n=g_n],\quad [f\le g]=\bigcap_n[f_n\le g_n].$$

由于 $[f_n=g_n]=[f_n-g_n=0]$, $[f_n\le g_n]=[f_n-g_n\le 0]$, 从而 $[f=g]$ 及 $[f\le g]$ 为可测集.

下面我们研究可测函数的构造.

1.7 定义 设 $A\subset\Omega$, 令

$$I_A=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A,\end{cases}$$

称 I_A 为集 A 的 示性函数. 设 f 为 Ω 上的一实函数, 若 f 只取有限多个值, 称 f 为 **简单函数**.

设 f 为一简单函数, 其值域为 $\{a_1,\cdots,a_n\}$. 令 $A_i=f^{-1}(\{a_i\})$, $i=1,\cdots,n$, 则 $f=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}$. 若 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, 则 f 为 $\mathcal{F}$- 可测, 当且仅当每个 A_i 为 $\mathcal{F}$- 可测集.

1.8 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, f 为一可测函数.

(1) 存在一简单可测函数序列 $(f_n,n\geq 1)$, 使得对一切 $n\geq 1$, 有 $|f_n|\leq|f|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$.

(2) 若 f 非负, 则存在非负简单可测函数的增序列 (f_n), 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$.

证 将 f 表为 f^+-f^-, 易知 (1) 是 (2) 的推论. 往证 (2). 对 $n\geq 1$, 令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f\geq n]},$$

则 f_n 为非负简单可测函数, 且 $f_n\uparrow f$.

下一定理是上一定理的简单推论, 今后常被引用.

1.9 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 令 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族非负实值函数, 如果它满足下列条件:

(1) $f,g\in\mathcal{H},\alpha,\beta\geq 0\Rightarrow\alpha f+\beta g\in\mathcal{H}$;

(2) $f_n\in\mathcal{H},n\geq 1,f_n\uparrow f$ 且 f 有限 (相应地, 有界) 或 $f_n\downarrow f\Rightarrow f\in\mathcal{H}$;

(3) $\forall A\in\mathcal{C},I_A\in\mathcal{H}$,

则 $\mathcal{C}$ 包含 Ω 上的所有非负实值 (相应地, 有界)$\mathcal{F}$- 可测函数.

证 令 $\mathcal{T}=\{A\in\mathcal{F}:I_A\in\mathcal{H}\}$, 则由 (3) 知 $\mathcal{T}\supset\mathcal{C}$, 且由 (2) 知 $\mathcal{C}$ 为单调类, 故由单调类定理知 $\mathcal{T}=\mathcal{F}$. 于是由 (1)、(2) 及定理 1.8 推得定理的结论.

1.10 定义 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间, $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射. 令

$$\mathcal{F}=\sigma\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{E})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 为使 $\mathcal{H}$ 中所有元素为可测的最小 σ- 代数. 我们称 $\mathcal{F}$ 为函数族 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数. 特别, 若 $(E,\mathcal{E})=(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, 我们常用 $\sigma\{f, f\in\mathcal{H}\}$ 表示这一 σ- 代数 $\mathcal{F}$.

下一定理给出了 $\sigma(f)$- 可测函数的一个刻画.

1.11 定理 设 f 为 Ω 到一可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 中的映射, $\sigma(f)$ 为 f 在 Ω 上诱导的 σ- 代数 (即 $\sigma(f)=f^{-1}(\mathcal{E})$), 则为要 Ω 上的一数值函数 φ 为 $\sigma(f)$- 可测, 必须且只需存在 E 上的一 $\mathcal{E}$ 可测函数 h, 使得 $\varphi=h\circ f$(这里 $h\circ f$ 表示 h 与 f 的复合, 即 $h\circ f(\omega)=h(f(\omega)),\omega\in\Omega$). 如果 φ 为实值 (相应地, 有界)$\sigma(f)$- 可测, 则 h 可取为实值 (相应地, 有界) 函数.

证 充分性显然 (见下面的习题 1.13). 下证必要性. 设 $A\in\sigma(f)$, 则存在 $B\in\mathcal{E}$, 使 $A=f^{-1}(B)$, 即有 $I_A=I_B\circ f$, 于是对任一 $\sigma(f)$ - 可测简单函数 φ, 存在 E 上一 $\mathcal{E}$- 可测函数 h, 使得 $\varphi=h\circ f$. 现设 φ 为一 $\sigma(f)$- 可测函数, 由定理 1.8, 存在一列 $\sigma(f)$- 可测简单函数 φ_n, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$. 由上所证, 存在一列 E 上 $\mathcal{E}$- 可测实值函数 h_n, 使 $\varphi_n=h_n\circ f$. 令 $h=\limsup\limits_{n\to\infty}h_n$, 则 $\varphi=h\circ f$. 若进一步 φ 为实值 (相应地, 存在一常数 $c>0$, 使得 $|\varphi|\le c$), 令 $h'=hI_{|h|<\infty}$(相应的, 令 $h'=h^+\wedge c-h^-\wedge c$), 则 $\varphi=h'\circ f$. 定理证毕.

习题

1.12 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{E}$ 的一集类. 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数, 则

$$\mathcal{F}=\sigma\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\}.$$

设 φ 为 $\mathcal{F}$- 可测函数, 则存在 $\mathcal{H}$ 的可数子族 $\mathcal{H}_0=\{f_1,f_2,\cdots\}$, 使得 φ 为 $\mathcal{F}_0$- 可测, 其中 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{H}_0$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数.

1.13 设 $(\Omega,\mathcal{F}),(E,\mathcal{E})$ 及 $(G,\mathcal{G})$ 为可测空间, f 为 Ω 到 E 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射, h 为 E 到 G 中的 $\mathcal{E}$- 可测映射. 令 $\varphi=h\circ f$, 则

φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射.

1.14 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界可测函数，则存在简单可测函数序列 $(f_n, n\geq 1)$, 使得 $|f_n|\leq |f|, n\geq 1$, 且 f_n 一致收敛于 f.

1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， $\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j, \sum_i A_i=\Omega$). 令 $\mathcal{T}=\sigma\{\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\}$, 则

(1) $\mathcal{T}=\{\sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i):\ B_i\in\mathcal{F}, i\geq 1\}$,

(2) 设 g 为 Ω 上一 $\mathcal{T}$- 可测实值函数，则存在一列 $\mathcal{F}$- 可测实函数 $(f_n, n\geq 1)$, 使得 $g=\sum_{i=1}^{\infty} f_i I_{A_i}$.

1.16 设 Ω 为一距离空间，$\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Borel σ- 代数. 令 $C_b(\Omega)$ 表示 Ω 上有界连续函数全体，则 $\mathcal{B}(\Omega)=\sigma(f: f\in C_b(\Omega))$.

1.17 设 $\{f_i, 1\leq i\leq m\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上实值 Borel 函数，则 $(f_1,\cdots,f_m)$ 为 $(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ 到自身的可测映射. (提示：利用命题 1.3.)

1.18 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的复值可测函数，当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 中的可测映射.

§2 单调类定理 (函数形式)

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. 有时我们只知道有一类 $\mathcal{F}$- 可测函数满足某一性质，而希望证明所有 $\mathcal{F}$- 可测函数满足该性质. 这时我们就要用到函数形式的单调类定理.

下一定理是与第一章定理 2.2(2) 相应的函数形式.

2.1 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π 类， $\mathcal{H}$ 为由 Ω 上的一些实值函数构成的线性空间. 如果它们满足下列条件：

(1) $1\in\mathcal{H}$;

(2) $f_n\in\mathcal{H}, n\geq 1, 0\leq f_n\uparrow f$, 且 f 有限 (相应地，有界) $\Rightarrow f\in\mathcal{H}$;

(3) $\forall A\in\mathcal{C},\ I_A\in\mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (相应地，有界) 函数.

证 令 $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega: I_A\in\mathcal{H}\}$, 则易知 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类，且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$.

于是由第一章定理 2.2(2) 知 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$. 设 f 为 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (相应地，有界) 函数，令

$$g_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\le f^+<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f^+\ge n]},$$

则 $g_n\in\mathcal{H},g_n\uparrow f^+$, 从而由 (2) 知 $f^+\in\mathcal{H}$, 同理 $f^-\in\mathcal{H}$, 故 $f=f^+-f^-\in\mathcal{H}$. 定理证毕.

下面我们着手推广定理 2.1. 为此，首先引进 λ- 族概念，它是集合的 λ- 类概念在函数情形下的类似物.

2.2 定义 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数，称 $\mathcal{H}$ 为 **λ-族**, 如果它满足下列条件:

(1) $1\in\mathcal{H}$;

(2) $f\in\mathcal{H},\ \alpha\in\mathbb{R}_+\Rightarrow\alpha f\in\mathcal{H}$;

(3) $f,g\in\mathcal{H},f\ge g\Rightarrow f-g\in\mathcal{H}$;

(4) $f_n\in\mathcal{H},n\ge1,f_n\uparrow f$, 且 f 有界 $\Rightarrow f\in\mathcal{H}$.

设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数，我们用 $\wedge(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小 λ- 族，并称 $\wedge(\mathcal{C})$ 为 **由 $\mathcal{C}$ 生成的 λ- 族**.

2.3 注 设 $\mathcal{H}$ 为 λ- 族，则 $\mathcal{H}$ 还有如下性质:

(5) $f,g\in\mathcal{H}\Rightarrow f+g\in\mathcal{H}$.

事实上，设 C 为一常数，使得 $f+g\le C$, 则由 (3) 知

$$f+g=C-[(C-f)-g]\in\mathcal{H}.$$

下一定理是与第一章定理 2.3(2) 相应的函数形式.

2.4 定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数. 我们用 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$ 表示非负有界 $\sigma(f:f\in\mathcal{C})$- 可测函数全体，则下面二断言等价:

(1) $\wedge(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2) $f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow fg\in\wedge(\mathcal{C})$.

证 只需证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立，令

$$\mathcal{G}_1=\{f\in\wedge(\mathcal{C}):\ \forall g\in\mathcal{C},fg\in\wedge(\mathcal{C})\},$$

则易见 $\mathcal{G}_1$ 为 λ- 族，且 $\mathcal{G}_1\supset\mathcal{C}$, 故有 $\mathcal{G}_1=\wedge(\mathcal{C})$. 再令

$$\mathcal{G}_2=\{f\in\wedge(\mathcal{C}):\ \forall g\in\wedge(\mathcal{C}),fg\in\wedge(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{G}_2$ 为 λ- 族，且 $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{C}$(因有 $\mathcal{G}_1 = \wedge(\mathcal{C})$)，故有 $\mathcal{G}_2 = \wedge(\mathcal{C})$，这表明 $\wedge(\mathcal{C})$ 对乘积运算封闭．令

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : I_A \in \wedge(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 既为 λ- 类又为 π- 类，故 $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数．往证 $\wedge(\mathcal{C})$ 对有限下端运算封闭．设 $f, g \in \wedge(\mathcal{C})$，为证 $f \wedge g \in \wedge(\mathcal{C})$，不妨假定 $f \leq 1, g \leq 1$，于是有 $|f - g| \leq 1$，且有

$$(f-g)^2 = f^2 + g^2 - 2fg \in \wedge(\mathcal{C}).$$

我们将用到如下事实 (请读者自行证明)：设 $|x| \leq 1$，令 $P_0(x) = 0$，

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2),\ n \geq 0,$$

则 $P_n(x) \uparrow |x|$．于是，由于

$$P_1(f-g) = \frac{1}{2}(f-g)^2 \in \wedge(\mathcal{C}),$$

故由归纳法知 $P_n(f-g) \in \wedge(\mathcal{C}), n \geq 1$．从而由 λ- 族的性质 (4) 知 $|f-g| \in \wedge(\mathcal{C})$．最终我们有

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \wedge(\mathcal{C}).$$

现设 $f \in \mathcal{C}, \alpha > 0$ 为一实数．则由上所证，$\frac{f}{\alpha} \wedge 1 = \frac{1}{\alpha}(f \wedge \alpha) \in \wedge(\mathcal{C})$，故 $1 - (\frac{f}{\alpha} \wedge 1)^n \in \wedge(\mathcal{C})$．从而有

$$1 - (\frac{f}{\alpha} \wedge 1)^n \uparrow I_{[f<\alpha]} \in \wedge(\mathcal{C}).$$

这表明 $[f < \alpha] \in \mathcal{F}$．因此 f 为 $\mathcal{F}$- 可测．由定义 1.10 知 $\sigma(f : f \in \mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$．

最后，设 $f\in\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$，令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}]}+nI_{[f\geq n]},$$

则由于 $I_{[\frac{k}{2^n}\leq f<\frac{k+1}{2^n}]}\in\wedge(\mathcal{C})$，故 $f_n\in\wedge(\mathcal{C}),f_n\uparrow f\in\wedge(\mathcal{C})$，这表明 $\mathcal{L}_b^+\subset\wedge(\mathcal{C})$．但相反的包含关系恒成立，故有 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})=\wedge(\mathcal{C})$．定理证毕．

作为推论，我们得到与第一章定理 2.2(2) 相应的函数形式的单调类定理．

2.5 定理　设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数，且对乘积运算封闭．若 $\mathcal{H}$ 为一 λ- 族，且包含 $\mathcal{C}$，则 $\mathcal{H}$ 包含一切非负有界 $\sigma(f:f\in\mathcal{C})$- 可测函数．

下面我们将给出其它形式的单调类定理，它们是第一章定理 2.3(1) 的函数形式．

2.6 定义　设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一有界函数族，称 $\mathcal{H}$ 为**单调族**，如果它对一致有界单调序列极限封闭．

设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族．我们用 $M(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 的最小单调族，用 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$ 表示有界 $\sigma(f:f\in\mathcal{C})$- 可测函数全体．

2.7 定理　设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族．则下列二条件等价：

(1) $M(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$；

(2) $1\in M(\mathcal{C});f\in\mathcal{C},\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha f\in M(\mathcal{C})$；

$$f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow f+g\in M(\mathcal{C}),\ f\wedge g\in M(\mathcal{C}).$$

证　只需证 (2)⇒(1)．设 (2) 成立，令

$$\mathcal{H}_1=\{f\in M(\mathcal{C}):\forall\alpha\in\mathbb{R},\alpha f\in M(\mathcal{C});\forall g\in\mathcal{C},f+g,f\wedge g\in M(\mathcal{C})\}$$

则 $\mathcal{H}_1$ 为单调族，且 $\mathcal{H}_1\supset\mathcal{C}$，故 $\mathcal{H}_1=M(\mathcal{C})$．再令

$$\mathcal{H}_2=\{f\in M(\mathcal{C}):\forall g\in M(\mathcal{C}),f+g,f\wedge g\in M(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{H}_2$ 为单调族，且 $\mathcal{H}_2 \supset \mathcal{C}$(因为 $\mathcal{H}_1 = M(\mathcal{C})$), 故 $\mathcal{H}_2 = M(\mathcal{C})$. 由上所证，$M(\mathcal{C})$ 为一线性空间，且对有限下端运算封闭 (从而也对有限上端运算封闭). 此外，依假定 $1 \in M(\mathcal{C})$. 令

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : I_A \in M(\mathcal{C})\},$$

则 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数.

往证 $\mathcal{C}$ 中的每个元为 $\mathcal{F}$- 可测. 设 $f \in \mathcal{C}, a \in \mathbb{R}$, 令 $f_n = n(f-a)^+ \wedge 1$, 则 $f_n \in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n \uparrow I_{[f>a]}$. 故 $I_{[f>a]} \in M(\mathcal{C})$, 即有 $[f>a] \in \mathcal{F}$. 这表明 f 为 $\mathcal{F}$- 可测，于是 $\sigma(f : f \in \mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

最后，设 $f \in \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}]} + nI_{[f \ge n]}.$$

由于 $M(\mathcal{C})$ 为线性空间，故 $f_n \in M(\mathcal{C})$. 但 $f_n \uparrow f$, 于是 $f \in M(\mathcal{C})$, 这表明 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C}) \subset M(\mathcal{C})$, 因此有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}) \subset M(\mathcal{C})$. 但相反的包含关系恒成立，故有 $M(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_b(\mathcal{C})$. 定理证毕.

作为定理的一个有用的推论，我们有

2.8 定理 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一有界函数的单调族，$\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一子族. 则 $\mathcal{H} \supset \mathcal{L}_b(\mathcal{C})$, 如果下列条件之一成立:

(1) $\mathcal{H}$ 为线性空间，$1 \in \mathcal{H}$, 且 $\mathcal{C}$ 对乘积运算封闭;

(2) $\mathcal{C}$ 为一代数 (即 $\mathcal{C}$ 为一线性空间，且对乘积运算封闭), 且存在 $\mathcal{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1;

(3) $\mathcal{C}$ 为一线性空间，$\mathcal{C}$ 对有限下端运算封闭，且存在 $\mathcal{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1.

证 设 (1) 成立. 令 $\mathcal{L}$ 为由 1 和 $\mathcal{C}$ 生成的代数，则 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, 从而 $M(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}$. 易证 $M(\mathcal{C})$ 为一线性空间 (见习题 2.9). 设 $f \in \mathcal{D}$, 且 $|f| \le 1$. 采用定理 2.4 的证明中的记号，令 $f_n = P_n(f)$, 则 $f_n \in \mathcal{D}$, 且 $0 \le f_n \uparrow |f|$, 故 $|f| \in M(\mathcal{D})$. 于是对一般的 $f \in \mathcal{D}$, 亦有 $|f| \in M(\mathcal{D})$. 设 $f, g \in \mathcal{D}$, 则有

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|) \in M(\mathcal{D}).$$

故由定理 2.7 知 $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}) = M(\mathcal{D})$. 但显然有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_b(\mathcal{C})$, 故最终有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}) = M(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}$.

设 (2) 成立，则 $1 \in M(\mathcal{C}), M(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}$, 且 $M(\mathcal{C})$ 为一线性空间. 余下证明同上.

设 (3) 成立，则定理 2.7 中的条件 (2) 成立，故有 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}) = M(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}$.

习题

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族. 若 $\mathcal{C}$ 为线性空间，则 $M(\mathcal{C})$ 亦为线性空间.

2.10 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数族，则下列二条件等价：

(1) $M(\mathcal{C}) = \mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2) $f, g \in \mathcal{C} \Rightarrow f \wedge g \in M(\mathcal{C})$; $f \in \mathcal{C}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow af, a - f \wedge a \in M(\mathcal{C})$.

2.11 (定理 2.1 的另一种形式) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π- 类，$\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一非负实值函数族. 如果下列条件被满足：

(1) $1 \in \mathcal{H}$;

(2) $f \in \mathcal{H}, a \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow af \in \mathcal{H}$; $f, g \in \mathcal{H}, f \geq g \Rightarrow f - g \Rightarrow f - g \in \mathcal{H}$;

(3) $f_n \in \mathcal{H}, n \geq 1, 0 \leq f_n \uparrow f$, 且 f 有限 (相应地，有界)$\Rightarrow f \in \mathcal{H}$;

(4) $\forall A \in \mathcal{C}, I_A \in \mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有非负 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (相应地，有界) 函数.

§3 可测函数序列的几种收敛

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间. 本节将研究 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上实值可测函数序列的几种收敛及它们之间的关系. 为了叙述方便，我们将采用如下术语：如果某一性质在 Ω 上除了一零测度集外成立，则称它几乎处处成立，简称 a.e. 成立.

3.1 定义 设 $(f_n)_{n\geq1}, f$ 均为实值可测函数.

(1) 如果存在一零测集 N, 使得 $\forall\omega \in N^c$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$, 则称 (f_n)**几乎处处收敛于**f(或 a.e. 收敛于 f), 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a.e., 或 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

(2) 如果对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathcal{F}, \mu(N) < \epsilon$, 使得 (f_n) 在 N^c 上一致收敛于 f, 则称 (f_n)**几乎一致收敛于** f, 并记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ a.un., 或 $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 如果对任给 $\epsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \mu([|f_n - f| > \epsilon]) = 0$, 则称 (f_n)**依测度收敛于**f, 并记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

更一般地, 对一定向序列 (f_a) 也可定义上述几种收敛概念, 特别, 对双指标序列 (f_{nm}) 可定义上述收敛概念.

3.2 定义 设 (f_n) 为一列实值可测函数. 如果 $(f_n - f_m)$a.e. 收敛于 0(当 $n,m \to \infty$), 则称 (f_n) 为 a.e. 收敛 **基本列**. 类似可以定义其它各类收敛的基本列.

3.3 注 由定义看出, 上述各类收敛的极限是 a.e. 唯一确定的. 例如: 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$, 则 $f = g$, a.e.. 另一方面, 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, f = g$, a.e.. 则 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$. 此外, 对各类收敛序列 (f_n), 若对每个 n, 用一与 f_n a.e. 相等的实值可测函数 g_n 代替 f_n, 则 (g_n) 亦为同类收敛序列, 其极限与 (f_n) 的极限 a.e. 相等.

下一定理给出了上述几种收敛的刻画.

3.4 定理 设 (f_n) 及 f 均为实值可测函数.

(1) $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 当且仅当 $\forall\epsilon > 0$ 有

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}[|f_i - f| \geq \epsilon]\Big) = 0. \tag{3.1}$$

(2) $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$, 当且仅当 $\forall\epsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_n - f| \geq \epsilon]\Big) = 0. \tag{3.2}$$

(3) $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 当且仅当对 (f_n) 的任何子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.un.}} f, (k \to \infty)$.

证 (1) 设 (a_n) 为实数列，a 为一实数，则要使 $a_n \to a$，必须且只需对每个 $k \geq 1$，存在自然数 $n(k)$，使得当 $i \geq n(k)$ 时有 $|a_i - a| < \frac{1}{k}$. 因此我们有

$$\{\omega : f_n(\omega) \to f(\omega)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left[|f_i - f| < \frac{1}{k}\right].$$

于是，$f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$，当且仅当

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}\right]) = 0,$$

即 $\forall k \geq 1$ 有

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left[|f_i - f| \geq \frac{1}{k}\right]) = 0,$$

(1) 得证.

(2) 必要性. 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.un}} f$. 则 $\forall \delta > 0, \exists F \in \mathcal{F}, \mu(F) < \delta$，使 f_n 在 F^c 上一致收敛于 f. 于是 $\forall \epsilon > 0$，存在 N，使得当 $i \geq N$ 时，有

$$|f_i(\omega) - f(\omega)| < \epsilon, \ \omega \in F^c.$$

因此，$\bigcup_{i=N}^{\infty}[|f_i - f| \geq \epsilon] \subset F$，特别有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_n - f| \geq \epsilon]) \leq \mu(F) < \delta.$$

必要性得证.

下证充分性. 设对任给 $\epsilon > 0$ 有 (3.2) 成立. 则 $\forall \delta > 0, \forall k \geq 1, \exists n(k)$，使得

$$\mu(\bigcup_{i=n(k)}^{\infty} [|f_i - f| \geq \frac{1}{k}]) < \frac{\delta}{2^k}.$$

令

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=n(k)}^{\infty} [|f_i - f| \geq \frac{1}{k}],$$

则 $\mu(F) < \delta$, 且有

$$F^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=n(k)}^{\infty} [|f_j - f| < \frac{1}{k}].$$

这表明在 F^c 上 f_n 一致收敛于 f. 依定义, $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 必要性. 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 令 $(f_{n'})$ 为 (f_n) 的一子列, 则仍有 $f_{n'} \xrightarrow{\mu} f$. 由依测度收敛的定义, 存在 $(f_{n'})$ 的子列 $(f_{n'_k})$, 使得

$$\mu([|f_{n'_k} - f| \geq \frac{1}{k}]) \leq \frac{1}{2^k}, \ \forall k \geq 1.$$

故 $\forall m \geq 1$, 我们有

$$\mu(\bigcup_{k=m}^{\infty} [|f_{n'_k} - f| \geq \frac{1}{k}]) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

因此, $\forall \epsilon > 0$, 与 $(f_{n'_k})$ 相应的 (3.2) 成立, 从而 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

下证充分性. 我们用反证法. 假定 (f_n) 不依测度 μ 收敛于 f, 则存在某个 ϵ, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \mu([|f_n - f| \geq \epsilon]) > \delta > 0.$$

于是存在 (f_n) 的子列 $(f_{n'})$, 使得对一切 n' 有 $\mu([|f_{n'} - f| \geq \epsilon]) > \delta$. 显然 $(f_{n'})$ 不包含几乎一致收敛的子列. 充分性得证.

3.5 定理 (1) 我们有

$$f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f; \ f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f. \tag{3.3}$$

(2) 若 μ 为有限测度, 则有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 (f_{n_k}), 使 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

证 (1) 直接由定理 3.4 或定义 3.1 推出.

(2) 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 由定理 3.4,$\forall \epsilon > 0$, 有 (3.1) 成立. 于是由有限测度的从上连续性 (第一章定理 3.3) 知 (3.2) 成立, 故有 $f_n \xrightarrow{\text{a.un.}} f$.

(3) 由定理 3.4(3) 及上述 (1) 推得.

3.6 注 (1) 定理 3.5(2) 中 "$\Rightarrow$" 部分通常称为 **Egoroff 定理**.

(2) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间, f_n, f 为实值可测函数. 则由定理 3.4(3) 及定理 3.5(2) 知, 为要 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 必须且只需对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

作为定理 3.4(3) 的一个应用, 我们有如下的

3.7 定理 设 g 为 $\mathbb{R}^m$ 上一实值 Borel 可测函数, D 为 $\mathbb{R}^m$ 的一子集. 又设 $(f_n^{(i)})_{n \geq 1}$ 为实值可测函数序列, $f^{(i)}$ 为实值可测函数, $i = 1, \cdots, m$. 假定 $f_n^{(i)}$ 及 $f^{(i)}$ 在 D 中取值, 且对 $1 \leq i \leq m$, $f_n^{(i)} \xrightarrow{\mu} f^{(i)}$, 则有如下结论:

(1) 设 $g(x_1, \cdots, x_m)$ 为 D 上的一致连续函数, 则 $g(f_n^{(1)}, \cdots, f_n^{(m)}) \xrightarrow{\mu} g(f^{(1)}, \cdots, f^{(m)})$;

(2) 设 $g(x_1, \cdots, x_m)$ 为 D 上的连续函数. 若 μ 为有限测度, 则 $g(f_n^{(1)}, \cdots, f_n^{(m)}) \xrightarrow{\mu} g(f^{(1)}, \cdots, f^{(m)})$.

证 往证 (1). 首先, 由 1.17 及 1.13 知 $g(f_n^{(1)}, \cdots, f_n^{(m)})$ 为实可测函数. 设 (n') 为自然数列的一子序列, 由定理 2.4(3), 并利用对角线法则, 可取 (n') 的子列 (n'_k), 使得对每个 i:$1 \leq i \leq m$, 有 $f_{n'_k}^{(i)} \xrightarrow{\text{a.un.}} f^{(i)}$. 由于 g 在 D 上一致连续, 故易见

$$g(f_{n'_k}^{(1)}, \cdots, f_{n'_k}^{(m)}) \xrightarrow{\text{a.un.}} g(f^{(1)}, \cdots, f^{(m)}).$$

因此, 由定理 3.4(3) 知, $g(f_n^{(1)}, \cdots, f_n^{(m)}) \xrightarrow{\mu} g(f^{(1)}, \cdots, f^{(m)})$. (1) 得证. (2) 的证明完全类似.

习题

3.8 设 (f_n) 为一实值可测函数序列, 则为要 (f_n)a.e.(相应

地，几乎一致或依测度 μ) 收敛于某 f, 必须且只需 (f_n) 为相应的收敛基本列.

3.9 举例说明：若 $\mu(\Omega)=\infty$, 则 μ 几乎处处收敛的序列不一定依测度收敛.

3.10 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则有 $\liminf\limits_{n\to\infty} \le f \le \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, a.e..

3.11 设 μ 为有限测度，则

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}.$$

第三章 积分

§1 定义及基本性质

在本节给定一测度空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 我们用 $\mathcal{S}^+$ 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$- 可测非负简单函数全体，用 $\mathcal{L}$(相应地， $\overline{\mathcal{L}}$) 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$- 可测实值(相应地，数值) 函数全体. 令 $\overline{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的完备化，称 $\overline{\mathcal{F}}$-可测函数为 μ-可测函数. $\mathcal{L}^+$ 及 $\overline{\mathcal{L}}^+$ 则分别表示 $\mathcal{L}$ 及 $\overline{\mathcal{L}}$ 中的非负函数全体.

显然，为要 f 为 μ- 可测函数，必须且只需存在一 $\mathcal{F}$- 可测函数 g, 使得 $f=g$, a.e..

首先，我们定义非负简单可测函数关于测度 μ 的积分.

1.1 定义 设 $f=\sum_{i=1}^n a_iI_{A_i}\in\mathcal{S}^+$, 其中 $a_i\in\mathbb{R}_+,A_i\in\mathcal{F}$. 令

$$\int_\Omega fd\mu=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i),$$

易证 $\int_\Omega fd\mu$ 不依赖于 f 的具体表达. 我们称 $\int_\Omega fd\mu$ 为 f 关于 μ 的积分, 通常，我们用 $\mu(f)$ 简记 $\int_\Omega fd\mu$.

下一命题列举了这一积分的基本性质.

1.2 命题 以下 f_n,g_n,f,g 都是 $\mathcal{S}^+$ 中的元素.

(1) $\mu(I_A)=\mu(A),\ \forall A\in\mathcal{F}$;

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}_+$;

(3) $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$;

(4) $f\le g\Rightarrow\mu(f)\le\mu(g)$;

(5) $f_n\downarrow f,\mu(f_1)<\infty\Rightarrow\mu(f_n)\downarrow\mu(f)$;

(6) $f_n\uparrow f\Rightarrow\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$;

(7) $f_n\uparrow,g_n\uparrow,\lim\limits_{n\to\infty}f_n\le\lim\limits_{n\to\infty}g_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)$.

证 (1)—(4) 显然. 往证 (5). 令 $g_n=f_n-f$, 则 $g_n\in\mathcal{S}^+$, $g_n\downarrow 0$, 且 $\mu(g_1)\le\mu(f_1)<\infty$. 令

$$\beta=\sup\{g_1(\omega):\ \omega\in\Omega\},$$

则 $\forall \epsilon > 0$, 我们有

$$0 \le g_n \le \beta I_{[g_n>\epsilon]} + \epsilon I_{[0<g_n\le\epsilon]} \le \beta I_{[g_n>\epsilon]} + \epsilon I_{[g_1>0]}.$$

由 (4) 得

$$\mu(g_n) \le \beta\mu([g_n > \epsilon]) + \epsilon\mu([g_1 > 0]).$$

由于 $[g_n > \epsilon] \downarrow \emptyset$, 且 $\mu([g_1 > \epsilon]) \le \mu([g_1 > 0]) < \infty$(因 $\mu(g_1) < \infty$), 故由测度的从上连续性知 $\mu([g_n > \epsilon]) \downarrow 0$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(g_n) \le \epsilon\mu([g_1 > 0])$. 但 $\epsilon > 0$ 是任意的, 故有 $\mu(g_n) \downarrow 0$. 最终有 $\mu(f_n) = \mu(g_n) + \mu(f) \downarrow \mu(f)$, (5) 得证.

现证 (6). 若 $\mu(f) = +\infty$, 则 $\mu(f > 0) = \infty$. 由于 f 只取有限多个值, 故存在 $a > 0$, 使 $\mu([f = a]) = \infty$. 我们有 $[f_n > \frac{a}{2}] \uparrow [f > \frac{a}{2}]$, $f_n \ge \frac{a}{2} I_{[f_n > \frac{a}{2}]}$, 故有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) \ge \frac{a}{2} \lim_{n\to\infty} \mu([f_n > \frac{a}{2}]) = \frac{a}{2}\mu[f > \frac{a}{2}] = \infty.$$

于是 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$. 若 $\mu(f) < \infty$, 令 $g_n = f - f_n$, 则由 (5) 知 $\mu(g_n) \downarrow 0$, 故 $\mu(f_n) = \mu(f) - \mu(g_n) \uparrow \mu(f)$. (6) 得证.

最后证明 (7). 先固定某个 m, 令 $h_n = g_n \wedge f_m$, 则 $h_n \in \mathcal{S}^+$, $h_n \uparrow f_m \in \mathcal{S}^+$, 故由 (6) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(h_n) = \mu(f_m)$. 但 $h_n \le g_n$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(g_n) \ge \mu(f_m)$, 于是最终有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(g_n) \ge \lim_{m\to\infty} \mu(f_m).$$

(7) 得证.

1.3 注 在上述证明中, 我们用到如下事实: 对 $f \in \mathcal{S}^+$, 有 $\mu(f) < \infty \Leftrightarrow \mu([f > 0]) < \infty$, 但这一结论不能推广到一般非负可测函数. 因此, 我们未将其列为积分的基本性质.

借助于命题 1.2, 我们可以给出积分的一般定义. 为方便起见, 我们只考虑 $\mathcal{F}$- 可测函数情形. 所有结果都可以改述为 μ- 可测函数情形.

1.4 定义 设 f 为一非负可测函数. 任取 $f_n \in \mathcal{S}^+$, 使 $f_n \uparrow f$(第一章定理 1.8), 令

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

则由命题 1.2 的 (4) 及 (7) 知, 上述右端极限存在, 且不依赖于序列 (f_n) 的选取, 我们称 $\mu(f)$ 为 **f关于 μ 的积分**. 有时也用 $\int_\Omega f d\mu$ 表示 $\mu(f)$.

现设 f 为一可测函数. 令 $f^+ = f \vee 0, f^- = (-f) \vee 0$, 若 $\mu(f^+) < \infty$ 或 $\mu(f^-) < \infty$, 则称 **f(关于 μ 的)积分存在**. 令

$$\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-),$$

称 $\mu(f)$ 为 **f关于 μ 的积分**. 若 $\mu(f^+) < \infty$, 且 $\mu(f^-) < \infty$(或者等价地, $\mu(|f|) < \infty$), 则称 **f关于 μ 可积(简称 μ-可积)**.

设 $\xi = f + ig$ 为一复值可测函数. 如果 f 和 g 都 μ- 可积, 则称 ξ 为 **μ- 可积**. 这时令 $\mu(\xi) = \mu(f) + i\mu(g)$, 称 $\mu(\xi)$ 为 **ξ关于 μ 的积分**.

1.5 注 设 $f \in \overline{\mathcal{L}}$. 若 f 的积分存在 (相应地, f 为可积), 则对任何 $A \in \mathcal{F}, fI_A$ 的积分存在 (相应地, fI_A 为可积). 我们用 $\int_A f d\mu$ 表示 $\int_\Omega f I_A d\mu$.

下一定理列举了积分的一些基本性质.

1.6 定理 设 f, g 积分存在.

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f$ 的积分存在, 且 $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$;

(2) 若 $f + g$ 处处有定义, 且 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义 (即不出现 $\infty - \infty$), 则 $f + g$ 的积分存在, 且有 $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$;

(3) $|\mu(f)| \le \mu(|f|)$;

(4) 若 N 为一零测集, 则 $\mu(fI_N) = 0$;

(5) 若 $f \le g$, a.e., 则 $\mu(f) \le \mu(g)$;

(6) 若 $f \in \overline{\mathcal{L}}^+$, 则 $f = 0$, a.e.$\Leftrightarrow \mu(f) = 0$;

(7) 若 $f \in \overline{\mathcal{L}}^+$, 且 $\mu(f) < \infty$, 则 $f < \infty$, a.e., 且 $[f > 0]$ 关于 μ 为 σ- 有限的.

证 (1)–(4) 直接由定义 1.4 推得. 往证 (5). 令 $N=[f>g]$, 则依假定 $\mu(N)=0$, 我们有

$$f=fI_{N^c}+fI_N,\ g=I_{N^c}+gI_N,\ fI_{N^c}\le gI_{N^c}.$$

故由 (4) 知

$$\mu(f)=\mu(fI_{N^c}),\ \mu(g)=\mu(gI_{N^c}).$$

但由积分的定义易知 $\mu(fI_{N^c})\le\mu(gI_{N^c})$, 从而有 $\mu(f)\le\mu(g)$.

现证 (6). "$\Rightarrow$" 由 (5) 推得, 为证 "$\Leftarrow$", 我们用反证法. 假设 $\mu([f>0])>0$. 由于 $[f>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\ge\frac{1}{n}]$, 故存在某 n, 使 $\mu([f\ge\frac{1}{n}])>0$. 我们有 $f\ge\frac{1}{n}I_{[f\ge\frac{1}{n}]}$, 从而

$$\mu(f)\ge\frac{1}{n}\mu([f\ge\frac{1}{n}])>0.$$

"$\Leftarrow$" 得证.

最后证明 (7). 设 $f\in\overline{\mathcal{L}}^+$. 假定 $\mu([f=+\infty])>0$, 则由于 $f\ge\infty I_{[f=\infty]}$, 故 $\mu(f)=\infty$, 这表明 $\mu(f)<\infty\Rightarrow f<\infty$, a.e.. 此外有 $[f>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\ge\frac{1}{n}]$, $\mu([f\ge\frac{1}{n}])\le n\mu(f)<\infty$, 故 $[f>0]$ 关于 μ 为 σ- 有限的. 定理证毕.

1.7 系 (1) 设 f,g 积分存在, 且 $f=g$, a.e., 则 $\mu(f)=\mu(g)$.

(2) 设 f 为 μ- 可积, 则 $|f|<\infty$, a.e..

(3) 设 f,g 积分存在, 且 $\mu(f)+\mu(g)$ 有意义, 则 $f+g$ a.e. 有意义.

(4) 设 f,g 积分存在, 且 $f\le g$, a.e., 则对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(fI_A)\le\mu(gI_A)$.

下一命题表明: 在一定条件下, 上述 (4) 的逆命题成立.

1.8 命题 设 f,g 积分存在, 且对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(fI_A)\le\mu(gI_A)$.

(1) 若 f,g 可积, 则 $f\le g$, a.e.;

(2) 若 μ 为 σ- 有限测度, 则 $f\le g$, a.e..

证 (1) $\forall A\in\mathcal{F}$, 由假定

$$\mu((f-g)I_A)=\mu(fI_A)-\mu(gI_A)\le 0.$$

特别，令 $A=[f>g]$，则 $(f-g)I_A\geq 0$，故有 $\mu((f-g)I_A)\geq 0$，从而由上式知 $\mu((f-g)I_A)=0$，于是 $(f-g)I_A=0$, a.e.(定理 1.6(6)). 由于在 A 上有 $f>g$，故必须有 $\mu(A)=0$，即有 $f\leq g$, a.e..

(2) 设 μ 为 σ- 有限测度. 我们用反证法证明 $f\leq g$, a.e.. 假定 $\mu([g<f])>0$，令

$$A_n=[g<f-\frac{1}{n}]\cap[|f|<n],\ B_m=[g<m]\cap[f=+\infty],$$

则 $[g<f]=(\bigcup_n A_n)\cup(\bigcup_m B_m)$. 于是存在某 n 或 m，使 $\mu(A_n)>0$ 或 $\mu(B_m)>0$. 假定 $\mu(A_n)>0$，由 μ 的 σ- 有限性知，存在 $A\subset A_n, A\in\mathcal{F}$，使得 $0<\mu(A)<\infty$，这时有

$$\int_A gd\mu\leq\int_A(f-\frac{1}{n})d\mu=\int_A fd\mu-\frac{1}{n}\mu(A)<\int_A fd\mu.$$

这与假定 $\int_A fd\mu\leq\int_A gd\mu$ 矛盾. 若 $\mu(B_m)>0$，类似论证可导致矛盾，因此必须有 $f\leq g$, a.e.. 命题证毕.

1.9 系 设 f,g 积分存在，且对一切 $A\in\mathcal{F}$ 有 $\mu(fI_A)=\mu(gI_A)$.

(1) 若 f,g 可积，则 $f=g$, a.e.;

(2) 若 μ 为 σ- 有限，则 $f=g$, a.e..

习题

1.10 举例说明命题 1.8(2) 中关于 μ 的 σ- 有限性条件不能去掉.

1.11 证明系 1.7(3).

1.12 设 (f_n) 为一列可测函数. 若 (f_n) a.e. 单调增 (即 $\forall n, f_n\leq f_{n+1}$ a.e.)，则存在一处处单调增序列 (g_n)，使得 $\forall n, f_n=g_n$ a.e..

1.13 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间， $A_i\in\mathcal{F}, 1\leq i\leq n$. 令 I 为 $\{1,\cdots,n\}$ 的非空子集，我们用 $|I|$ 表示 I 中元素的个数，则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mu(\bigcap_{i\in I}A_i).$$

(提示：用归纳法证明 $\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k} = \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}$)

1.14 设 E 为一距离空间，$\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel σ- 代数，μ 与 ν 为 $(E,\mathcal{B}(E))$ 上的两个有限测度. 若对 E 上一切有界连续函数 f 有 $\mu(f)=\nu(f)$, 则 $\mu=\nu$.(提示：利用第二章 1.16 及 2.5)

1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{C})$ 为两个可测空间，f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的可测映射，μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度.

(1) 令 $\mu f^{-1}(A)=\mu(f^{-1}(A)), A\in\mathcal{E}$. 则 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度 (通常称为由 f 在 $(E,\mathcal{E})$ 上**导出的测度**或 f 的**象测度**).

(2) 设 g 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数，则为要 g 关于测度 μf^{-1} 的积分存在 (相应地，可积), 必须且只需 $g\circ f$ 关于 μ 的积分存在 (相应地，可积). 此外，这时有

$$\int_\Omega g\circ f d\mu = \int_E g d(\mu f^{-1}).$$

§2 积分号下取极限

本节我们将介绍有关积分号下取极限的几个定理 (单调收敛定理，Fatou 引理，控制收敛定理).

2.1 引理 设 $f_n\in\overline{\mathcal{L}}^+, n\geq 1, f\in\overline{\mathcal{L}}^+$.

(1) 若 $f_n\leq f_{n+1}$, a.e.,$\forall n\geq 1$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$;

(2) 若 $f_n\geq f_{n+1}$, a.e.,$\forall n\geq 1, f_n\xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 且 $\mu(f_1)<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

证 (1) 不妨设 (f_n) 处处单调增，且 $f_n\uparrow f$ 处处成立. 对每个 n, 令 $f_{n,m}\in\mathcal{S}^+$, 使得 $f_{n,m}\uparrow f_n(m\to\infty)$. 令 $g_m=\bigvee_{i=1}^{m} f_{i,m}$, 则 $g_m\in\mathcal{S}^+, g_m\uparrow f$, 且 $g_m\leq f_m$, 故由积分的定义有

$$\mu(f)=\lim_{m\to\infty}\mu(g_m)\leq\lim_{m\to\infty}\mu(f_m).$$

但恒有 $\mu(f) \geq \mu(f_m)$, 故有 $\lim_{m\to\infty} \mu(f_m) = \mu(f)$.

(2) 不妨设 (f_n) 处处单调降, 且 $f_n \downarrow f$ 处处成立. 由于假定 $\mu(f_1) < \infty$, 故 $\mu([f_1 = \infty]) = 0$. 令 $\overline{f}_n = f_n I_{[f_1<\infty]}, \overline{f} = f I_{[f_1<\infty]}$, 则 $\overline{f}_n \downarrow \overline{f}, \overline{f}_n$ 为实值可测函数. 令 $g_n = \overline{f}_1 - \overline{f}_n$, 则 $g_n \uparrow \overline{f}_1 - \overline{f}$, 故由 (1) 推知, $\mu(g_n) \uparrow \mu(\overline{f}_1) - \mu(\overline{f})$, 即有 $\mu(f_n) = \mu(\overline{f}_n) \downarrow \mu(\overline{f})$. 证毕.

2.2 系 设 $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^+, n \geq 1$, 则有 $\mu(\sum_n f_n) = \sum_n \mu(f_n)$.

证 令 $g_n = \sum_{i=1}^n f_i, g = \sum_{i=1}^\infty f_i$, 则 $g_n \uparrow g$, 故有

$$\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \mu(g_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mu(f_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(f_i).$$

2.3 定理 (单调收敛定理) 设 $f_n \in \overline{\mathcal{L}}, n \geq 1$. 又设每个 f_n 的积分存在.

(1) 设 (f_n)a.e. 单调增, 且 $f_n \to f$,a.e.. 若 $\mu(f_1) > -\infty$, 则 f 的积分存在, 且 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$.

(2) 设 (f_n)a.e. 单调降, 且 $f_n \to f$,a.e.. 若 $\mu(f_1) < \infty$, 则 f 的积分存在, 且 $\mu(f_n) \downarrow \mu(f)$.

证 先证 (1). 由假定, f_n^+ a.e. 单调增, f_n^- a.e. 单调降, 且有 $f_n^+ \xrightarrow{\text{a.e.}} f^+, f_n^- \xrightarrow{\text{a.e.}} f^-$. 由于 $f_1^- \geq f^-$, 且 $\mu(f_1) > -\infty, f_n^- > -\infty$, 故 $\mu(f^-) \leq \mu(f_1^-) < \infty$. 从而 f 的积分存在, 且由引理 2.1 知: $\mu(f_n^+) \uparrow \mu(f^+), \mu(f_n^-) \downarrow \mu(f^-)$. 因此有 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$.(1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 即得 (2). 证毕.

2.4 定理 (Fatou 引理) 设 $f_n \in \overline{\mathcal{L}}, n \geq 1$, 且每个 f_n 的积分存在.

(1) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}$, $\mu(g) > -\infty$, 使得 $\forall n \geq 1$ 有 $f_n \geq g$, a.e., 则 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 积分存在, 且有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

(2) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}, \mu(g) < \infty$, 使得 $\forall n \geq 1$ 有 $f_n \leq g$,a.e., 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 的积分存在，且有

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} f_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

证 先证 (1). 令 $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$, 则 $g_n \uparrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, 且 $g_1 \geq g$,a.e.. 于是 $\mu(g_1) \geq \mu(g) > -\infty$. 故由定理 2.3(1), $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 的积分存在，且有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(g_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

(1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 即得 (2). 证毕.

2.5 定理 (控制收敛定理) 设 $f_n \in \mathcal{L}$, 且 $f \in \mathcal{L}, f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若存在一非负可积函数 g, 使得 $\forall n \geq 1$ 有 $|f_n| \leq g$,a.e., 则 f 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证 由于 $|f| \leq g$,a.e., 故 f 可积. 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则定理的结论直接由定理 2.4 推得. 现设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$(见第二章 3.4(3) 及 3.5). 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_{n'_k}) = \mu(f)$. 但子列 $(f_{n'})$ 的选取是任意的，故必须有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

下面我们着手推广定理 2.4 及 2.5.

2.6 定理 设 $f_n \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 又设每个 f_n 的积分存在.

(1) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}, \mu(g) > -\infty$, 使得 $\forall n \geq 1, f_n \geq g$,a.e., 则 f 的积分存在，且有 $\mu(f) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

(2) 若存在 $g \in \overline{\mathcal{L}}, \mu(g) < \infty$, 使得 $\forall n \geq 1, f_n \leq g$, a.e., 则 f 的积分存在，且有 $\mu(f) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

证 先证 (1). 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则由 Fatou 引理立得 (1) 的结论. 现设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 于是由上所证有 $\mu(f) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \mu(f_{n'_k})$. 但子列 $(f_{n'})$ 的选

取是任意的，故必须有 $\mu(f) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n)$,(1) 得证. 对 $(-f_n)$ 应用 (1) 得 (2). 证毕.

下一定理是控制收敛定理的推广形式，其进一步推广见习题 2.10.

2.7 定理 设 $f_n \in \mathcal{L}$, 且 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 又设 $g_n \in \mathcal{L}^+, g \in \mathcal{L}^+$, 且 $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$ 或 $g_n \xrightarrow{\mu} g$. 如果 g 及每个 g_n 可积，$\mu(g_n) \to \mu(g)$, 且 $|f_n| \le g_n$,a.e.,$\forall n \ge 1$, 则有 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$. 特别有 $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证 首先假定同时有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$. 令

$$h_n = g_n + g - |f_n - f|,$$

则 $h_n \ge 0$,a.e., 且 $h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 2g$. 故由定理 2.6(1) 得

$$2\mu(g) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(h_n) = 2\mu(g) - \limsup_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|).$$

从而有 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$. 特别有

$$|\mu(f_n) - \mu(f)| \le \mu(|f_n - f|) \to 0.$$

若同时有 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_m \xrightarrow{\mu} f$, 则 $h_n \xrightarrow{\mu} 2g$. 故由定理 2.6(1) 亦可推得本定理的结论. 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{\mu} g$, 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$, 则与定理 2.6 的证明类似可证 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

2.8 系 (Scheffé 引理) 设 f_n, f 为可积可测函数，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\mu(|f_n - f|) \to 0$, 当且仅当 $\mu(|f_n|) \to \mu(|f|)$.

证 必要性显然，充分性由定理 2.7 推得 (令 $g_n = |f_n|, g = |f|$).

2.9 定理 设 f_n, f 为可积可测函数，则下列二条件等价：

(1) $\mu(|f_n - f|) \to 0$;

(2) $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 且 $\mu(|f_n|) \to \mu(|f|)$.

证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立. 在定理 2.7 中令 $g_n = |f_n|, g = |f|$, 即得 (1). 现证 (1)⇒(2). 设 $\mu(|f_n - f|) \to 0$, 对任给 $\epsilon > 0$, 令 $A_n = [|f_n - f| \ge \epsilon]$, 则有

$$\epsilon I_{A_n} \le |f_n - f| I_{A_n} \le |f_n - f|,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon\mu(A_n) \le \lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0.$$

这表明 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 此外，由于 $||f_n| - |f|| \le |f_n - f|$, 故有

$$|\mu(|f_n| - \mu(|f|)| \le \mu(|f_n - f|) \to 0,\ n \to \infty.$$

(1)⇒(2) 得证.

习题

2.10 设 $f_n, h_n, g_n, f, h, g \in \mathcal{L}, h_n \le f_n \le g_n$,a.e.,$\forall n \ge 1$. 又设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g$ 或 $g_n \xrightarrow{\mu} g, h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} h$ 或 $h_n \xrightarrow{\mu} h$. 如果 h, g, h_n, g_n 都可积，且 $\mu(h_n) \to \mu(h), \mu(g_n) \to \mu(g)$, 则 f 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.(提示：不妨设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f, g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} g, h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} h$. 分别对 $f_n - h_n$ 及 $g_n - f_n$ 应用 Fatou 引理.)

2.11 若在 2.10 中有 $h_n \le 0 \le g_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.(提示：对 $|f_n - f| \le g_n - h_n + g - h$ 应用定理 2.7.)

2.12 设 (f_n) 为一可测函数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f_n^+) < \infty$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(f_n^-) < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a.e. 有意义，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 的积分存在，且有 $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f_n)$.

§3 不定积分与符号测度

本节内容有：符号测度的 Jordan-Hahn 分解，测度的绝对连续性及奇异性，测度的 Lebesgue 分解及 Radon-Nikodym 定理，Vitali-Hahn-Saks 定理.

3.1 引理 设 $f \in \overline{\mathcal{L}}$, 且 f 的积分存在. 令

$$\nu(A) = \mu(fI_A),\ A \in \mathcal{F}, \tag{3.1}$$

则 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的 σ- 可加集函数，即有

$$\{A_n, n \ge 1\} \subset \mathcal{F}, A_n \cap A_m = \emptyset, n \ne m \Rightarrow \nu(\sum_n A_n) = \sum_n \nu(A_n). \tag{3.2}$$

此外，令

$$\nu^{+}(A)=\mu(f^{+}I_{A}),\ \nu^{-}(A)=\mu(f^{-}I_{A}),\ A\in\mathcal{F},\tag{3.3}$$

则 ν^{+},ν^{-} 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度，其中之一为有限测度，且有 $\nu=\nu^{+}-\nu^{-}$.

证 令 ν^{+},ν^{-} 如 (3.2) 所定义，由系 2.2 知，ν^{+} 及 ν^{-} 为 $\mathcal{F}$ 上的测度. 由于 f 的积分存在，我们有 $\nu^{+}(\Omega)<\infty$ 或 $\nu^{-}(\Omega)<\infty$. 于是 $\nu^{+}-\nu^{-}$ 在 $\mathcal{F}$ 上有定义，且为 $\mathcal{F}$ 上的 σ- 可加集函数. 显然有 $\nu=\nu^{+}-\nu^{-}$. 证毕.

3.2 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一 σ- 可加集函数，称 ν 为 **符号测度**. 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，$f\in\overline{\mathcal{L}}$, 且 f 的积分存在，则由 (3.1) 定义的符号测度 ν 称为 f 关于 μ 的 **不定积分**, 并记为 $\nu=f.\mu$.

设 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一 σ- 可加复值集函数，称 ν 为 **复测度**. 这时 ν 的实部和虚部均为实值符号测度.

3.3 注 设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度，则或者 $-\infty\leq\mu(A)<\infty(\forall A\in\mathcal{F})$, 或者 $-\infty<\mu(A)\leq\infty(\forall A\in\mathcal{F})$. 事实上，如若不然，则存在 $A\in\mathcal{F},B\in\mathcal{F}$, 使 $\nu(A)=+\infty,\nu(B)=-\infty$. 我们有 $A\cup B=(A\setminus B)\cup B=(B\setminus A)\cup A$, 依假定，有

$$\begin{aligned}\nu(A\cup B)&=\nu(A\setminus B)+\nu(B),\\ \nu(A\cup B)&=\nu(B\setminus A)+\nu(A).\end{aligned}$$

为了使第一个等式右边有意义，必须有 $\nu(A\setminus B)<\infty$. 为了使第二个等式右边有意义，必须有 $\nu(B\setminus A)>-\infty$. 这时分别从两个等式得 $\nu(A\cup B)=-\infty,\nu(A\cup B)=\infty$, 这导致矛盾. 此外，必有 $\nu(\emptyset)=0$.

由引理 3.1 知，不定积分这一特殊的符号测度可以表示为两个测度之差，且其中之一为有限测度. 下一定理表明：这一结论对一切符号测度成立.

3.4 定理 (Jordan-Hahn 分解定理) 设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度. 对 $A\in\mathcal{F}$, 令

$$\begin{aligned}\nu^{+}(A)&=\sup\{\nu(B):\ B\subset A,\ B\in\mathcal{F}\},\\ \nu^{-}(A)&=\sup\{-\nu(B):\ B\subset A,\ B\in\mathcal{F}\}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

则 ν^+ 及 ν^- 为测度, 其中之一为有限测度, 且有 $\nu=\nu^+-\nu^-$. 此外, 存在 $D\in\mathcal{F}$, 使得

$$\nu^{+}(A)=\nu(A\cap D),\ \nu^{-}(A)=-\nu(A\cap D^{c}).\tag{3.5}$$

证 不妨设 $\nu(A)>-\infty,\forall A\in\mathcal{F}$. 令 ν^+,ν^- 如 (3.4) 定义. 首先, 我们证明存在 $D\in\mathcal{F}$, 使得

$$A\in\mathcal{F},A\subset D\Rightarrow\nu(A)\geq 0,\ A\subset D^{c}\Rightarrow\nu(A)\leq 0.\tag{3.6}$$

为此, 令

$$\mathcal{B}=\{B\in\mathcal{F}:\nu^{+}(B)=0\},$$

则 $\mathcal{B}=\{B\in\mathcal{F}:\forall C\in\mathcal{F},C\subset B,\ \nu(C)\leq 0\}$. 易见 $\mathcal{B}$ 对可列并运算封闭. 此外, 设 $B\in\mathcal{B},G\in\mathcal{F},G\subset B$, 则 $G\in\mathcal{B}$. 令 $B_n\in\mathcal{B},n\geq 1$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\nu(B_n)=\inf\{\nu(B):\ B\in\mathcal{B}\}\hat{=}\beta,$$

则有 $\bigcup_n B_n\in\mathcal{B}$, 且有

$$\beta\leq\nu(\bigcup_n B_n)=\nu(B_m)+\nu(\bigcup_n B_n\setminus B_m)\leq\nu(B_m),\ m\geq 1,$$

故 $\nu(\bigcup_n B_n)=\beta$. 令 $D=(\bigcup_n B_n)^c$, 则 $D^c\in\mathcal{B},\nu(D^c)=\beta$, 于是由 $\mathcal{B}$ 的定义知 (3.6) 的第二个蕴含关系成立.

再证 (3.6) 的第一个蕴含关系成立. 我们用反证法. 假定存在 $A\in\mathcal{F},A\subset D$, 使 $\nu(A)<0$, 我们断言: 必有 $\nu^+(A)>0$. 事实上, 若 $\nu^+(A)=0$, 则 $A\in\mathcal{B}$, 故 $A\cup D^c\in\mathcal{B}$. 但有 $\nu(A\cup C^c)=\nu(A)+$

$\nu(D^c) < \nu(D^c) = \beta$, 这与 β 的定义矛盾. 因此必须有 $\nu^+(A) > 0$. 由 ν^+ 的定义知, 存在 $A_1 \in \mathcal{F}, A_1 \subset A$, 使得

$$\nu(A_1) \geq \frac{1}{2}(\nu^+(A) \wedge 1) > 0.$$

这时, $A \setminus A_1 \subset D, \nu(A \setminus A_1) = \nu(A) - \nu(A_1) < 0$, 因此由上所证知 $\nu^+(A \setminus A_1) > 0$. 由归纳法, 存在 $A_n \in \mathcal{F}, A_n \subset D, n \geq 1$, 使得 $A_n \subset A \setminus \sum_{k=1}^{n-1} A_k$, 且有

$$\nu(A_n) \geq \frac{1}{2}\big[\nu^+\big(A \setminus \sum_{k=1}^{n-1} A_k\big) \wedge 1\big] > 0. \qquad (3.7)$$

由于 $\nu(A) < 0$, 且有

$$\nu(A) = \nu\big(A \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k\big) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k). \qquad (3.8)$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) < \infty$, 特别有 $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. 因此由 (3.7) 得

$$\lim_{n\to\infty} \nu^+\big(A \setminus \sum_{k=1}^{n-1} A_k\big) \wedge 1 = 0,$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \nu^+(A \setminus \sum_{k=1}^{n-1} A_k) = 0$. 由于 $\nu^+(A \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \nu^+(A \setminus \sum_{k=1}^{n-1} A_k), n \geq 1$, 故有 $\nu^+(A \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. 因此, 由前面所证, 必须有 $\nu(A \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k) \geq 0$(否则有 $\nu^+(A \setminus \sum_{k=1}^{\infty} A_k) > 0$). 这样一来, 由 (3.8) 知 $\nu(A) > 0$, 这与假定 $\nu(A) < 0$ 矛盾. 因此, (3.6) 的第一个蕴含关系成立.

现在证明定理的结论. 设 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, B \subset A$, 则

$$\begin{aligned}\nu(B) + \nu((A \setminus B) \cap D) &= \nu((A \cap D) \cup B) \\ &= \nu(A \cap D) + \nu(B \cap D^c).\end{aligned}$$

故由 (3.6) 知 $\nu(B) \le \nu(A \cap D)$, 从而有 $\nu^+(A) = \nu(A \cap D^c)$. 同理可证 $\nu^-(A) = -\nu(A \cap D^c)$. 因此, ν^+ 及 ν^- 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度, 且 $\nu^-(\Omega) = -\nu(D^c) < \infty$, 此外有 $\nu = \nu^+ - \nu^-$. 定理证毕.

3.5 注 (1) 我们称 ν 的分解 $\nu = \nu^+ - \nu^-$ 为 ν 的 **Jordan 分解**,ν^+ 及 ν^- 分别称为 ν 的 **正部** 及 **负部**; 称 Ω 的分解 $\Omega = D \cup D^c$ 为 ν 的 **Hahn 分解**. Hahn 分解不一定唯一.

(2) 令 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, 称 $|\nu|$ 为 ν 的 **变差 (测度)**, 称 $|\nu|(\Omega)$ 为 ν 的 **全变差**, 记为 $\|\nu\|_{var}$. 若 $|\nu|$ 为 σ- 有限测度, 则称 ν 为 **σ-有限符号测度**.

(3) 设 ν 为一符号测度, $\Omega = D \cup D^c$ 为其 Hahn 分解. 令 $h = I_D - I_D^c$, 则 h 关于 $|\nu|$ 及 ν 积分存在, 且 $\nu = h.|\nu|, |\nu| = h.\nu$.

3.6 命题 设 ν 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的符号测度, 则 ν 在 $\mathcal{F}$ 上达到其上、下界. 确切地说, 设 $\Omega = D \cup D^c$ 为其 Hahn 分解, 则

$$\begin{aligned} \nu(D) &= \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{F}\}, \\ \nu(D^c) &= \inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{F}\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

特别, 实值符号测度必然为有界符号测度.

证 设 $B \in \mathcal{F}$, 则由定理 3.4 知

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \nu^+(B) - \nu^-(B) \le \nu^+(B) \le \nu^+(\Omega) = \nu(D), \\ \nu(B) &= \nu^+(B) - \nu^-(B) \ge -\nu^-(B) \ge -\nu^-(\Omega) = \nu(D^c). \end{aligned}$$

由此推得 (3.9).

下面我们引进测度的绝对连续性及奇异性概念.

3.7 定义 设 ν_1, ν_2 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个符号测度. 如果

$$A \in \mathcal{F}, |\nu_2|(A) = 0 \Rightarrow |\nu_1|(A) = 0, \tag{3.10}$$

则称 ν_1 关于 ν_2**绝对连续**(记为 $\nu_1 \ll \nu_2$). 若 $\nu_1 \ll \nu_2$ 且 $\nu_2 \ll \nu_1$, 则称 ν_1 与 ν_2**等价**, 记为 $\nu_1 \sim \nu_2$. 若存在 $N \in \mathcal{F}$, 使得 $|\nu_1|(N^c) = 0, |\nu_2|(N) = 0$, 则称 ν_1 与 ν_2**相互奇异**(记为 $\nu_1 \perp \nu_2$).

设 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一符号测度，若 $N\in\mathcal{F}$, 使得 $|\nu|(N^c)=0$, 则称 N 为 ν 的 **支撑**. 一般说来，支撑并非唯一确定.

由上述定义知， $\nu_1\ll\nu_2\Leftrightarrow$ 凡 ν_2 的支撑必为 ν_1 的支撑; $\nu_1\perp\nu_2\Leftrightarrow\nu_1$ 与 ν_2 有不相交的支撑.

3.8 注 (1) 由 (3.4) 易知， (3.10) 等价于如下条件:

$$A\in\mathcal{F},\ |\nu_2|(A)=0\Rightarrow\nu_1(A)=0. \tag{3.11}$$

(2) 设 $\nu_1\ll\nu_2$, 且 $\nu_1\perp\nu_2$, 则 $\nu_1=0$(即对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\nu_1(A)=0$), 此外，恒有 $\nu\perp 0$.

(3) 设 ν 为一符号测度， $f\in\overline{\mathcal{L}}$. 若 f 关于 μ 的积分存在，则 $f.\nu\ll\nu$.

3.9 引理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为测度空间， h 为一非负可测函数，令 $h.\mu$ 表示 h 关于 μ 的不定积分 (从而 $h.\mu$ 为一测度). 设 $g\in\overline{\mathcal{L}}$, 则 g 关于 $h.\mu$ 的积分存在，当且仅当 gh 关于 μ 的积分存在. 这时有

$$\int_A gd(h.\mu)=\int_A ghd\mu,\quad\forall A\in\mathcal{F}. \tag{3.12}$$

证 首先，设 g 为非负简单函数，则由 $h.\mu$ 的定义知 (3.12) 成立. 于是由积分的单调收敛定理知，对一切 $g\in\overline{\mathcal{L}}^+$,(3.12) 成立. 由此立刻推得引理的结论.

下一定理表明: 任一 σ- 有限符号测度 ν 总可以唯一地分解为关于另一 σ - 有限符号测度 μ 的绝对连续部分和奇异部分之和.

3.10 定理 设 μ 与 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个 σ- 有限测度，则 ν 有如下唯一分解 (称为 **Lebesgue 分解**):

$$\nu=\nu_s+\nu_c, \tag{3.13}$$

其中 $\nu_s\perp\mu,\nu_c\ll\mu$. 此外， ν_s 及 ν_c 均为 σ- 有限的，并且存在 $g\in\mathcal{L}$, 使得 g 关于 $|\mu|$ 的积分存在， ν_c 为 g 关于 μ 的不定积分.

证 首先不妨假定 μ 为测度 (否则以 $|\mu|$ 代替 μ), 且 $\mu(\Omega)>0$. 这时由 μ 的 σ- 有限性知，存在 Ω 的一个可数划分 $\Omega=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 使

得 $A_n \in \mathcal{F}, 0 < \mu(A_n) < \infty, \forall n \geq 1$. 令

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

则 h 处处严格正，且 $\mu(h) = 1$. 令 $\widetilde{\mu} = h.\mu$, 则 $\widetilde{\mu}$ 为测度，且 $\widetilde{\mu}(\Omega) = 1$. 由于 $\widetilde{\mu}$ 与 μ 等价，故由引理 3.9 知，可以 $\widetilde{\mu}$ 代替 μ 来证明定理的结论. 因此，不妨设 μ 为有限测度.

下面先假定 ν 也为有限测度. 令

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in \overline{\mathcal{L}}^+ : \forall A \in \mathcal{F}, \int_A h d\mu \leq \nu(A) \right\},$$

设 $h_1, h_2 \in \mathcal{H}, h = h_1 \vee h_2$, 则

$$\begin{aligned}\int_A h d\mu &= \int_{A \cap [h_1 \geq h_2]} h_1 d\mu + \int_{A \cap [h_1 < h_2]} h_2 d\mu \\ &\leq \nu(A \cap [h_1 \geq h_2]) + \nu(A \cap [h_1 < h_2]) = \nu(A),\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{H}$ 对有限上端运算封闭. 现设 $h_n \in \mathcal{H}, h_n \uparrow g$, 使得

$$\int_\Omega g d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega h d\mu : h \in \mathcal{H} \right\},$$

则由积分单调收敛定理易知 $g \in \mathcal{H}$. 令

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \int_A g d\mu, \ A \in \mathcal{F},$$

则 ν_s 为一有限测度. 往证 $\nu_s \perp \mu$. 令 $\Omega = D_n + D_n^c$ 为符号测度 $\nu_s - \frac{1}{n}\mu$ 的 Hahn 分解，则对一切 $A \in \mathcal{F}$,

$$\nu_s(A \cap D_n) \geq n^{-1} \mu(A \cap D_n) = n^{-1} \int_A I_{D_n} d\mu.$$

于是 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有

$$\int_A(g+n^{-1}I_{D_n})d\mu\le\int_A gd\mu+\nu_s(A\cap D_n)\le\nu(A),$$

这表明 $g+n^{-1}I_{D_n}\in\mathcal{H}$. 但另一方面 $\mu(g)=\sup\{\mu(h):h\in\mathcal{H}\}$，故必须有 $\mu(D_n)=0$. 令 $N=\bigcup_n D_n$, 则 $\mu(N)=0$. 此外我们有 (注意 $(\nu_s-\frac{1}{n}\mu)(D_n^c)\le 0$)

$$\nu_s(N^c)\le\nu_s(D_n^c)\le n^{-1}\mu(D_n^c)\le n^{-1}\mu(\Omega)\to 0\ (n\to\infty),$$

这表明 $\nu_s\perp\mu$. 令

$$\nu_c(A)=\int_A gd\mu,$$

则 $\nu_c\ll\mu$(见定理 1.6(3)). 此外，由于 g 为 μ- 可积的，故 g 可取为实值可测函数.

现设 ν 为 σ- 有限符号测度. 为证定理结论，不妨假定 ν 为 σ- 有限测度 (否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-). 取 Ω 的一个可数划分 $\Omega=\sum_n A_n$, 使得 $A_n\in\mathcal{F},\nu(A_n)<\infty,n\ge 1$. 令 $\nu^n(A)=\nu(A\cap A_n)$, 则每个 ν^n 为有限测度，故由上所证， ν^n 有如下分解

$$\nu^n=\nu_s^n+\nu_c^n,\ n\ge 1,$$

其中 $\nu_s^n\perp\mu,\nu_c^n\ll\mu$, 且存在非负实值可测函数 g_n, 使得 $\nu_c^n=g_n.\mu$. 显然， g_n 在 A_n^c 上可取为 0, 令

$$\nu_s=\sum_n\nu_s^n,\quad \nu_c=\sum_n\nu_c^n,\quad g=\sum_n g_n,$$

则有 $\nu_s\perp\mu,\nu_c\ll\mu,\nu_c=g.\mu$, 且 (3.13) 成立. ν 的分解唯一性容易由注 3.8(2) 看出. 定理证毕.

设 μ 为一测度， ν 为某 $f\in\overline{\mathcal{L}}$ 关于 μ 的不定积分，则 ν 关于 μ 绝对连续 (见注 3.8(2)). 下一定理表明：若 μ 为 σ- 有限测度，则逆命题成立.

3.11 定理 (Radon-Nikodym 定理) 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间，μ 为一 σ- 有限测度，ν 为一符号测度 (不必为 σ- 有限). 如果 ν 关于 μ 绝对连续，则存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g，使得 $\nu = g.\mu$. 此外，f 在 μ- 等价意义下是唯一的 (称 g_1, g_2 为 μ- 等价的，是指 $\mu([g_1 \neq g_2]) = 0$), 为要 g 为 μ-a.e. 有限，必须且只需 ν 为 σ- 有限的.

证 若 ν 为 σ- 有限符号测度，则由定理 3.10 立刻推得本定理结论 (因为这时由注 3.8(2) 知 (3.13) 中的 $\nu_s = 0$). 为证定理，不妨设 ν 为测度 (否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-), 且 $\nu(\Omega) = \infty$. 此外由 μ 的 σ- 有限性及引理 3.9 知，不妨假定 μ 为有限测度 (参看定理 3.10 证明的开头部分). 令

$$\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F}: \ \nu(C) < \infty\},$$

显然 $\mathcal{G}$ 对有限并运算封闭. 于是存在 $C_n \in \mathcal{G}, C_n \uparrow C$, 使得

$$\mu(C) = \sup\{\mu(G): \ G \in \mathcal{G}\}. \tag{3.14}$$

令

$$\nu'(B) = \nu(B \cap C), \ \ \nu''(B) = \nu(B \cap C^c), \ B \in \mathcal{F},$$

则 ν' 为 σ- 有限测度，且 $\nu' \ll \mu$, 故存在非负实值可测函数 g', 使得 $\nu' = g'.\mu$. 另一方面，由 $\mathcal{G}$ 的定义及 (3.14) 知

$$\mu(B \cap C^c) > 0 \Rightarrow \nu(B \cap C^c) = \infty.$$

因此，若令 $g'' = (+\infty)I_{C^c}, g = g' + g''$, 则 $\nu'' = g''.\mu, \nu = g.\mu$. 定理的其余结论显然. 证毕.

3.12 定义 我们用 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ 表示定理 3.11 中的 g(它在 μ- 等价意义下唯一确定), 并称 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ 为 ν 关于 μ 的 **Radon-Nikodym 导数**.

3.13 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一 σ- 有限测度空间，ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度，且 $\nu \ll \mu$. 令 $g \in \overline{\mathcal{L}}$, 则 g 关于 ν 积分存在，当且仅当 $g\frac{d\nu}{d\mu}$ 关于 μ 积分存在，并且这时有

$$\int_A g d\nu = \int_A (g\frac{d\nu}{d\mu}) d\mu, \ \ \forall A \in \mathcal{F}. \tag{3.15}$$

证 若 ν 为测度，则定理的结论由引理 3.9 推得．现设 ν 为符号测度．令 $h = g\frac{d\nu}{d\mu}$，则

$$h^+ = g^+\frac{d\nu^+}{d\mu} + g^-\frac{d\nu^-}{d\mu},\ \ h^- = g^-\frac{d\nu^+}{d\mu} + g^+\frac{d\nu^-}{d\mu}.$$

设 g 关于 ν 积分存在，则 g 关于 ν^+ 及 ν^- 积分存在，且 $\nu^+(g) - \nu^-(g)$ 有意义．于是 $g\frac{d\nu^+}{d\mu}$ 及 $g\frac{d\nu^-}{d\mu}$ 关于 μ 积分存在，且有

$$\nu^+(g) = \int (g\frac{d\nu^+}{d\mu})d\mu,\ \ \nu^-(g) = \int (g\frac{d\nu^-}{d\mu})d\mu.$$

于是有

$$\nu^+(g) = \int (g^+\frac{d\nu^+}{d\mu})d\mu - \int (g^-\frac{d\nu^+}{d\mu})d\mu,$$
$$\nu^-(g) = \int (g^+\frac{d\nu^-}{d\mu})d\mu - \int (g^-\frac{d\nu^-}{d\mu})d\mu.$$

由于 $\nu^+(g)-\nu^-(g)$ 有意义，则必须有 $\mu(h^+) < \infty$ 或 $\mu(h^-) < \infty$(请读者自行验证这一事实)．因此 h 关于 μ 积分存在，且 $\mu(h) = \nu^+(g) - \nu^-(g) = \nu(g)$．对 gI_A 应用这一结果即得 (3.15)．反之，设 h 关于 μ 积分存在，则 $\mu(h^+) < \infty$ 或 $\mu(h^-) < \infty$，由此可推知 g 关于 μ^+ 及 μ^- 积分存在，$\nu^+(g) - \nu^-(g)$ 有意义 (即 g 关于 ν 可积)，且 $\nu(g) = \mu(h)$．对 gI_A 应用这一结果即得 (3.15)．证毕．

3.14 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，μ 及 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的两个 σ- 有限测度，φ 为 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度．如果 $\varphi \ll \nu, \nu \ll \mu$，则 $\varphi \ll \mu$，且有

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu},\ \ \mu\text{-a.e.}. \tag{3.16}$$

证 显然有 $\varphi \ll \mu$，故由定理 3.13，对 $\forall A \in \mathcal{F}$，有

$$\int_A \frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu = \int_A \frac{d\varphi}{d\nu}d\nu = \varphi(A) = \int_A \frac{d\varphi}{d\mu}d\mu,$$

于是由系 1.9(2) 知 (3.16) 成立.

下一定理称为 **Vitali-Hahn-Saks** 定理. 我们将在下一节和第七章 §5 用到这一定理.

3.15 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, (μ_n) 为其上的一列有限符号测度, λ 为一有限测度, 使得对一切 $n\geq 1$, 有 $\mu_n \ll \lambda$(这样的测度 λ 恒存在, 例如令 $\lambda=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|\mu_n\||\mu_n|$, 其中 $\|\mu_n\|$ 表示 μ_n 的全变差, $|\mu_n|$ 为 μ_n 的变差测度). 如果对每个 $A\subset\mathcal{F}$, 极限 $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在且有限, 则

(1) μ 为一符号测度;

(2) $\sup_n \|\mu_n\|<\infty$;

(3) 对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F},\ \lambda(A)\leq\eta\Rightarrow\sup_n|\mu|(A)\leq\epsilon.$$

证 令 Φ 表示 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$ 中由 $\mathcal{F}$- 可测集的示性函数等价类所成的子集, 则 Φ 是闭集. 从而作为子空间, Φ 为完备距离空间. 设 $A\in\mathcal{F}$, 令 $\dot{A}$ 表示 A 所相应的等价类, 我们用 $\dot{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中元素等价类全体, 则 $(\dot{\mathcal{F}},d)$ 为完备距离空间, 其中

$$d(\dot{A},\dot{B})=\lambda(A\Delta B).$$

设 $\alpha>0$, 令

$$L_j=\{\dot{A}\in\dot{\mathcal{F}}:\forall n\geq j, m\geq j, |\mu_n(A)-\mu_m(A)|\leq\alpha\},$$

由于函数 $\dot{A}\mapsto\mu_n(A)$ 在 $\dot{\mathcal{F}}$ 上连续, 故 L_j 为闭集. 显然 $\bigcup_j L_j=\dot{\mathcal{F}}$(因对一切 $A\in\mathcal{F},\mu_n(A)$ 收敛). 由 Baire 定理 (见第五章定理 1.27), 存在某 j, 使 L_j 有一内点 $\dot{A}$, 即对某 $h>0$, 有

$$B\in\mathcal{F},\lambda(B\Delta A)\leq h\Rightarrow|\mu_n(B)-\mu_m(B)|\leq\alpha,\forall n\geq j,\forall m\geq j.$$

取 $0<\eta<h$, 使得 (见习题 3.19)

$$C\in\mathcal{F},\lambda(C)\le\eta\Rightarrow|\mu_i|(C)\le\alpha,\ i=1,\cdots,j.$$

对于 $n\ge j$, 我们有

$$\begin{aligned}|\mu_n(C)|&\le|\mu_n(A\cup C)-\mu_n(A)|+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_n(A)|\\&\le|\mu_n(A\cup C)-\mu_j(A\cup C)|+|\mu_j(A\cup C)-\mu_j(A)|\\&\quad+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_j(A\backslash C)|\\&\quad+|\mu_j(A\backslash C)+\mu_j(A)|+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|.\end{aligned}$$

于是 $\lambda(C)\le\eta\Rightarrow\sup_n|\mu(C)|\le6\alpha$. 从而由习题 3.23 知: $\lambda(C)\le\eta\Rightarrow\sup_n|\mu_n|(C)\le12\alpha$. 由此立刻推得 (3)(令 $\alpha=\epsilon/12$).

下面我们证明 (2). 我们将空间 Ω 分为有限多个 λ- 测度 $>\eta$ 的原子及有限多个 λ- 测度 $\le\eta$ 的集合. 由于 $|\mu_n|\ll\lambda$, 故 λ 的原子必为每个 $|\mu_n|$ 的原子. 于是在 λ 的原子集 A 上, 有 $|\mu_n|(A)=|\mu_n(A)|$, 从而 $\sup_n|\mu_n|(A)<\infty$. 由此并利用前段的结果推得 (2) 的结论.

最后, μ 在 $\mathcal{F}$ 上显然是有限可加的. 现设 $E_k\in\mathcal{F},E_k\downarrow\emptyset$, 则 $\lambda(E_k)\to0$, 从而由 (3) 知 $\mu(E_k)\to0$. 由此推知 μ 是 σ- 可加的, 故 μ 是有限符号测度. 证毕.

3.16 系 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一有限测度空间, $\xi_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu),n\ge1$. 若 $\forall A\in\mathcal{F},\int_A\xi_nd\mu$ 的极限存在且有穷, 则存在唯一的 $\xi\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\xi_nd\mu=\int_A\xi d\mu,\quad A\in\mathcal{F}.$$

习题

3.17 设 ν 为一符号测度, f 关于 ν 的积分存在 (见注 3.5(3)). 则对一切 $A\in\mathcal{F},fI_A$ 关于 ν 的积分存在, 且 $A\mapsto\nu(fI_A)$ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度.

3.18 设 ν 及 μ 为两个符号测度, f 关于 ν 的积分存在. 若 $\nu\ll\mu$ (相应地 $\nu\perp\mu$), 则 $f.\nu\ll\mu$ (相应地, $f.\nu\perp\mu$).

3.19 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限符号测度. 则下列二断言等价：

(1) $\nu \ll \mu$;

(2) $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $A\in\mathcal{F},\mu(A)<\delta\Rightarrow|\nu|(A)<\epsilon$.

3.20 举例说明定理 3.11 中 μ 的 σ- 有限性假定不能去掉. (提示：令 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\{A\subset[0,1]: A$或$A^c$为至多可数集$\}$)

3.21 设 μ 及 ν 为两个 σ- 有限测度，则为要 $\nu\sim\mu$, 必须且只需存在可测函数 $g: 0<g(\omega)<\infty,\forall\omega\in\Omega$, 使得 $\nu=g.\mu$.

3.22 设 μ_1,μ_2 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限符号测度，令

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\quad \mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+,$$

则 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$ 且 $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度 ν; $\mu_1\wedge\mu_2$ 为满足 $\nu\leq\mu_1$ 且 $\nu\leq\mu_2$ 的最大符号测度 ν.

3.23 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上符号测度, 则 $\|\mu\|_{\text{var}}\leq 2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$. 若 $\mu(\Omega)=0$, 则 μ 为有限符号测度, 且有 $\|\mu\|_{\text{var}}=2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$.

3.24 设 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上有界 $\mathcal{F}$- 可测函数全体，$\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上有限符号测度全体. 对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$,

(1) $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间 (完备赋范线性空间).

(2) 设 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $I_\mu(f)=\mu(f), f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 则 μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函，且有 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\text{var}}$.(提示：设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解，令 $f=I_D-I_D^c$, 考虑 $\mu(f)$.)

(3) $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 为一 Banach 空间.

§4 空间 L^p 及其对偶

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 对任一 $p: 0<p<\infty$, 我们令

$$L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)=\{f\in\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F}):\mu(|f|^p)<\infty\}\tag{4.1}$$

(简记为 L^p), 其中 $\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上 $\mathcal{F}$- 可测实值函数全体. 设 $f,g\in\mathcal{L}(\Omega,\mathcal{F})$, 如果 $f=g$, μ-a.e., 称 f 与 g μ- 等价. 今后，我们

将 L^p 中 a.e. 相等的元素不加区别，即把 L^p 视为按 μ- 等价关系所作的商空间. 令

$$\|f\|_p = \mu(|f|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.2}$$

我们将证明：对 $p \geq 1, (L^p, \|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间 (见定理 4.5).

首先，我们建立空间 L^p 的一些基本不等式. 为此，我们需要如下两个分析不等式，其证明可在任何一本数学分析书中找到：设 a, b 为实数，$r > 0, 1 < p, q < \infty$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有

$$|a+b|^r \leq \max(1, 2^{r-1})(|a|^r + |b|^r), \tag{4.3}$$

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{4.4}$$

4.1 定理 设 $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}), r > 0, 1 < p, q < \infty$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, s \geq 1$. 则有

$$\mu(|f+g|^r) \leq C_r \mu(|r|^r + |g|^r), \tag{4.5}$$

$$\mu(|fg|) \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{4.6}$$

$$\|f+g\|_s \leq \|f\|_s + \|g\|_s, \tag{4.7}$$

其中 $C_r = \max(1, 2^{r-1})$. 我们分别称 (4.5)、(4.6) 及 (4.7) 为 **C_r不等式**、**Hölder 不等式** 及 **Minkowski 不等式**. 对 $p = q = 2$ 情形，(4.6) 亦称为 **Schwarz 不等式**.

证 (4.5) 可直接从 (4.3) 推得. 现证 (4.6). 不妨设 $\|f\|_p < \infty$, $\|g\|_q < \infty$，令 $\varphi = f/\|f\|_p, \psi = g/\|g\|_q$，则由 (4.4) 得

$$\mu(|\varphi\psi|) \leq \frac{\mu(|\varphi|^p)}{p} + \frac{\mu(|\psi|^q)}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

此即 (4.6).

最后证明 (4.7). 不妨设 $f, g \in L^s$，由 (4.5) 知 $f + g \in L^s$，且当 $s = 1$ 时 (4.7) 成立. 现设 $s > 1$，我们有

$$\begin{aligned}\int |f+g|^s d\mu &= \int |f+g|\,|f+g|^{s-1} d\mu \\ &\leq \int |f|\,|f+g|^{s-1} d\mu + \int |g|\,|f+g|^{s-1} d\mu.\end{aligned}$$

令 $s'>1$ 使 $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, 对上一不等式右端应用 (4.6) 得 (注意 $s'(s-1)=s$)

$$\int |f+g|^s d\mu \le \|f\|_s \left(\int |f+g|^s d\mu\right)^{1/s'} + \|g\|_s \left(\int |f+g|^s d\mu\right)^{1/s'},$$

由此立得 (4.7). 证毕.

如果 μ 是概率测度, 我们还有如下的 **Jensen 不等式**(4.8).

4.2 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一概率空间, φ 为一连续凸函数 (即 $\forall\alpha: 0\le\alpha\le 1, \forall x,y\in\mathbb{R}, \varphi(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)$), 又设 $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 则 $\varphi(f)$ 关于 μ 的积分存在, 且有

$$\varphi(\mu(f))\le\mu(\varphi(f)). \tag{4.8}$$

证 令 φ' 表示 φ 的右导数, 则 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$\varphi'(x)(y-x)\le\varphi(y)-\varphi(x).$$

于是有

$$\varphi'(\mu(f))(f-\mu(f))\le\varphi(f)-\varphi(\mu(f)),$$

两边关于 μ 积分即得欲证不等式.

4.3 定义 设 $r>0, \{f,f_n,n\ge 1\}\subset L^r$. 如果 $\mu(|f_n-f|^r)\to 0, n\to\infty$, 则称 (f_n) **r次平均收敛于f**(简称 (f_n) L^r- 收敛于 f), 或称 (f_n) 在 L^r 中 **强收敛于f**, 记为 $f_n\xrightarrow{L^r}f$.

显然, L^r- 收敛的极限是唯一确定的 (在 μ- 等价意义下), 此外, L^r- 收敛蕴含依测度收敛. 事实上, 设 $\epsilon>0$, 则

$$\mu(|f_n-f|\ge\epsilon)=\mu(|f_n-f|^r\ge\epsilon^r)\le\frac{1}{\epsilon^r}\mu(|f_n-f|^r).$$

4.4 引理 设 $r>0, f_n\in L^r, n\ge 1$, 则为要 (f_n) L^r- 收敛于某 $f\in L^r$, 必须且只需 (f_n) 为 L^r- 收敛的基本列.

证 先证必要性. 设 $f_n \xrightarrow{L^r} f$, 则由 (4.3) 得

$$|f_n - f_m|^r \le C_r(|f_n - f|^r + |f_m - f|^r),$$

故有 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mu(|f_n - f_m|^r) = 0$. 往证充分性. 设 (f_n) 为 L^r- 收敛基本列, 则易知 f_n 为依测度收敛的基本列, 故存在 $f \in \mathcal{L}$, 使 $f_n \xrightarrow{\mu} f$(第二章习题 3.8). 于是由 Fatou 引理知

$$\mu(|f_n - f|^r) \le \varliminf_{m\to\infty} \mu(|f_n - f_m|^r),$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|^r) = 0$, 显然有 $f \in L^r$. 证毕.

4.5 定理 设 $p \ge 1$, 则 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间.

证 首先, 由定理 1.6(6) 知, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a.e., 此外, 对任一实数 α, 有 $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$, 故由 (4.7) 知 $\|\cdot\|_p$ 为 L^p 上的一范数. 再由引理 4.5 知, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 为一 Banach 空间. 证毕.

4.6 定理 设 $p \ge 1, \{f, f_n, n \ge 1\} \subset L^p$, 则下列二条件等价:

(1) $\|f_n - f\|_p \to 0$;

(2) $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

此外, 若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, 则也有 $\|f_n - f\|_p \to 0$.

证 (1)⇒(2) 显然. 由于

$$|f_n - f|^p \le 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p),$$

故由定理 2.7 推知 (2)⇒(1) 及另一结论.

下面我们研究空间 L^p 的可分性, 为此, 先证明一个引理.

4.7 引理 令 $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F})$ 表示 Ω 上的 $\mathcal{F}$- 可测简单函数全体, 设 $p \ge 1$, 则 $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}) \cap L^p$ 在 L^p 中稠密.

证 设 $f \in L^p$, 由第二章定理 1.8 知: 存在 $f_n \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}), |f_n| \le |f|$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. 于是 $f_n \in L^p$, 且 $|f_n - f|^p \le 2^p|f|^p$, 故由控制收敛定理知 $\mu(|f_n - f|^p) \to 0 (n \to \infty)$. 证毕.

4.8 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, 称 $\mathcal{F}$ 为 μ- 可分, 如果存在一可分的 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数 $\mathcal{F}_0$, 使 $\forall A \in \mathcal{F}, \exists B \in \mathcal{F}_0$, 满足 $\mu(A \triangle B) = 0$.

4.9 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，μ 为 σ- 有限测度．则下列断言等价：

(1) $\mathcal{F}$ 为 μ- 可分；

(2) 对一切 $p\geq 1$, L^p 为可分 Banach 空间；

(3) 对某个 $p\geq 1, L^p$ 为可分 Banach 空间．

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{F}$ 为 μ- 可分，令 $\mathcal{F}_0$ 为 Ω 上的一可分 σ- 代数，使得 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$, 且 $\forall A\in\mathcal{F},\exists B\in\mathcal{F}_0$, 满足 $\mu(A\triangle B)=0$. 可以假定存在 Ω 的一个可数划分：$\Omega=\sum_n A_n$, 使得 $A_n\in\mathcal{F}_0,\mu(A_n)<\infty, n=1,2,\cdots$, 由第一章定义 2.7 知，存在一代数 $\mathcal{L}\subset\mathcal{F}_0$, 其元素个数至多可数，使得 $A_n\in\mathcal{L},n\geq 1,\sigma(\mathcal{L})=\mathcal{F}_0$. 令

$$\mathcal{H}=\{\sum_{i=1}^{n}a_iI_{B_i},B_i\in\mathcal{L},a_i\ \text{为有理数},1\leq i\leq n,=1,n\geq 1\}.$$

由第一章习题 3.9 知，对一切 $p\geq 1,\mathcal{H}$ 在 $\mathcal{S}(\Omega,\mathcal{F})\cap L^p$ 中按 L^p 范数稠密，从而由引理 4.7 知，$\mathcal{H}$ 在 L^p 中稠密．但 $\mathcal{H}$ 的元素为可数多个，故 L^p 为可分 Banach 空间．

剩下只需证 (3)⇒(1). 设对某个 $p\geq 1,L^p$ 为可分 Banach 空间，则存在 L^p 的一可数稠子集 $\mathcal{H}$. 令 $\mathcal{F}_0=\sigma(\mathcal{H})$(即 $\mathcal{F}_0$ 为使 $\mathcal{H}$ 中元素为可测的最小 σ- 代数)．则显然 $\mathcal{F}_0$ 为可分 σ- 代数，且 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$. 现设 $A\in\mathcal{F}$, 且 $\mu(A)<\infty$, 则 $I_A\in L^p$. 于是存在 $f_n\in\mathcal{H}$, 使 $f_n\xrightarrow{L^p}I_A$, 特别有 $f_n\xrightarrow{\mu}I_A$. 令 $B_n=[\frac{1}{2}<f_n<\frac{3}{2}]$, 则 $B_n\in\mathcal{F}_0$, 且 $B_n\triangle A\subset[|f_0-I_A|\geq\frac{1}{2}]$. 故有 $\mu(B_n\triangle A)\to 0(n\to\infty)$. 即 $I_{B_n}\xrightarrow{\mu}I_A$. 于是存在子列 $(B_{n'})$, 使 $I_{B_{n'}}\xrightarrow{\text{a.e.}}I_A$. 令 $B=\limsup\limits_{n'\to\infty}B_{n'}$, 则 $B\in\mathcal{F}_0$, 且 $I_B=I_A$, a.e., 即 $\mu(B\triangle A)=0$. 由于 μ 是 σ- 有限的，于是我们证明了 $\mathcal{F}$ 的 μ- 可分性．

4.10 注 定理中关于 μ 为 σ- 有限的条件不能去掉．例如：设 $\Omega=\mathbb{R},\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 对 $A\in\mathcal{F}$, 令 $\mu(A)$ 表示 A 中元素个数 (若 A 含无穷多个元素，令 $\mu(A)=\infty$), 则 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 不可分 (请读者证明这一事实)．

作为定理 4.9 的一个推论，我们有

4.11 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，μ 为其上的一 σ- 有限测度，若 $\mathcal{F}$ 为 μ- 可分，则 $\mathcal{F}$ 的任何子 σ- 代数也为 μ- 可分.

证 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，则 $L^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ 可视为 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的子空间. 依假定，$\mathcal{F}$ 为 μ- 可分，故由定理 4.9 知 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为可分. 因此，作为它的子空间 $L^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ 亦可分，再由定理 4.9 即知 $\mathcal{G}$ 为 μ- 可分. 证毕.

下面我们定义空间 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

4.12 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，令 $f\in\mathcal{S}(\Omega,\mathcal{F})$，称 f 为 **本性有界** 的，如果存在非负实数 c，使得 $\mu([|f|>c])=0$，我们用 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 表示本性有界可测函数全体. 设 $f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，令

$$\|f\|_\infty=\inf\{c\geq 0:\ \mu([|f|>c])=0\}.$$

下一定理的证明是不足道的.

4.13 定理 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上的范数，$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 按范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为一 Banach 空间.

设 X 为一赋范线性空间. 若 f 为 X 上一有界线性泛函，令

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|,$$

称 $\|f\|$ 为 f 的范数. 熟知，X 上的有界线性泛函全体按上述范数构成一 Banach 空间，我们称它为 X 的 **对偶空间**，记为 X^*. 下面将研究 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的对偶空间 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$.

4.14 定理 设 $1<p,q<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$ 与 $(L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 保范线性同构：设 $g\in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 令

$$T_g(f)=\mu(fg),\quad f\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu),\tag{4.9}$$

则 $T_g\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*,g\mapsto T_g$ 为 $L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 到 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$ 上的一对一映射，且 $\|g\|_q=\|T_g\|$.

证 设 $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 由 Hölder 不等式知，(4.9) 定义了 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的一有界线性泛函 T_g, 且 $\|T_g\| \le \|g\|_q$. 往证 $\|T_g\| = \|g\|_q$. 不妨设 $\|g\|_q > 0$, 令

$$f = |g|^{q-1}\mathrm{sgn}(g),$$

其中 $\mathrm{sgn}(x)$ 为 x 的符号，即 $\mathrm{sgn}(x) = I_{(0,\infty)}(x) - I_{(-\infty,0)}(x)$. 由于 $(q-1)p = q$, 故有 $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$, 从而

$$\begin{aligned} T_g(f) = \mu(|g|^q) = \|g\|_q^q = \|g\|_q \|g\|_q^{q-1} \\ = \|g\|_q \|f\|_p^{q-1}. \end{aligned}$$

这表明 $\|T_g\| \ge \|g\|_q$, 从而最终有 $\|T_g\| = \|g\|_q$. 显然 $g \longmapsto T_g$ 为 $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 到 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$ 中的线性单射. 剩下要证明它是满射.

设 $T \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$, 欲证存在 $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 使 $T_g = T$. 为此，令 $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) < \infty\}$, 对每个 $A \in \mathcal{G}$, 令

$$T_A(f) = T(fI_A),\ f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu),$$

则 $T_A \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)^*$, 且 $\|T_A\| \le \|T\|$. 令

$$\nu_A(B) = T_A(I_B) = T(I_{A\cap B}),\ \mu_A(B) = \mu(A \cap B),\ B \in \mathcal{F},$$

则 ν_A 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上一有限符号测度，且 $\nu_A \ll \mu_A$. 令 $g_A = \dfrac{d\nu_A}{d\mu_A}$, 则显然有 $g_A I_{A^c} = 0$, a.e.. 下面证 $g_A \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 且 $T_{g_A} = T_A$. 为此，令 $E_n = [|g_A| \le n] \cap A$, 则 $E_n \uparrow A$. 记 $h_n = g_A I_{E_n}$, 则 $h_n \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 且对一切 $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 有

$$\begin{aligned} T_{h_n}(f) &= \mu(fh_n) = \mu(fg_A I_{E_n}) = \mu_A(g_A f I_{E_n}) \\ &= \nu_A(fI_{E_n}) = T_A(fI_{E_n}) = T_{A\cap E_n}(f) = T_{E_n}(f). \end{aligned}$$

这表明 $T_{h_n} = T_{E_n}$, 于是有

$$\|h_n\|_q = \|T_{h_n}\| = \|T_{E_n}\| \le \|T\|.$$

由于 $h_n \to g_A$，故由 Fatou 引理知 $\|g_A\|_q \leq \|T\|$，从而 $g_A \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 于是有

$$T_{g_A}(f) = \mu(g_A f) = \mu_A(g_A f) = \nu_A(f) = T_A(f).$$

这表明 $T_{g_A} = T_A$. 特别，我们有 $\|g_A\|_q = \|T_A\|$. 下面我们将证明存在 $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，使 $T_g = T$. 设 $A \subset B, A, B \in \mathcal{G}$，易见 $\|T_A\| \leq \|T_B\|$，且 $g_B I_A = g_A$, a.e.，于是可取 $A_n \in \mathcal{G}, A_n \uparrow$，使得

$$\sup_n \|T_{A_n}\| = \sup\{\|T_A\| : A \in \mathcal{G}\}.$$

令 $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_{A_n}$ a.e.，由于 $\|g_{A_n}\|_q \leq \|T\|$，故由 Fatou 引理知 $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 现证 $T_g = T$. 令 $B = \bigcup_n A_n$，则对任何 $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，我们有

$$\begin{aligned} T_g(f) = \mu(fg) &= \lim_{n\to\infty} \mu(fg_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} T_{A_n}(f) \\ &= \lim_{n\to\infty} T(fI_{A_n}) = T(fI_B). \end{aligned}$$

因此，为证 $T_g = T$，只需证明 $T(fI_{B^c}) = 0, \forall f \in L^q(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. 我们用反证法，假定存在某 $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$，使得 $T(fI_{A^c}) \neq 0$. 令 $D_n = [|f| > \frac{1}{n}] \cap A^c$，则 $\mu(D_n) < \infty$，且由控制收敛定理知 $fI_{D_n} \xrightarrow{L^p} fI_{A^c}$，故存在某 n_0，使 $T(fI_{D_{n_0}})$ 非 0，即 $T_{D_{n_0}}(f) \neq 0$. 于是 $\|T_{D_{n_0}}\| > 0$. 令 $C_n = A_n \cup D_{n_0}$，则

$$\begin{aligned} \|T_{C_n}\|^q = \|g_{C_n}\|_q^q &= \|g_{A_n} + g_{D_{n_0}}\|_q^q \\ &= \|g_{A_n}\|_q^q + \|g_{D_{n_0}}\|_q^q = \|T_{A^n}\|^q + \|T_{D_{n_0}}\|^q \end{aligned}$$

(这里用到如下事实：$A_n \cap D_{N_0} = \emptyset \Rightarrow g_{A_n} + g_{D_{n_0}} = g_{C_n}$, a.e.). 因此有 $\sup_n \|T_{C_{n_0}}\| > \sup_n \|T_{A_n}\|$，这与 (A_n) 的选取矛盾. 证毕.

上述定理表明：如果 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，我们可以将 $L^q(\Omega,\mathcal{L},\mu)$ 视为 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的对偶. 下一定理表明：如果 μ 为 σ-有限测度，则 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 可视为 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的对偶.

4.15 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一 σ- 有限测度空间, 则 $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$ 与 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 保范线性同构, 其同构映射为: 设 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 令

$$T_g(f)=\mu(fg),\ f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu),$$

则 $T_g\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*, g\longmapsto T_g$ 为一对一满射, 且 $\|g\|_\infty=\|T_g\|$. 特别有 $\|fg\|_1\le\|g\|_\infty\|f\|_1$.

证 设 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 易见 $T_g\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$, 且 $\|T_g\|\le\|g\|_\infty$. 要证 $\|T_g\|=\|g\|_\infty$, 不妨设 $\|g\|_\infty>0$. 则对 $\forall\epsilon:0<\epsilon<\|g\|_\infty$, 我们有 $\mu(|g|>\|g\|_\infty-\epsilon)>0$. 给定 $\epsilon>0$, 取 $A\subset[|g|>\|g\|_\infty-\epsilon]$, 使 $0<\mu(A)<\infty$. 令 $f=I_A\mathrm{sgn}(g)$, 则 $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且有

$$\|f\|_1=\mu(|f|)=\mu(A),$$
$$T_g(f)=\mu(fg)=\mu(I_A|g|)\ge(\|g\|_\infty-\epsilon)\mu(A).$$

这表明 $\|T_g\|\ge\|g\|_\infty-\epsilon$. 由于 $\epsilon>0$ 是任意的, 故有 $\|T_g\|\ge\|g\|_\infty$, 最终有 $\|T_g\|=\|g\|_\infty$.

现设 $T\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)^*$. 往证存在 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 使 $T_g=T$. 令 $\mathcal{G}=\{A\in\mathcal{F}:\mu(A)<\infty\}$, 由于假定 μ 是 σ- 有限的, 故存在 $A_n\in\mathcal{G}$, 使 $A_n\uparrow\Omega$. 令

$$\nu_n(B)=T(I_{A_n\cap B}),\ \mu_n=\mu(A_n\cap B),\ B\in\mathcal{F},$$

并令 $g_n=\dfrac{d\nu_n}{d\mu_n}$, 则显然有 $g_n\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且对 $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 有

$$T_{A_n}(f)=T(fI_{A_n})=\nu_n(f)=\mu_n(fg_n)=\mu(fg_n)=T_{g_n}(f).$$

由于 $\|g_n\|_\infty=\|T_{T_n}\|\le\|T\|, g_n\uparrow g$, a.e., 故 $g\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且有

$$T_g(f)=\mu(fg)=\lim_{n\to m}\mu(fg_n)=\lim_{n\to m}T(fI_{A_n})=T(f),$$

即有 $T_g=T$. 证毕.

4.16 定义 设 $1 \le p,q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \{f,f_n,n\ge 1\}\subset L^p$. 如果 $\forall g\in L^q$, $\mu(f_n g)\to\mu(fg)$, 则称 (f_n) 在 L^p 中 **弱收敛于** f.

4.17 定理 设 $1 < p,q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \{f,f_n,n\ge 1\}\subset L^p$. 如果 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\{\|f_n\|_p\}$ 有界, 则 (f_n) 在 L^p 中 **弱收敛于** f.

证 只需证明 a.e. 收敛情形. 设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 且 $\sup_n \|f_n\|_p = C$. 由 Fatou 引理, $\|f\|_p \le C$. 设 $g\in L^q$. 令 $A_n=[1/n\le |g|^q\le n]$. 给定 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\mu(A)<\delta$ 时有 $\|gI_A\|_q<\epsilon$. 由 Egorov 定理 (第二章定理 3.5(2)), 对每个 n 存在 $B_n\in\mathcal{F}, B_n\subset A_n$, 使得 $\mu(A_n\setminus B_n)<\delta$, 且 (f_k) 在 B_n 上一致收敛于 f. 另一方面, 存在 n_0 使得对一切 $n\ge n_0$ 有 $\|gI_{A_n^c}\|_q<\epsilon$. 于是当 $n\ge n_0$ 有

$$\begin{aligned}|\mu((f_k-f)g)| &\le |\mu(f_k-f)gI_{A_n})| + |\mu((f_k-f)gI_{A_n^c})| \\ &\le \mu(|f_k-f||g|I_{B_n}) + \mu(|f_k-f||g|I_{A_n\setminus B_n}) \\ &\quad + \|f_k-f\|_p\|gI_{A_n^c}\|_q \\ &\le \mu(|f_k-f||g|I_{B_n}) + \|f_k-f\|_p(\|gI_{A_n\setminus B_n}\|_q + \|gI_{A_n^c}\|_q) \\ &< \mu(|f_k-f||g|I_{B_n}) + 4C\epsilon.\end{aligned}$$

由此推知 $\mu(f_k g)\to\mu(fg)$. 从而 (f_n) 在 L^p 中 **弱收敛于** f.

注 该定理对 $p=1$ 不成立. 例如设 $\Omega=[0,1], \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1]), \mu$ 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 令 $f_n = nI_{[0,1/n]}$, 则 $\|f_n\|_1=1, f_n\to 0$, a.e., 但 (f_n) 不弱收敛到 0.

4.18 定理 设 $\Omega=\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, $\mathcal{F}$ 为 Ω 的子集全体, μ 为 $\mathbb{N}$ 上计数测度, 则在 L^1 中强收敛与弱收敛等价.

证 设 (f_n) 在 L^1 中弱收敛于 f. 令

$$\mu_n(A)=\sum_{i\in A} f_n(i),\quad \mu(A)=\sum_{i\in A} f(i),$$

则 $\mu_n(A)\to\mu(A), \forall A\in\mathcal{F}$. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理 (定理 3.15) 知, $\sup\limits_n \sum_i |f_n(i)|<\infty$, 且对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F}, \sum_{i\in A}\frac{1}{2^i}\le\eta \Rightarrow \sup_n\sum_{i\in A}|f_n(i)|\le\epsilon.$$

取 m 充分大，使得

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \eta, \ \sum_{i=m+1}^{\infty} |f(i)| < \epsilon,$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_n(i) - f(i)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} (|f_n(i)| + |f(i)|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |f_n(i) - f(i)| + 2\epsilon.\end{aligned}$$

由于 f_n 逐点收敛于 f，故由上式推知 (f_n) 在 L^1 中强收敛于 f.

注 在定理的框架下，对 $p > 1$ 情形，L^p 中的强收敛与弱收敛不等价. 事实上，令 $f_n(i) = 0, i \neq n$; $f_n(n) = 0$, 则 $\|f_n\|_p = 1$, 但 (f_n) 弱收敛于 0.

习题

4.19 简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 中稠密. (提示: $\forall \epsilon > 0$, 将 $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ 分成有限多个其长度小于 ϵ 的区间: $[a_0, a_1], \cdots, (a_{n-1} a_n]$. 令 $f_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$, 其中 $A_1 = f^{-1}([a_0, a_1])$, $A_k = f^{-1}((a_{k-1}, a_k]), k \geq 2$.)

4.20 设 $[a, b]$ 为一闭区间，μ 为 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 测度. 则对任何 $p: 1 \leq p < \infty$, $[a, b]$ 上的阶梯函数全体在 $L^p([a, b], \mu)$ 中稠密. 由此进一步证明 $[a, b]$ 上的连续函数全体在 $L^p([a, b], \mu)$ 中稠密. 此外证明 $L^\infty([a, b], \mu)$ 不是可分的 Banach 空间.

4.21 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，$1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$. 此外，有 $\|f\|_p \to \|f\|_\infty (p \to \infty)$.(提示：利用 Hölder 不等式及 Jensen 不等式.)

4.22 (Hölder 不等式的推广) (1) 设 $1 < p, q, r < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$, 则有 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(2) 设 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty, m \geq 2$, 且 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, 则有

$$\|f_1 \cdots f_m\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_m\|_{p_m}.$$

4.23 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $f \in L^1 \cap L^\infty$. 试证: $\forall p \geq 1$, $f \in L^p$, 且 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

4.24 设 λ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $1 \leq p < \infty, f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 令 $f_x(t) = f(t-x)$. 试证: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x\to x_0} \|f_x - f_{x_0}\|_p = 0$.

4.25 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, g 为一实值 μ- 可积函数, 在 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上定义 T_g 如下:

$$T_g(f) = \int_\Omega fg d\mu, \ f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

试证

$$\|g\|_1 = \sup\{|T_g(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

§ 5 Daniell 积分

积分的一个基本性质是线性性, 因此积分可视为 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的线性泛函. 这一思想可以用来给出定义积分的另一途径 —— Daniell 积分.

5.1 定义 设 Ω 为一抽象集合, $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一族实值函数组成的线性空间. 如果

$$f \in \mathcal{H} \Rightarrow |f| \in \mathcal{H}, f \wedge 1 \in \mathcal{H}, \tag{5.1}$$

则称 $\mathcal{H}$ 为一 **向量格**.

5.2 注 在上述定义中, 条件 $f \in \mathcal{H} \Rightarrow |f| \in \mathcal{H}$ 等价于下列条件之一:

$$f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow f \wedge g \in \mathcal{H}; \tag{5.2}$$

$$f, g \in \mathcal{H} \Rightarrow f \vee g \in \mathcal{H}. \tag{5.3}$$

事实上，$|f| = f\vee 0 + (-f)\vee 0$，故 (5.3)⇒(5.1)．又由于 $f\wedge g = \dfrac{g+f-|g-f|}{2}$，故 (5.1)⇒(5.2)．最后，由于 $f\vee g = f+g-f\wedge g$，故 (5.2)⇒(5.3)．

5.3 定义 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格，I 为 $\mathcal{H}$ 上的**正线性泛函**：即 $f,g\in\mathcal{H},\alpha,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g); f\in\mathcal{H}, f\geq 0\Rightarrow I(f)\geq 0$．如果 I 满足如下条件：

$$f_n\in\mathcal{H}, f_n\downarrow 0\Rightarrow I(f_n)\to 0, \tag{5.4}$$

或者等价地

$$f_n\in\mathcal{H}, f_n\uparrow f\in\mathcal{H}\Rightarrow I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n), \tag{5.5}$$

则称 I 为 $\mathcal{H}$ 上的 **Daniell积分**．

5.4 例 设 $\mathcal{A}$ 为 Ω 上的一代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一测度，令

$$\mathcal{H}=\Big\{\sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}: a_i\in\mathbb{R}, A_i\in\mathcal{A}, \mu(A_i)<\infty, 1\leq i\leq n, n\geq 1\Big\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一向量格．设 $f=\sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}\in\mathcal{H}$，令 $I(f)=\sum_i a_i\mu(A_i)$，则 I 为 $\mathcal{H}$ 上的 Daniell 积分．

5.5 例 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间，$\mathcal{H}=L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu), I(f)=\mu(f), f\in\mathcal{H}$．则 $\mathcal{H}$ 为向量格，I 为 $\mathcal{H}$ 上的 Daniell 积分．

下面我们将证明：Daniell 积分可以延拓成为通常的可测函数关于测度的积分．为此我们先引进若干记号．

5.6 记号 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格，令

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_+ &= \{f\in\mathcal{H}: f\geq 0\},\\ \mathcal{H}_+^* &= \{f:\exists f_n\in\mathcal{H}_+, \text{使} f_n\uparrow f\},\\ \mathcal{C} &= \{C\subset\Omega: I_C\in\mathcal{H}_+^*\}.\end{aligned}$$

5.7 引理 我们有

(1) $f,g\in\mathcal{H}_+^*, a,b\geq 0\Rightarrow af+bg\in\mathcal{H}_+^*, f\vee g, f\wedge g\in\mathcal{H}_+^*$;

(2) $f_n \in \mathcal{H}_+^*, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}_+^*$;

(3) $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭，对有限交运算封闭；

(4) $f \in \mathcal{H}_+ \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, [f > \alpha] \in \mathcal{C}$;

(5) $f \in \mathcal{H}_+^* \Rightarrow \forall \alpha \geq 0, [f > \alpha] \in \mathcal{C}$;

(6) $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(f : f \in \mathcal{H})$.

证 (1) 及 (2) 显然. (3) 由 (1) 及 (2) 推得. 往证 (4). 设 $f \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{R}_+$, 则 $(f - \alpha)^+ = f - f \wedge \alpha \in \mathcal{H}_+$. 但

$$[n(f - \alpha)^+] \wedge 1 \uparrow I_{[f>\alpha]}, \ n \to \infty,$$

故 $I_{[f>\alpha]} \in \mathcal{H}_+^*$, 即 $[f > a] \in \mathcal{C}$.

现证 (5). 设 $f \in \mathcal{H}_+^*$, 令 $f_n \in \mathcal{H}_+, f_n \uparrow f$, 则由 (4) 知

$$[f > \alpha] = \bigcup_n [f_n > \alpha] \in \mathcal{C}.$$

最后，(6) 容易由 (4) 看出. 证毕.

5.8 定理 (Daniell-Stone 定理) 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一向量格, I 为 $\mathcal{H}$ 上的一 Daniell 积分，则存在 $\mathcal{F} \hat{=} \sigma(f : f \in \mathcal{H})$ 上的一测度 μ 使得 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, 且对一切 $f \in \mathcal{H}$ 有 $I(f) = \mu(f)$. 若进一步 $1 \in \mathcal{H}_+^*$, 这样的测度 μ 是唯一确定的，且为 σ- 有限的.

证 我们将证明分为三个步骤.

1° 对 $f \in \mathcal{H}_+^*$, 令

$$I^*(f) = \sup\{I(g) : g \leq f, g \in \mathcal{H}_+\},$$

则易知有如下事实:

$$f_n \in \mathcal{H}_+, f_n \uparrow f \Rightarrow I^*(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n);$$

$$f, g \in \mathcal{H}_+^*, a, b \geq 0 \Rightarrow I^*(af + bg) = aI^*(f) + bI^*(g);$$

$$f_n \in \mathcal{H}_+^*, f_n \uparrow f \Rightarrow I^*(f) = \lim_{n\to\infty} I^*(f_n);$$

$$f, g \in \mathcal{H}_+^*, f \leq g \Rightarrow I^*(f) \leq I^*(g).$$

此外，对 $f \in \mathcal{H}_+$, 有 $I^*(f) = I(f)$. 现令

$$\mu^*(C) = I^*(I_C), C \in \mathcal{C},$$

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(C) : C \supset A, C \in \mathcal{C}\}, A \subset \Omega \qquad (5.6)$$

(约定 $\inf\emptyset=+\infty$). 往证 μ^* 为 Ω 上的外测度.

首先, $\mu^*(\emptyset)=0$. 此外, 设 $C_n\in\mathcal{C},n\geq 1$, 则 $\bigcup_n C_n\in\mathcal{C}$, 故有

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_n C_n)&=I^*(I_{\bigcup_n C_n})\leq I^*(\sum_{n=1}^{\infty}I_{C_n})\\&=\sum_{n=1}^{\infty}I^*(I_{C_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(C_n).\end{aligned}$$

现设 $A_n\subset\Omega,n\geq 1,A=\bigcup_n A_n$. 对给定 $\epsilon>0$, 存在 $C_n\in\mathcal{C},C_n\supset A_n$, 使 $\mu^*(C_n)\leq\mu^*(A_n)+\frac{\epsilon}{2^n}$. 令 $C=\bigcup_n C_n$, 则 $C\in\mathcal{C},C\supset A$, 且有

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(C)\leq\sum_n\mu^*(C_n)\leq\sum_n\mu^*(A_n)+\epsilon.$$

由于 $\epsilon>0$ 是任意的, 故有 $\mu^*(A)\leq\sum_n\mu^*(A_n)$, 这表明 μ^* 为外测度.

2° 令 $\mathcal{M}^*$ 为 μ^*- 可测集全体, 往证 $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}^*$(从而有 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{M}^*$). 由于 $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭, 由 (5.6) 易知, 若将 μ^* 在 $\mathcal{C}$ 上的限制记为 μ', 则 μ^* 为 μ' 引出的外测度. 于是设 $A\in\mathcal{C}$, 由第一章引理 4.5 知, 为证 $A\in\mathcal{M}^*$, 只需证 $\forall C\in\mathcal{C},\mu^*(C)<\infty$, 有

$$\mu^*(C)\geq\mu^*(A\cap C)+\mu^*(A^c\cap C).\tag{5.7}$$

令 $g_n\in\mathcal{H}_+$, 使 $g_n\uparrow I_{A\cap C}$, 令 $h_n\in\mathcal{H}_-$, 使 $h_n\uparrow I_C$, 则对固定 n, 当 $m\to\infty$ 时有

$$(h_m-g_m)^+\uparrow I_C-g_n\in\mathcal{H}_+^*.$$

令 $f_n=I_C-g_n$, 则 $f_n\downarrow I_C-I_{A\cap C}=I_{A^c\cap C}$. 设 $0<\epsilon<1$, 令 $G_n=[f_n>1-\epsilon]$, 则由引理 5.7(5) 知 $G_n\in\mathcal{C}$, 且有 $G_n\supset A^c\cap C,f_n\geq(1-\epsilon)I_{G_n}$, 于是我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(A^c\cap C)&\leq\mu^*(G_n)\leq\frac{1}{1-\epsilon}I^*(f_n)\\&=\frac{1}{1-\epsilon}(\mu^*(C)-I(g_n)).\end{aligned}$$

注意到 $I(g_n)\uparrow I^*(I_{A\cap C})=\mu^*(A\cap C)$, 我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(A^c\cap C)&\le\lim_{n\to\infty}\mu^*(G_n)\\&\le\frac{1}{1-\epsilon}[\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C)].\end{aligned}$$

令 $\epsilon\downarrow 0$, 得

$$\mu^*(A^c\cap C)\le\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C),$$

故 (5.7) 得证.

3° 令 μ 为 μ^* 到 $\sigma(\mathcal{C})$ 上的限制, 则 μ 为测度, 往证定理的结论成立. 设 $f\in\mathcal{H}_+$, 令

$$f_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}(I_{[f>\frac{k}{2^n}]}-I_{[f>\frac{k+1}{2^n}]})=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}I_{[f>\frac{k}{2^n}]},$$

则 $f_n\in\mathcal{H}_+^*$, 且 $f_n\uparrow f$. 我们有

$$\begin{aligned}I(f)&=\lim_{n\to\infty}I^*(f_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu([f>\frac{k}{2^n}])\\&=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f).\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{H}_+\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 且对 $f\in\mathcal{H}_+$, 有 $I(f)=\mu(f)$. 再由线性性推知对一般 $f\in\mathcal{H}$, 有 $I(f)=\mu(f)$.

最后, 若 $1\in\mathcal{H}_+^*$, 则存在 $f_n\in\mathcal{H}_+$ 使 $f_n\uparrow 1$, 于是 $[f_n>\frac{1}{2}]\uparrow\Omega$, 但 $\mu([f_n>\frac{1}{2}])\le\frac{1}{2}\mu(f_n)=\frac{1}{2}I(f_n)<\infty$, 故 μ 为 σ- 有限测度. 此外, 设 ν 为一测度, 使得

$$\mu(f)=I(f)=\nu(f),f\in\mathcal{H}_+,$$

则由积分单调收敛定理推知: $\mu(f)=\nu(f),\forall f\in\mathcal{H}_+^*$, 特别, ν 与 μ 在 $\mathcal{C}$ 上一致. 由于 $\mathcal{C}$ 是 π- 类, 且存在 $C_n\in\mathcal{C}$, 使 $C_n\uparrow\Omega,\mu(C_n)<\infty,n\ge 1$, 故 μ 与 ν 在 $\sigma(\mathcal{C})$ 上一致 (见第一章引理 4.6),μ 的唯一性得证. 证毕.

5.9 注 在定理中，如果不假定 $1 \in \mathcal{H}_+^*$，但要求测度 μ 满足：

$$\mu(A) = \inf\{\mu(C) : C \supset A, C \in \mathcal{C}\}, A \in \mathcal{F} \tag{5.8}$$

则 μ 也是唯一确定的．事实上，设另有测度 ν 使对一切 $f \in \mathcal{H}$ 有 $I(f) = \nu(f)$，且满足 (5.8)(以 ν 代替 μ)，则 $\forall C \in \mathcal{C}$，令 $f_n \in \mathcal{H}^+, f_n \uparrow I_C$，我们有

$$\nu(C) = \lim_{n\to\infty} \nu(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(C).$$

于是由 (5.8) 知，ν 与 μ 在 $\mathcal{F}$ 上一致．

习题

5.10 设 M 为一个 n 维 Riemann 流形，$\mathcal{U}$ 是 M 的一个坐标邻域，$\{x^i\}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的坐标函数，$\{g_{ij}\}$ 为在 $\mathcal{U}$ 中的 Riemann 度量系数，$G = \det[g_{ij}]$(det 表示矩阵的行列式)．令 $C_c(M)$ 表示 M 上具紧支撑的连续泛函全体．设 $f \in C_c(M)$，其支撑含于 $\mathcal{U}$，定义

$$\int_{\mathcal{U}} f = \int_{\mathcal{U}} f\sqrt{G}dx^1 \cdots dx^n.$$

对一般的 $f \in C_c(M)$，可利用上式及 M 的一个单位分解来定义 $\int_M f$．试证 $f \mapsto \int_M f$ 为 $C_c(M)$ 上的 Daniell 积分．

§ 6 Bochner 积分和 Pettis 积分

本节介绍两种常用的 Banach 空间值函数的积分 ——Bochner 积分和 Pettis 积分．以下恒假定 E 为数域 $\mathbb{K}$(实域 $\mathbb{R}$ 或复域 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间，$\|\cdot\|$ 为 E 上的范数，$\mathcal{B}(E)$ 为 E 上的 Borel σ-代数，E^* 为 E 的对偶空间．此外，我们用 s-lim 表示 E 中的强收敛．

6.1 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间，$X : \Omega \longrightarrow E$ 为 Ω 上的 E- 值函数．如果 X 关于 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{B}(E)$ 可测 (即 $X^{-1}(\mathcal{B}(E)) \subset \mathcal{F}$)，则

称 X 为 **Borel 可测**; 如果 $\forall f\in E^*, f(X)$ 为 Ω 上 $\mathcal{F}$- 可测 ($\mathbb{K}$- 值) 函数，则称 X 为 **弱可测**; 如果 X 为弱可测且有可分的值域 (即 $X(\Omega)$ 在 E 中有可数稠子集)，则称 X 为 **强可测**; 如果 X 只取有限多个值 (即 $X(\Omega)$ 为 E 的有限子集)，则称 X 为 **简单函数**.

令 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度，$\overline{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 关于 μ 的完备化. 如果在上述定义中将 $\mathcal{F}$ 换成 $\overline{\mathcal{F}}$, 则相应的 Borel 可测 (弱可测) 称为 **μ- 可测** (**弱 μ- 可测**). 这时，称 $X:\Omega\longrightarrow E$ 为 **强 μ- 可测**, 是指 X 为弱 μ- 可测，且有 μ- 可分的值域 (即存在 μ- 零测集 N, 使得 $X(\Omega\setminus N)$ 在 E 中有可数稠子集).

显然：Borel 可测蕴含弱可测；对简单函数而言，Borel 可测与弱可测等价；若 E 为可分 Banach 空间，则弱可测与强可测等价. 若 X 为 Borel 可测，则作为 X 与 E 上连续函数 $x\mapsto\|x\|$ 的复合，$\|X\|$ 为 $\mathcal{F}$- 可测实值函数.

下面我们将证明强可测函数必为 Borel 可测，并且研究强可测函数的结构. 为此，先证明一个引理.

6.2 引理 设 E 为可分 Banach 空间，$S_1(E^*)$ 为 E^* 的单位球. 则存在 $S_1(E^*)$ 中一序列 $\{f_n\}$, 满足如下条件：$\forall f\in S_1(E^*)$, 可选取 $\{f_n\}$ 的一子列 $\{f_{n'}\}$, 使得 $\forall x\in E$ 有 $\lim\limits_{n'} f_{n'}(x)=f(x)$.

证 令 $\{x_n, n\ge 1\}$ 为 E 的可数稠子集. $\forall n\ge 1$, 考虑 $S_1(E^*)$ 到 $\mathbb{K}^n$ 中的连续映射：$f\mapsto\varphi_n(f)=\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$. 由于 $\mathbb{K}^n$ 可分，存在 $S_1(E^*)$ 中序列 $\{f_{n,k}, k\ge 1\}$, 使得 $\{\varphi_n(f_{n,k}), k\ge 1\}$ 在 $\varphi_n(S_1(E^*))$ 中稠. 现设 $f\in S_1(E^*)$. 对每个 $n\ge 1$, 选取 m_n, 使得

$$|f_{n,m_n}(x_i)-f(x_i)|<\frac{1}{n},\quad 1\le i\le n.$$

则有 $\lim\limits_n f_{n,m_n}(x_i)=f(x_i), i=1,2,\cdots$. 由于 $\|f_{n,m_n}\|\le 1,\forall n\ge 1$, 故容易推知：$\forall x\in E$, 有 $\lim\limits_n f_{n,m_n}(x)=f(x)$. 证毕.

定理 6.3 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，$X:\Omega\longrightarrow E$ 强可测，则存在 Borel 可测简单函数序列 $\{X_n\}$, 使得

$$\|X_n(\omega)\|\le X(\omega),\ n\ge 1,\ \text{s-}\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega),\ \omega\in\Omega.\qquad(6.1)$$

特别，X 为 Borel 可测. 此外，强可测函数全体构成一向量空间，且对序列的逐点强极限封闭.

证 首先证明 $\omega \mapsto \|X(\omega)\|$ 为 $\mathcal{F}$- 可测函数. 令 E_0 为包含 $X(\Omega)$ 的 E 的最小闭子空间，则 E_0 为可分 Banach 空间. 由于 E_0^* 的元素是 E^* 的元素在 E_0 上的限制 (由 Hahn-Banach 定理知)，易知 $X:\Omega \longrightarrow E_0$ 亦为弱可测的. 设 $a \in \mathbb{R}_+$. 令

$$A = \{\omega:\ \|X(\omega)\| \le a\},\ A_f = \{\omega : |f(X(\omega)| \le a\},\ f \in S_1(E_0^*),$$

则有 $A \subset \bigcap_{f\in S_1(E_0^*)} A_f$. 另一方面，$\forall \omega \in \Omega$, 由 Hahn-Banach 定理知，存在 $f \in E_0^*, \|f\| = 1$, 使得 $f(X(\omega)) = \|X(\omega)\|$. 于是有 $A \supset \bigcap_{f\in A_1(E_0^*)} A_f$, 从而最终有 $A = \bigcap_{f\in S_1(E_0^*)} A_f$. 设序列 $\{f_n\} \subset S_1(E_0^*)$ 满足引理 6.2 中的条件，则易知 $A = \bigcap_n A_{f_n} \in \mathcal{F}$. 这表示 $\|X\|$ 为 $\mathcal{F}$- 可测的.

我们用 $\mathbb{Q}_1$ 表示 $[0,1]$ 中的有理数全体. 令 D 为 $X(\Omega)$ 的一可数稠集，记 $C = \{\alpha x : x \in D, \alpha \in \mathbb{Q}_1\}$. 将 C 中元素排列为 $y_1, y_2, \cdots$, 其中 $y_1 = 0$. 设 $n \ge 2, 1 \le j \le n$. 令

$$\begin{aligned} B_{n,j} = &\{\omega : \|y_j\| \le \|X(\omega)\|; \forall 1 \le k \le j-1,\ \text{或者} \|y_k\| > \|X(\omega)\|,\\ &\text{或者} \|X(\omega) - y_k\| > \|X(\omega) - y_j\|; \forall j+1 \le k \le n,\\ &\text{或者} \|y_k\| > \|X(\omega)\|,\ \text{或者} \|X(\omega) - y_k\| \ge \|X(\omega) - y_j\|\}. \end{aligned}$$

若 $B_{n,j} \ne \emptyset$, 则 $\omega \in B_{n,j}$, 当且仅当 j 为 $\{1,\cdots,n\}$ 中满足 $\|y_k\| \le \|X(\omega)\|$ 和 $\|X(\omega) - y_k\| = \inf_{1\le i\le n} \|X(\omega) - y_i\|$ 的最小的 k. 注意 $\forall y \in E, X - y$ 也是强可测的，故由上所证知，每个 $B_{n,j}$ 为 $\mathcal{F}$- 可测集. 对 $n \ge 2$, 如下定义简单函数：

$$X_n(\omega) = \sum_{j=2}^{n} I_{B_{n,j}}(\omega) y_j,\ \omega \in \Omega,$$

则显然有 $\|X_n(\omega)\| \le \|X(\omega)\|$, 且在 $[X = 0]$ 上恒有 $X_n = 0$. 往证 $\text{s-lim}_n X_n(\omega) = X(\omega), \omega \in \Omega$. 设 $\omega \in \Omega$, 不妨设 $X(\omega) \ne 0$. 对任

给 $\epsilon > 0$, 取 $y \in D$, 使 $\|X(\omega) - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. 令 $a = 2|X(\omega)|/\epsilon$, 则存在 $\alpha \in Q_1$, 使 $\alpha/(1-\alpha) < a < (2-\alpha)/(1-\alpha)$. 对此 α, 容易推知

$$\|X(\omega) - \alpha\| < \epsilon, \quad \|\alpha y\| < \|X(\omega)\|.$$

设 $\alpha y = y_m$, 则易知当 $n \geq m$ 时有 $\|X_n(\omega) - X(\omega)\| < \epsilon$. 这表明 s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$. 证毕.

有了上述准备后，现在可定义强 μ- 可测函数关于测度的积分.

6.4 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间 $X : \Omega \longrightarrow E$ 为一强 μ- 可测函数. 如果 $\|X\|$ 为 μ- 可积函数，则存在 E 中唯一的元素，记为 $\int_\Omega X d\mu$, 使得

$$f\Big(\int_\Omega X d\mu\Big) = \int_\Omega f(X) d\mu, \ \forall f \in E^*. \tag{6.2}$$

这时有

$$\|\int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X\| d\mu. \tag{6.3}$$

我们称 X 关于 μ 为 **Bochner** 可积, 并称 $\int_\Omega X d\mu$ 为 X 关于 μ 的 **Bochner** 积分, 简记为 $\mu(X)$.

证 如果在完备测度空间 $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \mu)$ 中考虑，则存在一强可测函数 $\widetilde{X}$, 它与 X μ-a.e. 相等. 因此，为证明定理，不妨假定 X 本身是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上一强可测函数. 首先设 $X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$ 为简单可测函数，其中 $x_i \neq 0, A_i \in \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 则 $\|X\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\| I_{A_i}$. 如果 $\|X\|$ 为 μ- 可积，则对每个 $1 \leq i \leq n, \mu(A_i) < \infty$. 这时令

$$\int_\Omega X d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i, \tag{6.4}$$

易知它不依赖 X 的具体表示. 对一般的强可测函数 X, 令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为满足 (6.1) 的简单可测函数序列. 假定 $\|X\|$ 为 μ- 可积，则每

个 $\|X_n\|$ 为 μ- 可积, 且有

$$\|\int_\Omega X_n d\mu - \int_\Omega X_m d\mu\| \le \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu. \tag{6.5}$$

由于 $\|X_n - X_m\| \le 2\|X\|$, 故由上式及控制收敛定理知, $\{\int_\Omega X_n d\mu\}$ 为 E 中基本列, 从而强收敛于一元素, 记为 $\int_\Omega X d\mu$. 显然, $\int_\Omega X d\mu$ 不依赖于满足 (6.1) 的序列 $\{X_n\}$ 的选取. 现设 $f \in E^*$, 显然有

$$f\Big(\int_\Omega X_n d\mu\Big) = \int_\Omega f(X_n) d\mu,$$

两边令 $n \to \infty$ 即得 (6.2). 由于 $f(x) = 0, \forall f \in E^* \Rightarrow x = 0$, 故满足 (6.2) 的 $\int_\Omega X d\mu$ 是唯一的.

最后, 对简单可测函数 X_n, 显然有

$$\|\int_\Omega X_n d\mu\| \le \int_\Omega \|X_n\| d\mu,$$

故两边令 $n \to \infty$ 即得 (6.3).

6.5 注 (1) 设 F 为另一 Banach 空间, T 为 E 到 F 中的有界线性算子. 由上述证明中关于 $\int_\Omega X d\mu$ 的定义容易推知

$$T\Big(\int_\Omega X d\mu\Big) = \int_\Omega TX d\mu, \tag{6.6}$$

其中右端为 TX 关于 μ 的 Bochner 积分.

(2) 由 (6.2) 推知, Bochner 积分具有通常积分的线性性.

(3) 设 X 关于 μ 为 Bochner 可积, 则 $\forall A \in \mathcal{F}, XI_A$ 仍为 Bochner 可积, 其 Bochner 积分记为 $\int_A X d\mu$. 令

$$\nu(A) = \int_A X d\mu, \ A \in \mathcal{F}, \tag{6.7}$$

则 ν 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的下述意义下的 **E- 值测度**: (i)$\nu(\emptyset) = 0$; (ii) 对 $\mathcal{A}$ 中两两不相交集合序列 $\{A_i\}$, 有 $\nu(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$. 我们

称 ν 为 X 关于 μ 的 **不定积分**. 显然 ν 关于 μ 在下述意义下是 **绝对连续** 的, 即 $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$. 此外, 令

$$\|\nu\|_{\text{var}} = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\nu(A)\| : \{A_i\}\subset\mathcal{F}\ \text{为}\ \Omega\ \text{的可数划分}\Big\}, \tag{6.8}$$

称 $\|\nu\|_{\text{var}}$ 为 ν 的 **全变差**, 则有

$$\|\nu\|_{\text{var}} = \int_{\Omega}\|X\|d\mu. \tag{6.9}$$

(4) 对 Bochner 积分, 我们有相应的控制收敛定理 (见习题 6.8), 但没有相应的 Radon-Nikodym 定理 (见习题 6.9).

最后, 作为本节的结束, 我们定义弱 μ- 可测函数的 Pettis 积分.

6.6 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $X:\Omega\longrightarrow E$ 为一弱 μ- 可测函数, $A\in\mathcal{F}$. 如果 $\forall f\in E^*, f(X)$ 为 μ- 可积函数, 且存在 $x_A\in E$, 使得

$$f(x_A)=\int_A f(X)d\mu,\ \forall f\in E^*,$$

则称 X 为关于 μ **在 A 上 Pettis 可积**, 并称 x_A 为 X 关于 μ **在 A 上的 Pettis 积分**, 记为 $(\mathrm{P})\int_A X d\mu$. 设 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数, 在每个 $\mathcal{F}_0$- 可测集上可积的弱 μ- 可测函数称为 **在 $\mathcal{F}_0$ 上 Pettis 可积**. 特别, 在 $\mathcal{F}$ 上 Pettis 可积的弱 μ- 可测函数简称为 **Pettis 可积**. 这时称 $x\mapsto x_A$ 为 X 的 Pettis 不定积分.

显然, Bochner 可积的函数必为 Pettis 可积, 且 $\forall A\in\mathcal{F}$, 在 A 上的两种积分一致.

注 可以证明 (例如见 Diestel[2])Pettis 不定积分为一 E- 值测度.

习题

6.7 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, $X:\Omega\longrightarrow E$ 为一强 μ- 可测函数. 则为要 X 为 Bochner 可积, 必须且只需存在一列简单可

测函数 $\{X_n, n \geq 1\}$, 使得对 a.e.$\omega \in \Omega$, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

6.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $\{X_n\}$ 为一列 Bochner 可积函数, X 为一强 μ- 可测函数. 如果对 a.e.ω, s-$\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且存在一非负 μ- 可积函数 g, 使得 $\|X_n\| \leq g$, a.e. $\forall n \geq 1$, 则 X 为 Bochner 可积, 且有

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu.$$

(提示: $\|X_n - X\| \leq 2g$, a.e. .)

6.9 设 μ 为 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上的 Lebesgue 测度, E 为 Banach 空间 $L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$. 对 $A \in \mathcal{B}([0,1])$, 令 $\nu(A) = I_A$. 试证:

(1) ν 为关于 μ 绝对连续的 E- 值测度;

(2) 不存在 Bochner 可积函数 $X : [0,1] \longrightarrow E$, 使得 $\nu(A) = \int_A X d\mu, \forall A \in \mathcal{B}([0,1])$.

6.10 证明注 6.5(3).

6.11 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, E 为一自反的 Banach 空间 (即 $E^{**} = E$), $X : \Omega \longrightarrow E$ 为一弱 μ- 可测函数. 如果 $\forall f \in E^*$, $f(X)$ 为 μ- 可积, 则 X 为 Pettis 可积.

第四章 乘积可测空间上的测度与积分

§1 乘积可测空间

1.1 定义 设 Ω_1, Ω_2 为两个集合，令

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\},$$

称 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 为 Ω_1 与 Ω_2 的 **乘积**. 若 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ 及 $(\Omega_2, \mathcal{F})$ 为两个可测空间，我们在 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上定义如下 σ- 代数：

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\},$$

称 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 为 **乘积 σ- 代数**,$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ 为 **乘积可测空间**.

上述定义容易推广到任意有限多个可测空间的乘积情形，下面我们将进一步定义一族可测空间的乘积.

1.2 定义 设 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 为一族集合，$\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i, \Omega^I$ 表示 I 到 Ω 中的映射全体. 我们令

$$\prod_{i\in I} \Omega_i = \{\omega \in \Omega^I : \omega(i) \in \Omega_i, \forall i \in I\},$$

称 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 为 $(\Omega_i)_{i\in I}$ 的 **乘积**. 此外，对每个 $i \in I$, 令

$$\pi_i(\omega) = \omega(i), \quad \omega \in \prod_{i\in I} \Omega_i,$$

称 π_i 为 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 到 Ω_i 上的 **投影 (映射)**. 更一般地，设 $\emptyset \neq S \subset I$, 令 π_S 为 $\prod_{i\in I} \Omega_i$ 到 $\prod_{i\in S} \Omega_i$ 上的 **投影 (映射)**, 即令

$$\pi_S(\omega) = (\omega(i), i \in S), \omega \in \prod_{i\in I} \Omega_i,$$

这里 $(\omega(i), i \in S)$ 表示 $\prod_{i\in S}\Omega_i$ 中的一个元素，它在指标 i 处的取值为 $\omega(i)$.

设 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间，则在 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上定义一 σ- 代数如下：

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i = \sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i)).$$

称 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 为 **乘积 σ- 代数**, $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ 为 **乘积可测空间**.

显然，乘积 σ- 代数是使每个投影 π_i 为可测的最小 σ- 代数.

1.3 定理 设 $\emptyset \neq S \subset I$, 则 π_S 为 $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i)$ 到 $(\prod_{i\in S}\Omega_i, \prod_{i\in S}\mathcal{F}_i)$ 上的可测映射.

证 由于 $\prod_{i\in S}\mathcal{F}_i = \sigma(\bigcup_{i\in S}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i))$(这里 π_i^S 表示 $\prod_{i\in S}\Omega_i$ 到 Ω_i 上的投影), 故由第二章命题 1.3 知，只需证

$$\pi_S^{-1}(\bigcup_{i\in S}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i)) \subset \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i.$$

但这由如下等式推得

$$\pi_S^{-1}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{F}_i) = \pi_i^{-1}(\mathcal{F}_i).$$

1.4 定理 令 $\mathcal{P}_0$(相应地，$\mathcal{P}$) 表示 I 的非空有穷 (相应地，至多可数) 子集全体，则有：

(1) **可测矩形** 全体

$$\mathcal{I} = \left\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}A_i) : A_i \in \mathcal{F}_i, i \in S;\ S \in \mathcal{P}_0\right\}$$

为 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上的一半代数，且 $\sigma(\mathcal{I}) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

(2) **可测柱集** 全体

$$\mathcal{Z} = \left\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}\mathcal{F}_i) : S \in \mathcal{P}_0\right\}$$

为 $\prod_{i\in I}\Omega_i$ 上的一代数，且 $\sigma(\mathcal{Z}) = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

(3) $\mathcal{F}=\{\pi_S^{-1}(\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i):S\in\mathcal{P}\}$.

我们将这一定理的证明留给读者完成.

习题

1.5 设 I 为一可数集, $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 为一族可测空间. 若每个 $\mathcal{F}_i$ 可分, 则 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 也可分.

1.6 设 $(\Omega_i\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间, $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{F}_i$ 的子类, $i\in I$. 若对每个 $i\in I,\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i$, 则有 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$.

§2 乘积测度与 Fubini 定理

设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ- 有限测度空间. 本节将在乘积可测空间 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上定义一乘积测度 $\mu\times\nu$, 并讨论关于测度 $\mu\times\nu$ 的积分.

2.1 定义 设 X 及 Y 是两个集合, E 是 $X\times Y$ 的子集. 令

$$E_x=\{y\in Y:(x,y)\in E\},$$
$$E^y=\{x\in X:(x,y)\in E\},$$

分别称 E_x 及 E^y 为 E 在 x 及 y 处的**截口**.

设 $f(x,y)$ 为 $X\times Y$ 上的一函数, 我们将使用如下记号:

$$f_x(y)=f(x,y),\ f^y(x)=f(x,y).$$

2.2 引理 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间.

(1) 若 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则 $\forall x\in X,y\in Y$, 有 $E_x\in\mathcal{B},E^y\in\mathcal{A}$.

(2) 若 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数, 则对一切 $x\in X,y\in Y,f_x$ 为 Y 上的 $\mathcal{B}$- 可测函数, f^y 为 X 上的 $\mathcal{A}$- 可测函数.

证 (1) 令 $\mathcal{C}=\{A\times B:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$. 则对一切 $E\in\mathcal{C}$, 引理的结论显然成立. 令 $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}:\forall x\in X,y\in Y,E_x\in\mathcal{B},E^y\in\mathcal{A}\}$, 则 $\mathcal{G}$ 为 λ- 类. 由于 $\mathcal{C}$ 为 π- 类, 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 故由单调类定理 (第一章定理 2.2) 知, 对一切 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 引理结论成立.

(2) 容易由第二章定理 2.1 推得.

2.3 引理 令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ- 有限测度空间. 设 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathcal{A}$- 可测, 函数 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 $\mathcal{B}$- 可测.

证 首先设 ν 为有限测度, 令 $\mathcal{C}=\{A\times B: A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$, 令 $\mathcal{G}=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}: x\mapsto\nu(E_x)$为$\mathcal{A}$- 可测$\}$, 则显然有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$(因 $\nu((A\times B)_x)=I_A(x)\nu(B)$), 且 $\mathcal{C}$ 为 λ- 类. 故由单调收敛定理知 $\mathcal{G}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 即 $\mathcal{G}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. 现设 ν 为 σ- 有限测度, 任取 Y 的可数划分 $\{D_n\}$, 使 $D_n\in\mathcal{B},\nu(D_n)<\infty,n\geq1$, 令 $\nu_n(B)=\nu(B\cap D_n),B\in\mathcal{B}$, 则 ν_n 为有限测度, $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$. 于是

$$\nu(E_x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(E_x),\ E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$

从而函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathcal{A}$- 可测, 同理可证函数 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 $\mathcal{B}$- 可测.

2.4 定理 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为两个 σ- 有限测度空间. 则在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上存在唯一的测度 $\mu\times\nu$, 使得

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\mu(B),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}. \tag{2.1}$$

(从而 $\mu\times\nu$ 亦为 σ- 有限.) 此外, 对任何 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 有

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy). \tag{2.2}$$

测度 $\mu\times\nu$ 称为 μ 与 ν 的 **乘积**.

证 由引理 2.3, 我们可在 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上定义如下集函数 λ_1 及 λ_2:

$$\lambda_1(E)=\int_X\mu(E_x)\mu(dx),\qquad E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$
$$\lambda_2(E)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy),\qquad E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B},$$

显然， λ_1 及 λ_2 均为测度，且有

$$\lambda_1(A\times B)=\lambda_2(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}. \tag{2.3}$$

令 $\mathcal{C}=\{A\times B:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$, 则 $\mathcal{C}$ 为半代数 (见定理 1.4). 依假定， μ 及 ν 为 σ- 有限测度，故满足 (2.1) 的测度在 $\mathcal{C}$ 上也是 σ- 有限的. 因此，由测度扩张的唯一性 (见第一章定理 4.7) 知，满足 (2.1) 的测度是唯一的. 特别，我们有 $\lambda_1=\lambda_2$, 令 $\mu\times\nu=\lambda_1=\lambda_2$, 即有 (2.2). 证毕.

下面我们研究关于乘积测度的积分.

2.5 定理 令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ- 有限测度空间， f 为 $X\times Y$ 上的非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{G}$- 可测函数. 则函数 $x\mapsto\int_Y f_x d\nu$ 为 $\mathcal{A}$- 可测， $y\mapsto\int_X f^y d\mu$ 为 $\mathcal{B}$ - 可测，且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_Y(\int_X f^y d\mu)\nu(dy)=\int_X(\int_Y f_x d\nu)\mu(dx). \tag{2.4}$$

证 不妨假定 μ 及 ν 均为有限测度. 令 $\mathcal{C}=\{A\times B:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$. 由定理 2.4 知： $\mathcal{C}$ 中集合的示性函数满足定理的结论. 故由第二章定理 2.1 知：对一切有界的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数 f, 定理的结论成立. 因此，对一切非负 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数 f, 定理结论亦成立.

2.6 系 在定理 2.5 的假设下，若 f 是一非负可积函数，则 $\mu\{x:\nu(f_x)=\infty\}=\nu\{y:\mu(f^y)=\infty\}=0$.

证 直接由 (2.4) 看出.

下一定理称为 **Fubini 定理**. 它使我们可以用叠积分来表达关于乘积测度的积分.

2.7 定理 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ- 有限测度空间， f 为 $X\times Y$ 上一 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数. 若 f 关于 $\mu\times\nu$ 可积 (相应地，积分存在), 则有下列结论：

(1) 对 μ-a.e. x,f_x 为 ν- 可积 (相应地，关于 ν 积分存在); 对 ν- a.e. y,f^y 为 μ- 可积 (相应地，关于 μ 积分存在).

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x d\nu, & \text{若} f_x \text{为} \nu\text{- 可积 (相应地，积分存在)},\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}$$

$$I^f(y)=\begin{cases}\int_X f^y d\mu, & \text{若} f^y \text{为} \mu\text{- 可积 (相应地，积分存在)},\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}$$

则 I_f 为 μ- 可积 (相应地，积分存在), I^f 为 ν- 可积 (相应地，积分存在). 且有

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu)=\int_X I_f(x)\mu(dx)=\int_Y I^f(y)\nu(dy). \tag{2.5}$$

证 首先设 f 为非负且为 $\mu\times\nu$- 可积. 则由系 2.6 知结论 (1) 成立，且有

$$I_f(x)=\nu(f_x),\quad \mu\text{-a.e. } x,$$
$$I^f(y)=\mu(f^y),\quad \nu\text{-a.e. } y.$$

于是结论 (2) 由 (2.4) 推得. 对一般 f, 分别考虑 f^+ 及 f^-, 即得定理结论.

注 由于 $\nu(f_x)$ 是 μ-a.e. 有定义的， $\mu(f^y)$ 是 ν-a.e. 有定义的，所以通常也将 (2.5) 写成 (2.4) 的形式.

Fubini 定理有很多的应用. 我们将通过下面的习题向读者介绍一些应用的例子.

习题

2.8 设 $\mathbb{R}$ 为实直线，试证 $\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. (注意：对一般拓扑空间 X, 不一定有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X\times X)$, 一般只有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{B}(X\times X)$, 参见第五章引理 6.4.)

2.9 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ- 有限测度空间， $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则下列条件等价：

(1) $(\mu\times\nu)(E)=0$;

(2) $\mu(E^y)=0$, ν-a.e. y;

(3) $\nu(E_x)=0$, μ-a.e. x.

2.10 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间，μ_1 及 ν_1 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度，μ_2 及 ν_2 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的 σ- 有限测度. 若 $\nu_1 \ll \mu_1$ 且 $\nu_2 \ll \mu_2$, 则 $\nu_1\times\nu_2 \ll \mu_1\times\mu_2$, 且有

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}(x,y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y),\quad \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}.$$

2.11 设 $\sum_{m,n}a_{m,n}$ 为绝对收敛的双重级数. 试用 Fubini 定理证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}.$$

2.12 试用 Fubini 定理证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx=1$.(提示：考虑 $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$, 并令 $r^2=x^2+y^2$.)

2.13 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为 σ- 有限测度空间，f 为 X 上的一非负 $\mathcal{A}$- 可测函数. 试证

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^{\infty}\mu([f>y])dy.$$

(提示：设 λ 为 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的 Lebesgue 测度，令

$$E=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}:\ 0\le y<f(x)\},$$

则 $\lambda(E_x)=f(x)$.)

2.14 设 $f(t)$ 及 $g(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上的两个右连续增函数. 我们用 μ_f 及 μ_g 分别表示它们在 $[0,\infty)$ 上诱导出的测度 (见第一章定理 5.4). 试证：对 $0\le a<b<\infty$, 有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds),$$

其中 $g(s-) = \lim_{t\uparrow\uparrow s} g(t)$(记号 $t \uparrow\uparrow s$ 表示 $t \to s$，且 $t < s$).(提示：将 $(a,b] \times (a,b]$ 表为 $\{(x,y) : a < x \le y \le b\} \cup \{(x,y) : a < y < x \le b\}$ 并分别计算它们的 $\mu_f \times \mu_g$ 测度.)

2.15 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, 则有下列结论：

(1) $(x,t) \mapsto f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- 可测，且 Lebesgue 可积；

(2) 对 a.e. $x, t \mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

定义 f 与 g 的 **卷积** 如下： $\forall x \in \mathbb{R}$, 令

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, & \text{可积情形}, \\ 0, & \text{其它情形}, \end{cases}$$

则 $f*g \in L^p(\mathbb{R})$, 且有如下的 **Young 不等式**: $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$. (提示：对 $1 \le p \le \infty$ 情形，利用 Hölder 不等式及 Fubini 定理.)

(3) 若 g 有界，则 $f * g$ 连续. (提示：利用第三章习题 4.24.)

2.16 (Steinhaus 引理) 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的一 Borel 子集, 令 $D(E) = \{x-y : x, y \in E\}$, 若 E 的 Lebesgue 测度 $\lambda(E) > 0$, 则 $D(E)$ 包含一含原点的开区间. (提示：不妨设 $\lambda(E) < \infty$, 以 $x+E$ 表示 $\{x+y : y \in E\}$, 以 $-E$ 表示 $\{-x : x \in E\}$. 令 $F(x) = \lambda(E \cap (x+E))$, 则 $F(x) = I_{-E} * I_E(x)$. 由 2.15(3) 知 $F(x)$ 连续，又依假定 $F(0) > 0$.)

2.17 (Steinhaus 引理的推广) 设 A, B 为 $\mathbb{R}$ 的两个 Borel 子集，令 $D(A,B) = \{y-z : y \in A, z \in B\}$, 若 $\lambda(A) > 0$, 且 $\lambda(B) > 0$, 则 $D(A,B)$ 包含一非空开区间. (提示：不妨设 $\lambda(A) < \infty, \lambda(B) < \infty$, 令 $F(x) = \lambda(A \cap (x+B))$, 则 $F(x) = I_{-A} * I_B(x)$, 且由 Fubini 定理知 $\int F(x)\lambda(dx) = \lambda(A)\lambda(B)$. 于是存在某 x, 使 $F(x) > 0$.)

2.18 设 $f(x,y)$ 为定义于 $V = (a,b) \times (c,d)$ 上的一实值连续函数. 如果 f 满足下列条件：

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 V 上存在且连续；

(2) 对某个 $x_0 \in (a,b)$, $\dfrac{d}{dy}[f(x_0,y)]$ 对一切 $y \in (c,d)$ 存在；

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在 V 上存在且连续，

则 $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 V 上存在，且有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.(提示：任取 $y_0 \in (c,d)$, 由 Fubini 定理得

$$f(\overline{x},\overline{y}) - f(x_0,\overline{y}) - f(\overline{x},y_0) + f(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy,$$

其中对每个 $\overline{x} \in (a,b)$, $\int_{x_0}^{\overline{x}} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx$ 为 y 的连续函数.)

§3 由 σ- 有限核产生的测度

本节将推广 §2 的结果.

3.1 定义 令 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为两个可测空间. 一函数 $K: X\times\mathcal{B} \longrightarrow [0,\infty]$ 称为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 **核**(kernel), 如果它满足下列二条件：

(1) $\forall x \in X$, $K(x,\cdot)$ 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的测度；

(2) $\forall B \in \mathcal{B}$, $K(\cdot,B)$ 为 X 上的 $\mathcal{A}$- 可测函数.

称 K 为 **有限核**, 如果 $\forall x \in X$, $K(x,Y) < \infty$; 称 K 为 **概率核**, 如果 $\forall x \in X$, $K(x,Y) = 1$; 称 K 为 **σ-有限的**, 如果存在 Y 的一个可数划分 $Y = \sum_n B_n$, 使得 $B_n \in \mathcal{B}, n \geq 1$, 且对一切 $x \in X$ 及 $n \geq 1$, 有 $K(x,B_n) < \infty$.

3.2 命题 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个核，μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的一测度，f 为 Y 上的一非负 $\mathcal{B}$- 可测函数.

(1) 令 $\nu(B) = \int_X K(x,B)\mu(dx)$, $B \in \mathcal{B}$, 则 ν 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的一测度；

(2) $x \mapsto \int_Y f(y)K(x,dy)$ 为 X 上的一 $\mathcal{A}$- 可测函数；

(3) 我们有

$$\int f(y)\nu(dy) = \int \Big[\int f(y)K(x,dy)\Big]\mu(dx). \tag{3.1}$$

证 (1) 显然. 为证 (2) 及 (3), 首先考虑非负简单可测函数 f, 然后利用第二章定理 1.8(2).

下一定理推广了定理 2.4.

3.3 定理 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核, μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的一测度.

(1) 令 $N(x,E)=K(x,E_x), E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则 N 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核.

(2) 令

$$\mu K(E)=\int_X K(x,E_x)\mu(dx),\ E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}, \tag{3.2}$$

则 μK 为 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 上的一测度, 且有

$$\mu K(A\times B)=\int_A K(x,B)\mu(dx),\ A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}. \tag{3.3}$$

(3) 若 μ 为 σ- 有限测度, 则 μK 亦为 σ- 有限测度, 且它是 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上唯一满足 (3.3) 的测度.

证 (1) 首先, 对任何 $x\in X, N(x,\cdot)$ 显然是 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ 上的测度. 令 $\{B_n,n\geq 1\}$ 为 Y 的一可数划分, 使得 $B_n\in\mathcal{B},n\geq 1$, 且对一切 $x\in X$, 及 $n\geq 1$, 有 $K(x,B_n)<\infty$. 令

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}_n=B_n\cap\mathcal{B},\quad \mathcal{C}_n=\{A\times C: A\in\mathcal{A},C\in\mathcal{B}_n\},\\&\mathcal{G}_n=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n:\ N(\cdot,E)\ 为\ \mathcal{A}\text{- 可测}\},\end{aligned}$$

则 $\mathcal{C}_n$ 为 $X\times B_n$ 上的 π- 类, 且生成 σ- 代数 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$. 显然 $\mathcal{G}_n$ 为 $X\times B_n$ 上的 λ- 类, 且 $\mathcal{G}_n\supset\mathcal{C}_n$, 故由单调类定理知 $\mathcal{G}_n=\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$. 现设 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 令 $E_n=E\cap(X\times B_n)$, 则易知 $E_n\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}_n$, 且 $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$. 于是我们有

$$N(x,E)=\sum_n N(x,E_n),\ x\in X,$$

从而 $N(\cdot,E)$ 为 $\mathcal{A}$- 可测函数. 此外, 我们有 $N(x,X\times B_n)=K(x,B_n)<\infty$, 因此 N 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(X\times Y,\mathcal{A},\times\mathcal{B})$ 的 σ- 有限核.

(2) 显然. 往证 (3). 设 μ 为 σ- 有限测度, 令 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为 X 的一可数划分, 使得 $A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty, n \geq 1$. 令 $\{B_n\}$ 如在 (1) 的证明中所取的 Y 的划分, 再令

$$A_{m,k,l} = [l-1 \leq K(\cdot, B_k) < l] \cap A_m, \quad m,k,l \geq 1,$$

则对一切 $k \geq 1$, 我们有 $\sum_{m,l} A_{m,k,l} = X$, 且有

$$\mu K(A_{m,k,l} \times B_k) = \int_{A_{m,k,l}} K(x, B_k)\mu(dx) < \infty.$$

由于 $\sum_{m,k,l} A_{m,k,l} \times B_k = X \times Y$, 故 μK 限于半代数 $\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ 为 σ- 有限. 因此, 由第一章定理 4.7 知, 满足 (3.3) 的测度 μK 是唯一的. 证毕.

下一定理推广了定理 2.5.

3.4 定理 设 K 为从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(Y, \mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核, μ 为 $(X, \mathcal{A})$ 上的一 σ- 有限测度, f 为 $X \times Y$ 上的一非负 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$- 可测函数, 则

(1) $x \mapsto \int_Y f(x,y)K(x,dy)$ 为 $\mathcal{A}$- 可测函数;

(2) 我们有

$$\int_{X \times Y} f d(\mu K) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)K(x,dy)\right]\mu(dx). \qquad (3.4)$$

证 (1) 令 $\mathcal{C} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, 不妨假定 μ 为有限测度, 且对一切 $x \in X, K(x, \cdot)$ 也为有限测度 (否则, 分别取 X 及 Y 的可数划分 $\{A_n\}$ 及 $\{B_n\}$, 使得 $\forall x \in X, n \geq 1$ 有 $K(x, B_n) < \infty, \mu(A_n) < \infty$, 并在每个 $A_n \times B_m$ 上考虑问题). 由命题 3.2 及 (3.3) 式易知: 对 $\mathcal{C}$ 中集合的示性函数定理的结论成立. 故由第二章定理 2.1 知: 对一切有界的 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$- 可测函数 f 结论成立. 最后, 由积分的单调收敛定理推知: 对一切非负 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$- 可测函数 f 结论成立. 证毕.

习题

3.5 (Fubini 定理的推广形式) 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核， μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度， μK 为 (3.2) 定义的测度．若 f 为 $X\times Y$ 上一 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数，它关于 μK 可积 (相应地，积分存在)，则有下列结论:

(1) 对 μ-a.e. x,f_x 关于 $K(x,\cdot)$ 可积 (相应地，积分存在);

(2) $\forall x\in X$，令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x(y)K(x,dy), & \text{可积 (相应地，积分存在) 情形,}\\ 0, & \text{其它情形,}\end{cases}$$

则 I_f 为 μ- 可积 (相应地，积分存在)，且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu K)=\int_X I_f(x)\mu(dx).$$

3.6 设 $(X_j,\mathcal{A}_j),j=1,\cdots,n$ 为可测空间， μ_1 为 $(X_1,\mathcal{A}_1)$ 上的一 σ- 有限测度．对每个 $2\le i\le n$，设 $K(x_1,\cdots,x_{i-1},dx_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1}X_j,\prod_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_i)$ 到 $(X_i,\mathcal{A}_i)$ 的一个 σ- 有限核．

(1) 在 $(\prod_{j=1}^{n}X_j,\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j)$ 上存在唯一的测度 μ，使得对一切可测矩形 $\prod_{j=1}^{n}A_j\in\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j$ 有

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}A_j)=\int_{A_1}\mu_1(dx_1)\cdots\int_{A_n}K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

此外， μ 是 σ- 有限测度．

(2) 设 f 为 $(\prod_{j=1}^{n}X_j,\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j)$ 上的非负可测函数，则有

$$\int fd\mu=\int_{X_1}\mu_1(dx_1)\int_{X_2}K(x_1,dx_2)\cdots\int_{X_{n-1}}K(x_1,\cdots,x_{n-2}dx_{n-1})$$

$$\cdot\int_{X_n}f(x_1,\cdots,x_n)K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

3.7 设 K_1, K_2 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的 σ- 有限核， μ_1,μ_2 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的测度. 为要 μ_1K_1 关于 μ_2K_2 绝对连续，必须且只需 μ_1 关于 μ_2 绝对连续，且对 μ_1-a.e.$x\in X$, $K_1(x,\cdot)$ 关于 $K_2(x,\cdot)$ 绝对连续. 此外，这时有

$$\frac{d(\mu_1K_1)}{d(\mu_2K_2)}(x,y)=\frac{dK_1(x,\cdot)}{dK_2(x,\cdot)}(y)\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x).$$

§4 无穷乘积空间上的概率测度

在概率论中，我们经常要讨论任意有限多个试验 (不一定相互独立). 为了能在同一概率空间中考虑它们，我们需要在无穷乘积可测空间上构造概率测度. 下一定理解决了这一问题.

4.1 定理 (Tulcea 定理) 令 $(\Omega_j,\mathcal{F}_j), j=1,2,\cdots$ 为一列可测空间， $\Omega=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j, \mathcal{F}=\prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{F}_j, P_1$ 为 $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ 上的一概率测度. 对每个 $i\geq 2$, 设 $P(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},d\omega_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1}\Omega_i,\prod_{j=1}^{i-1}\mathcal{F}_j)$ 到 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$ 的一个概率核. 则存在 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上唯一的概率测度 P, 使得对一切 $n\geq 1$, 有

$$P(B^n\times\prod_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j)=P_n(B^n),\quad B^n\in\prod_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j, \tag{4.1}$$

其中 P_n 为 $\prod_{j=1}^{n}\mathcal{F}_j$ 上如下定义的概率测度 (见习题 3.6):

$$P_n(B^n)=\int_{\Omega_1}P(d\omega_1)\int_{\Omega_2}P(\omega_1,d\omega_2)\cdots\int_{\Omega_{n-1}}P(\omega_1,\cdots,\omega_{n-2},d\omega_{n-1})$$

$$\cdot\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1,\cdots,\omega_n)P(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1},d\omega_n).$$

证 设 $n>m$ 为两个自然数，则显然有

$$P_n(B^m\times\prod_{j=m+1}^{n}\Omega_j)=P_m(B^m),$$

于是按 (4.1) 可在可测柱集全体 $\mathcal{Z}$ 上唯一定义一集函数 P. 令 $\mathcal{F}^n = \{B^n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j : B^n \in \prod_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j\}$, 则 $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}^{n+1}$, 且 $\bigcup_n \mathcal{F}^n = \mathcal{Z}$. 由于 P 限于每个 $\mathcal{F}^n$ 为概率测度, 故 P 在代数 $\mathcal{Z}$ 上是有限可加的. 往证 P 为 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度, 为此只需证 P 在空集 $\emptyset$ 处连续. 我们用反证法. 假定有 $A_n \in \mathcal{Z}, n \geq 1, A_n \downarrow \emptyset$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) > 0$. 必要时在序列 (A_n) 首项前添加若干项 Ω, 且在两个集 A_n 及 A_{n+1} 之间适当重复若干项 A_n, 我们可以进一步假定 $A_n \in \mathcal{F}^n$. 因此有 $A_n = B^n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j$. 由于 $A_{n+1} \subset A_n$, 我们有 $B^{n+1} \subset B^n \times \Omega_{n+1}$. 此外, 对每个 $n > 1$,

$$P(A_n) = \int_{\Omega_1} g_n^{(1)}(\omega_1) P_1(d\omega_1),$$

其中

$$g_n^{(1)}(\omega_2) = \int_{\Omega_2} P(\omega_1, d\omega_2) \cdots \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1, \cdots \omega_n) P(\omega_1, \cdots, d\omega_n).$$

由于 $I_{B^{n+1}}(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1}) \leq I_{B^n}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$, 故对固定 ω_1,$g_n^{(1)}(\omega_1)$ 单调下降趋于某极限 $h(\omega_1)$. 由控制收敛定理, 我们有

$$\int_{\Omega_1} h_1(\omega_1) P_1(d\omega_1) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) > 0.$$

于是存在 $\omega_1' \in \Omega_1$, 使 $h_1(\omega_1') > 0$. 实际上, 必有 $\omega_1' \in B^1$. 否则, 对一切 $n > 1$ 有 $I_{B^n}(\omega_1', \omega_1, \cdots, \omega_n) = 0$, 从而 $g_n^{(1)}(\omega_1') = 0$, 这导致 $h_1(\omega_1') = 0$.

现设 $n > 2$, 则

$$g_n^{(1)}(\omega_1') = \int g_n^{(2)}(\omega_2) P(\omega_1', d\omega_2),$$

其中

$$g_n^{(2)}(\omega_2) = \int_{\Omega_3} P(\omega_1', \omega_2, d\omega_3) \cdots \int_{\Omega_n} I_{B^n}(\omega_1', \omega_2, \cdots, \omega_n) \cdot P(\omega_1', \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}, d\omega_n).$$

如上所证，可知 $g_n^{(2)}(\omega_i) \downarrow h_2(\omega_2)$. 由于 $g_n^{(1)}(\omega_1') \to h_1(\omega') > 0$, 故存在 $\omega_2' \in \Omega_2$, 使 $h_2(\omega_2') > 0$. 如上所证，可知 $(\omega_1', \omega_2') \in B^2$.

最后，由归纳法可得到一点列 $\{\omega_1', \omega_2', \cdots\}$, 使得 $\omega_j' \in \Omega_j$ 且 $(\omega_1', \cdots, \omega_n') \in B^n$. 因此最终有 $(\omega_1', \omega_2', \cdots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 这导致矛盾. 这样，我们证明了 P 为代数 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度. 由测度扩张定理知，它可唯一地扩张成为 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z})$ 上的概率测度. 证毕.

4.2 系 (Kolmogrov 定理) 设 $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$ 为一列概率空间，令 $\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \mathcal{F} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$, 则存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度 P, 使得对一切 $n \geq 1$, 对一切 $A_j \in \mathcal{F}_j, 1 \leq j \leq n$, 有

$$P(\prod_{j=1}^{n} A_j \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \Omega_j) = \prod_{j=1}^{n} P_j(A_j). \tag{4.2}$$

习题

4.3 设 $\{(\Omega, \mathcal{F}_i, P_i), i \in I\}$ 为一族概率空间，令 $\mathcal{P}_0(I)$ 表示 I 的非空有限子集全体，则在 $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得对任何 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P(\prod_{i \in S} A_i \times \prod_{i \in I \setminus S} \Omega_i) = \prod_{i \in S} P_i(A_i), \ A_i \in \mathcal{F}_i, i \in S.$$

(提示：利用定理 1.4(3).)

4.4 试将定理 4.1 推广到任意无穷多个可测空间乘积情形.

第五章 Hausdorff 空间上的测度与积分

§1 拓扑空间

本节介绍拓扑空间的一些基本概念和结果，这是为本章其余各节作准备的. 这里我们已假定读者熟悉有关距离空间的概念和基本结果.

1.1 设 X 为一非空集合，$\mathcal{G}$ 为 X 的一子集族. 如果 $X,\emptyset\in\mathcal{G}$，且 $\mathcal{G}$ 对有限交及任意并运算封闭，则称 $\mathcal{G}$ 为 X 的一个 **拓扑**, 称序偶 $(X,\mathcal{G})$ 为 **拓扑空间**. 当拓扑 $\mathcal{G}$ 自明或无需指出时，直接称 X 为拓扑空间. $\mathcal{G}$ 中的元素称为 **开集**. 设 F 为 X 的一子集，若其补集 F^c 为开集，则称 F 为 **闭集**. 我们用 $\mathcal{F}$ 表示 X 中的闭集全体，则 $\mathcal{F}$ 对有限并及任意交运算封闭.

1.2 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{G}$ 的子类，如果 $\mathcal{G}$ 中每一元素都是 $\mathcal{B}$ 中某些元素的并，则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的 **基**. 若集类 $\mathcal{D}$ 中元素的有限交全体 $\mathcal{D}_{\cap f}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的基，则称 $\mathcal{D}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的 **子基**.

1.3 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，Y 为 X 的一子集，令 $\mathcal{G}_Y=\{G\cap Y: G\in\mathcal{G}\}$, 则 $\mathcal{G}_Y$ 为 Y 的一个拓扑, 我们称 $(Y,\mathcal{G}_Y)$ 为 $(X,\mathcal{G})$ 的 (拓扑)**子空间**, 称拓扑 $\mathcal{G}_Y$ 为由拓扑 $\mathcal{G}$ 在 Y 上 **诱导出的拓扑**.

1.4 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，$x\in V\subset X$. 称 V 为 x 的一个 **邻域**, 如果存在 $U\in\mathcal{G}$, 使 $x\in U\subset V$; 称 V 为 x 的一个 **开邻域**, 如果 $V\in\mathcal{G}$.

1.5 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，A 为 X 的一子集，称包含 A 的最小闭集为 A 的 **闭包**, 并以 $\overline{A}$ 记之；称含于 A 的最大开集为 A 的 **内部**, 并以 $\mathring{A}$ 记之. 令 $\partial A=\overline{A}\setminus\mathring{A}$, 称 ∂A 为 A 的 **边界**.

1.6 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间，点 $x\in X$ 的所有邻域构成的

集类称为点 x 的 **邻域系**, 记为 $\mathcal{U}_x$. 设 $\mathcal{V}_x$ 为 $\mathcal{U}_x$ 的子类, 如果对每一 $U \in \mathcal{U}_x$, 存在 $V \in \mathcal{V}_x$, 使 $V \subset U$, 则称 $\mathcal{V}_x$ 为点 x 的 **邻域系的基**(或 **局部基**).

1.7 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, A 为 X 的一子集. 如果 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中 **稠密**. 若 X 有可数稠子集, 则称 X 为 **可分 (拓扑) 空间**.

1.8 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, 若 X 中的每个点有可数局部基, 则称 X 满足 **第一可数性公理**. 若 X 本身有可数基, 则称 X 具 **可数基空间** 或满足 **第二可数性公理**. 显然: 满足第二可数性公理的空间必满足第一可数性公理且为可分空间.

1.9 设 $\mathcal{A}$ 为 X 上一集类, B 为 X 的一子集. 如果 $B \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 B 的一个 **覆盖**. 若 $\mathcal{A}$ 为可数或有限类, 分别称 $\mathcal{A}$ 为 B 的可数或有限覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 是 B 的覆盖, $\mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}$ 的子类且也是 B 的覆盖, 则称 $\mathcal{A}_1$ 为 $\mathcal{A}$ 的 (关于 B 的)**子覆盖**.

1.10 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, 如果 X 的每一开覆盖都有有限 (相应地, 可数) 子覆盖, 则称 X 为 **紧空间**(相应地, **Lindelöf 空间**). 如果 X 的子集 K 的每一开覆盖都有有限子覆盖, 则称集 K 为 **紧集**. 如果 X 的每个点有一紧邻域, 则称 X 为 **局部紧空间**. 如果 X 可表为紧集的可数并, 则称 X 为 **σ- 紧空间**.

1.11 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, 令 Δ 为任一不属于 X 的元素, 令 $X^\Delta = X \cup \{\Delta\}$, 令 $\mathcal{G}^\Delta = \mathcal{G} \cup \mathcal{G}_1$, 其中

$$\mathcal{G}_1 = \{E \subset X^\Delta : X^\Delta \backslash E \text{ 为} X \text{ 的紧闭集}\},$$

则 $(X^\Delta,\mathcal{G}^\Delta)$ 为紧拓扑空间, $(X,\mathcal{G})$ 为其子空间. 我们称 $(X^\Delta,\mathcal{G}^\Delta)$ 为 $(X,\mathcal{G})$ 的 **单点紧化**.

注意: 紧空间中的闭集必为紧集. 但在一般拓扑空间中, 紧集未必是闭集.

1.12 设 $(X,\mathcal{G})$ 为一拓扑空间, 如果 X 的任意两个不同的点 x 及 y 都可以用两个不交开集 U 及 V 分离 (即 $x \in U, y \in V$, 且 $U \cap V = \emptyset$), 则称 X 为 **Hausdorff 空间**. 在一 Hausdorff 空间中,

紧集必为闭集，单点集必为紧集 (后一结论对一般拓扑空间也成立).

如果 X 是 Hausdorff 空间，且任意两个不交闭集可用两个不交开集分离，则称 X 为 **正规空间**.

Hausdorff 空间亦称为 T_2-型空间, 正规空间亦称为 $\mathbf{T}_4$-**型空间**.

1.13 设 $(X,\mathcal{G})$ 及 $(Y,\mathcal{H})$ 为两个拓扑空间， $f: X \to Y$ 为从 X 到 Y 的一映射，若 $f^{-1}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$(即开集的原象为开集), 则称 f 为 **连续映射**.

若 $x \in X$, 且 $f(x)$ 在 Y 中的任意邻域 W 的原象 $f^{-1}(W)$ 为 x 在 X 中的邻域，则称 f **在点** x **处连续**.

设 $f: X \to Y$ 为 X 到 Y 上的一对一映射，且 f 及 f^{-1} 都是连续映射，则称 f 为从 X 到 Y 上的 **同胚映射**.

如果在两个拓扑空间中存在同胚映射，则称这两个拓扑空间**同胚**.

1.14 设 f 为拓扑空间 X 上的实值函数. 称集合 $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ 的闭包为 f 的 **支撑**, 记为 $\mathrm{supp}(f)$. 若 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集，则称 f 为 **具紧支撑的**.

1.15 为方便起见, 我们引入下列记号: 设 X 为一拓扑空间，我们分别用 $\mathcal{G}$ 、 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{K}$ 表示 X 中的全体开集、全体闭集及全体紧集所成的集类. 我们用 $\mathcal{G}_\delta$ 表示 $\mathcal{G}$ 中元素的可列交全体，用 $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{K}_\sigma)$ 表示 $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ 中元素的可列并全体. $\mathcal{G}_\delta$ 中的元称为 $\mathcal{G}_\delta$- 集， $\mathcal{F}_\sigma$ 中的元称为 $\mathcal{F}_\sigma$- 集， $\mathcal{K}_\sigma$ 中的元称为 $\mathcal{K}_\sigma$- 集 (或称为 σ- 紧集). 此外，我们用 $C(X)$ 、 $C_b(X)$ 及 $C_c(X)$ 分别表示 X 上的连续函数、有界连续函数及具紧支撑的连续函数全体.

1.16 引理 (Urysohn 引理) 设 X 为一正规空间， E 及 F 为 X 的两个不交闭子集. 则存在 X 上的一连续函数 f, 使得 $0 \leq f \leq 1$, 且 f 在 E 上取值为 0, 在 F 上取值为 1.

证 令 D 为区间 (0,1) 中二进小数全体 (即 $D = \{\frac{m}{2^n} : 1 \leq m < 2^n, n = 1,2,\cdots\}$), 由 X 的正规性，存在不交开集 $U_{1/2}$ 及

$V_{1/2}$ 使 $E \subset U_{1/2}, F \subset V_{1/2}$. 由于 $V_{1/2}^c$ 为闭集，且 $U_{1/2} \subset V_{1/2}^c$, 故 $\overline{U}_{1/2} \subset V_{1/2}^c \subset F^c$. 因此我们有 $E \subset U_{1/2} \subset \overline{U}_{1/2} \subset F^c$. 同理，存在开集 $U_{1/4}$ 及 $U_{3/4}$ 使得

$$E \subset U_{1/4} \subset \overline{U}_{1/4} \subset U_{1/2}, \ \overline{U}_{1/2} \subset U_{3/4} \subset \overline{U}_{3/4} \subset F^c.$$

由归纳法知，存在一族开集 $\{U_r\}_{r \in D}$, 使得

$$E \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset F^c, \ r < s, \ r, s \in D.$$

令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \bigcup_r U_r, \\ \inf\{r : x \in U_r\}, & x \in \bigcup_r U_r, \end{cases}$$

则 $0 \le f \le 1$. 显然 f 在 E 上为 0, 在 F 上为 1. 往证 f 为连续函数. 设 $0 \le \alpha < 1, 0 < \beta \le 1$, 我们有

$$f^{-1}([0,\beta)) = \bigcup_{r<\beta} U_r,$$

$$f^{-1}((\alpha,1]) = f^{-1}([0,\alpha])^c = (\bigcap_{r>\alpha} U_r)^c = (\bigcap_{r>\alpha} \overline{U}_r)^c.$$

这表明 $f^{-1}([0,\beta))$ 及 $f^{-1}((\alpha,1])$ 为开集，从而对 $0 < \alpha < \beta < 1$, $f^{-1}((\alpha,\beta))$ 也为开集. 但 $[0,\beta), (\alpha,1]$ 及 (α,β) 这三种类型开集全体构成 $[0,1]$ 的基 (即 $[0,1]$ 作为一拓扑空间，其中开集都可表为这三类开集的并), 故 f 为连续函数. 证毕.

1.17 定理 (Tietze 扩张定理) 令 X 为一正规空间，E 为 X 的一闭子集，如果 f 为定义于 E 的一有界实值连续函数 (E 按 X 诱导出的拓扑为一拓扑空间), 则存在 X 上的有界连续函数 g, 使 g 在 E 上的限制为 f, 且使 $\sup_{x \in X} |g(x)| = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

证 不妨假定 $\sup |f(x)| = 1$. 令 $E_1 = [f \le -\frac{1}{3}], F_1 = [f \ge \frac{1}{3}]$, 由 Urysohn 引理，可取 X 上的一连续函数 g_1 使得 $-\frac{1}{3} \le g_1 \le \frac{1}{3}$, 且 g_1 在 E_1 上为 $-\frac{1}{3}$, 在 F_1 为 $\frac{1}{3}$. 这时显然有

$$|f(x) - g_1(x)| \le \frac{2}{3}, \ \forall x \in E.$$

依归纳法，可取 X 上的连续函数 $g_2, g_3, \cdots$，使得 $|g_n| \leq 2^{n-1}/3^n$，且有

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)| \leq (\frac{2}{3})^n,\ \forall x \in E.$$

令 $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$，则 g 即为满足定理要求的连续函数. 证毕.

下面我们研究局部紧 Hausdorff 空间的性质.

1.18 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间，K 及 L 为 X 的两个不交紧子集，则存在 X 的两个不交开子集 U 及 V，使得 $K \subset U, L \subset V$.

证 不妨设 K 及 L 皆非空. 首先任意取定某 $x \in K$，则对任何 $y \in L$，存在不交开集 U_y 及 V_y，使 $x \in U_y, y \in V_y$，由于 L 为紧集，故存在 $y_1, \cdots, y_n \in L$，使 $L \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. 令

$$U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i},\quad V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i},$$

则 U_x 和 V_x 为不交开集，且 $x \in U_x, L \subset V_x$. 对每个 $x \in K$，我们可以找到这样的一对开集. 由于 K 是紧集，故存在 $x_1, \cdots, x_m \in K$，使 $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$. 令

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i},\ V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i},$$

则 $K \subset U, L \subset V$，且 U 和 V 为不交开集. 证毕.

作为该引理的一个推论，我们有

1.19 命题 紧 Hausdorff 空间为正规空间.

1.20 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，K 为 X 的紧子集，U 为包含 K 的一开集，则有如下结论：

(1) 存在开集 V，其闭包为紧集，使得

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

(2) 存在一具紧支撑的连续函数 f, 使得 $\mathrm{supp}(f) \subset U$, 且 $I_K \leq f \leq I_U$.

(3) 如果 $K \in \mathcal{G}_\delta$, 则 (2) 中的 f 在 K^c 上可取为 <1.

(4) 存在紧集 K_1 及开集 U_1, 使得 $K_1 \in \mathcal{G}_\delta, U_1$ 为 $\mathcal{G}_\delta$ 中紧集的可列并, 且使 $K \subset U_1 \subset K_1 \subset U$.

证 (1) 设 $x \in K$, 由于 X 的局部紧性, 存在 x 的开邻域 W_x, 其闭包为紧集. 不妨设 $W_x \subset U$, 对紧集 $\{x\}$ 及 $\overline{W}_x \backslash W_x$ 应用引理 1.18, 存在不交开集 V_1 及 V_2, 使 $x \in V_1, \overline{W}_x \backslash W_x \subset V_2$. 令 $V_x = V_1 \cap W_x$. 由于 $\overline{V}_1 \subset V_2^c$, 故易知 $\overline{V}_x \cap U^c = \emptyset$, 即 $\overline{V}_x \subset U$. 显然 $x \in V_x$, 且 $\overline{V}_x$ 为紧集. 由于 K 是紧集, 故存在 $x_1, \cdots, x_n \in K$, 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. 令 $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$, 则 $\overline{V}$ 为紧集, 且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(2) 令 V 为 (1) 中的开集, 作为子空间, $\overline{V}$ 为紧 Hausdorff 空间, 从而为正规空间. 由 Urysohn 引理, 存在 $\overline{V}$ 上的连续函数 g, 使 $0 \leq g \leq 1$, 且 g 在 K 上为 1, 在 $\overline{V} \backslash V$ 为 0. 令

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overline{V}, \\ 0, & x \in X \backslash \overline{V}, \end{cases}$$

则 f 在 $\overline{V}$ 上连续, 在 $X \backslash V$ 上为 0(从而连续). 由于 $\overline{V}$ 及 $X \backslash V$ 为闭集, 且 $\overline{V} \cup (X \backslash V) = X$, 故 f 在 X 上连续. 显然有 $I_K \leq f \leq I_U$, 且 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{V} \subset U$.

(3) 令 V 为 (1) 中的开集, 设 $K \in \mathcal{G}_\delta$, 则存在一列下降开集 $G_n \subset V$, 使得 $\bigcap_n G_n = K$. 由 (2), 存在连续函数 f_n, 使 $0 \leq f_n \leq 1$, 且 f_n 在 K 上为 1, 在 G_n^c 上为 0. 令

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n,$$

则 f 为连续函数, $0 \leq f \leq 1$, 且 f 在 K 上为 1, 在 K^c 上 <1. 此外有 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{V} \subset U$.

(4) 由 (1) 不妨设 $\overline{U}$ 为紧集, 令 f 为 (2) 中的函数, 使得

$0 \leq f \leq 1$, f 在 K 上为 1, 在 V^c 上为 0. 令

$$K_1 = [f \geq \frac{1}{2}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}],$$

$$U_1 = [f > \frac{1}{2}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}],$$

则 K_1 及 U_1 满足 (4) 的要求.

1.21 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间, K 为 X 的一紧子集, U_1 及 U_2 为 X 的开子集, 使得 $K \subset U_1 \cup U_2$, 则存在紧集 K_1 及 K_2, 使得 $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$.

证 令 $L_1 = K \backslash U_1, L_2 = K \backslash U_2$, 则 L_1 和 L_2 为不交紧集. 由引理 1.18, 存在不交开集 V_1 及 V_2, 使 $V_1 \supset L_1, V_2 \supset L_2$. 令 $K_1 = K \backslash V_1, K_2 = K \backslash V_2$, 则易证 K_1 及 K_2 满足引理要求.

1.22 命题 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间, $f \in C_c(X), U_1, \cdots, U_n$ 为 X 的开子集, 使得 $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. 则存在 $C_c(X)$ 中的函数 $f_1, \cdots, f_n$, 使得 $f = f_1 + \cdots + f_n$, 且 $\text{supp}(f_i) \subset U_i, 1 \leq i \leq n$. 进一步, 若 f 非负, 则每个 f_i 也可取为非负.

证 由归纳法, 只需考虑 $n = 2$ 情形. 由引理 1.21, 存在紧集 K_1 及 K_2, 使 $\text{supp}(f) = K_1 \cup K_2, K_1 \subset U_1, K_2 \subset U_2$. 由命题 1.20(2), 存在 $h_1, h_2 \in C_c(X)$, 使得

$$I_{K_i} \leq h_i \leq I_{U_i}, \ \text{supp}(h_i) \subset U_i, \ i = 1, 2.$$

令 $g_1 = h_1, g_2 = h_2 - (h_1 \wedge h_2)$, 则 g_1 及 g_2 非负, 其支撑分别含于 U_1 及 U_2, 且在 $\text{supp}(f)$ 上, $g_1(x) + g_2(x) = h_1(x) \vee h_2(x) = 1$. 最后, 令 $f_i = f g_i, i = 1, 2$, 则 $f = f_1 + f_2, \text{supp}(f_i) \subset U_i, i = 1, 2$. 证毕.

1.23 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $K_1, \cdots, K_n$ 为 X 的不交紧子集, $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 为实数. 则存在一具紧支撑的连续函数 f, 使得

(1) $f(x)=\alpha_i$, 如果 $x\in K_i, i=1,\cdots,n$.

(2) $\|f\|_\infty=\max\{|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|\}$, 其中 $\|f\|_\infty \doteq \sup_{x\in X}|f(x)|$.

证 由引理 1.18 不难用归纳法证明: 存在不交开集 $U_1,\cdots,U_n$, 使 $K_i\subset U_i, 1\le i\le n$. 由命题 1.20(2), 对每个 i, 存在 $f_i\in C_c(X), 0\le f_i\le 1$, 使得 $I_{K_i}\le f_i\le I_{U_i}$. 令 $f=\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$, 则 f 满足命题要求. 证毕.

1.24 系 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, K 及 L 为 X 的两个不交紧子集, 则存在两个不交的 $\mathcal{F}_\sigma$- 开集 U 及 V, 使得 $K\subset U, L\subset V$.

证 由命题 1.23, 存在 $f\in C_c(X)$, 使 $0\le f\le 1$, 且 f 在 K 上为 1, 在 L 上为 0. 令

$$U=\left[f>\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\ge \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]$$

$$V=\left[f<\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\le \frac{1}{2}-\frac{1}{n}]$$

则 U 及 V 为 $\mathcal{F}_\sigma$- 开集, $U\cap V=\emptyset$, 且 $U\supset K, V\supset L$. 证毕.

1.25 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, K 为 X 的一紧子集, $U_1,\cdots,U_n$ 为 X 的开子集, 使得 $K\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$. 如果 $K\in\mathcal{G}_\delta$, 则存在 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集 $K_1,\cdots,K_n$, 使得 $K_i\subset U_i, 1\le i\le n$, 且 $K=\bigcup_{i=1}^n K_i$.

证 由归纳法知, 只需对 $n=2$ 情形证明结论. 令 $L_1=K\backslash U_1, L_2=K\backslash V_2$, 则 L_1 和 L_2 为不相交紧集. 由系 1.24 知, 存在不相交 $\mathcal{F}_\sigma$- 开集 V_1 及 V_2, 使 $V_1\supset L_1, V_2\supset L_2$. 令 $K_1=K\setminus V_1$, $K_2=K\setminus V_2$, 则 K_1 及 K_2 满足引理要求. 证毕.

1.26 定义 设 (X,ρ) 为一距离空间. 令 A 为 X 的一子集. 称 A 为 **有界集**, 如果 $\sup_{x,y\in A}\rho(x,y)<\infty$; 称 A 为 **全有界集**, 如果 $\forall\epsilon>0$, 存在 X 的有穷子集 B, 满足如下条件: $\forall x\in A, \exists y\in B$, 使 $\rho(x,y)<\epsilon$; 称 A 为 **列紧集**, 如果 A 中任一点列在 X 中有一收敛子列. X 中的一点列 (x_n) 称为 **基本列 (Cauchy 列)**, 如果

$\rho(x_n, x_m) \to 0, n, m \to \infty$. 称距离空间 (X, ρ) 为 **完备的**, 如果 X 中的任一基本列皆收敛.

注意：完备性概念不是拓扑概念. 一个完备距离空间可以改赋以一等价距离变成非完备的.

1.27 定理 (Baire 定理) 设为 X 一完备距离空间或局部紧 Hausdorff 空间. 令 (V_n) 为一列在 X 中稠密的开子集, 则其交集也在 X 中稠.

证 我们只对完备距离空间情形证明, 将另一情形的证明留给读者. 任取 X 中一非空开集 B_0, 则存在一半径小于 1 的开球 B_1, 使得 $\overline{B}_1 \subset V_1 \cap B_0$. 由归纳法, 对每个 $n \geq 1$, 存在半径小于 $1/n$ 的开球, 使得 $\overline{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}$. 令 $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n$, B_n 的球心 x_n 构成 X 中的一基本列, 从而收敛于 X 中某一点 x. 显然有 $x \in K$. 但 $K \subset B_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, 于是 B_0 与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 的交非空. 这表明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 在 X 中稠.

习题

1.28 试证：(1) 紧空间中每个闭集为紧集；(2) Hausdorff 空间中的紧集为闭集 (提示：利用引理 1.18);(3) 含于一紧集的闭集为紧集.

1.29 设 X 及 Y 为两个拓扑空间, f 为 X 到 Y 中的连续映射, K 为 X 的紧子集, 则 $f(K)$ 为 Y 的紧子集. 设 X 为一紧空间, Y 为一 Hausdorff 空间, f 为 X 到 Y 上的一对一连续映射, 则 f 为 X 到 Y 上的同胚映射.

1.30 设 X 及 Y 为拓扑空间, 令 $F_1, \cdots, C_n$ 为 X 的闭子集, 使得 $X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. 设 f 为 X 到 Y 中的一个映射, 若 f 限于每个 F_i 为连续, 则 f 在 X 上连续.

1.31(Dini 定理) 令 X 为一紧拓扑空间, f_n 为 X 上的一列非负连续函数, 且 $f_n \downarrow 0$, 则 f_n 一致收敛于 0.

1.32 证明 1.11, 并证明：为要一拓扑空间 X 为紧空间, 必须且只需单点集 $\{\Delta\}$ 是单点紧化 $X \cup \{\Delta\}$ 中的开集.

1.33 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，F 为 X 的一闭子集或开子集，则作为 X 的子空间，F 是局部紧 Hausdorff 空间.

1.34(Lindelöf 定理) 满足第二可数性公理的空间为 Lindelöf 空间.

1.35 设 X 为一距离空间，则为要 X 满足第二可数性公理，必须且只需 X 为可分的.

1.36 Lindelöf 距离空间必为可分空间.

1.37 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间必为 σ- 紧空间.（提示：利用 Lindelöf 定理.）

1.38 设 X 为一 σ- 紧的局部紧 Hausdorff 空间，则存在一列 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集 K_n，使 $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, n \geq 1$，且 $X = \bigcup_n K_n$.(提示：利用命题 1.20(4).)

1.39(Urysonh 嵌入定理) 具可数基的正规 Hausdorff 空间必同胚于 Hilbert 空间 $\mathbb{R}^\infty$ 的某一子空间. 这里 $\mathbb{R}^\infty=\{(x_1, x_2, \cdots), x_i \in \mathbb{R}, i \geq 1, \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$，内积 (x, y) 为：$(x, y) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$.(提示：分以下三个步骤证明定理：1° 设 C 为 X 的可数基 (假定 $\emptyset \notin C$). 令 $\mathcal{A} = \{(U, V) : U, V \in C, \overline{U} \subset V\}$，将 $\mathcal{A}$ 的成员排列为：$(U_1, V_1), (U_2, V_2), \cdots$. 由 Urysohn 引理，对每个 $i \geq 1$ 存在连续映射 $f: X \longrightarrow [0,1]$，使 f_i 在 $\overline{U}$ 上为 0，在 V^c 上为 1. 2° 在 X 上定义映射：$f(x) = \left(f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \frac{1}{3}f_3(x), \cdots\right)$，证明 f 为 X 到 $\mathbb{R}^\infty$ 中的一对一连续映射. 3° 证明对 X 的每一开集 W,$f(W)$ 是 $f(W)$ 的开集.)

1.40 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间 X 必可距离化 (即其拓扑可由一距离引出).(提示：X 的单点紧化 $X \cup \{\Delta\}$ 仍具可数基.)

1.41 证明：距离空间中列紧集是全有界集，完备距离空间中的全有界集为列紧集.

§2 局部紧 Hausdorff 空间上的测度与 Riesz 表现定理

设 X 为一拓扑空间，我们用 $C_c(X)$ 表示 X 上具紧支撑的连续函数全体. 易知 $C_c(X)$ 为一向量格 (见第四章定义 6.1). 本节将用 Daniell 积分研究当 X 为局部紧 Hausdorff 空间时 $C_c(X)$ 上的正线性泛函的积分表示 (即 Riesz 表现定理).

首先，我们研究拓扑空间上由某些集类生成的 σ- 代数及它们之间的关系.

2.1 定义 设 X 为一拓扑空间. 令

$$C_c(X)_+^* = \{f : \exists f_n \in C_c(X)_+, \text{使} f_n \uparrow f\},$$
$$\mathcal{O}_c = \{C \subset X : \ I_C \in C_c(X)_+^*\},$$

称 $\mathcal{O}_c$ 中的元素为 $C_c(X)$-**开集**. 类似定义 $C(X)$- 开集及 $C_b(X)$- 开集.

由第三章引理 5.7(6) 知，我们有 $\sigma(\mathcal{O}_c) = \sigma(C_c(X))$.

当 X 为局部紧 Hausdorff 空间时，下一命题给出了 $C_c(X)$- 开集的一个刻画.

2.2 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间. 则 X 的一子集为 $C_c(X)$- 开集，当且仅当它为 $\mathcal{K}_\sigma$- 开集. 特别，我们有 σ ($\mathcal{K}_\sigma$-开集)$=\sigma(C_c(X))$.

证 设 G 为 $C_c(X)$- 开集. 依定义，存在 $C_c(X)$ 中一列非负函数 f_n 单调上升趋于 I_G. 于是我们有

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n > 0] = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} [f_n \geq \frac{1}{k}] \in \mathcal{K}_\sigma .$$

反之，设 G 为一 $\mathcal{K}_\sigma$- 开集，即 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, 其中每个 K_n 为紧集. 由命题 1.20(2), 对每个 n, 存在 $f_n \in C_c(C), 0 \leq f_n \leq 1$, 使 f_n 在 K_n 上为 1, 且 $\text{supp}(f_n) \subset G$. 令 $g_n = \bigvee_1^n f_i$, 则 $g_n \in C_c(X)$, $g_n \uparrow I_G$, 于是 G 为 $C_c(X)$- 开集. 证毕.

2.3 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则有 $\sigma(C_c(X)) = \sigma(\mathcal{G}_\delta$- 紧集).

证 设 $f \in C_c(X)$, 则对一切 $a \in \mathbb{R}$,

$$[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[f > a - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{G}_\delta,$$

故 $[f \geq a]$ 为 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集, 从而 $\sigma(C_c(X)) \subset \sigma(\mathcal{G}_\delta$- 紧集). 反之, 设 K 为 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集, 则由命题 1.20(3), 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $K = [f = 1]$, 故有 $\sigma(\mathcal{G}_\delta$- 紧集 $) \subset \sigma(C_c(X))$. 证毕.

2.4 定义 设 X 为一拓扑空间, 由全体开集生成的 σ- 代数称为 Borel **σ-代数**, 记为 $\mathcal{B}(X)$.$\mathcal{B}(X)$ 中的元称为 **Borel 集**. 由全体 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集生成的 σ- 代数称为 **强 Baire σ- 代数**, 记为 $\mathcal{B}_a(X)$.$\mathcal{B}_a(X)$ 中的元称为 **强 Baire 集**. 使全体连续函数为可测的最小 σ- 代数称为 **Baire σ- 代数**, 记为 $\mathcal{B}_0(X)$.$\mathcal{B}_0(X)$ 中的元称为 **Baire 集**.

2.5 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则每个强 Baire 紧集为 $\mathcal{G}_\delta$- 集.

证 设 C 为强 Baire 紧集, 由于 $\mathcal{B}_a(X) = \sigma$ ($\mathcal{G}_\delta$- 紧集, 故存在一列 $\mathcal{G}_\delta$- 紧集 (C_n), 使 $C \in \sigma(C_1, C_2, \cdots)$(第一章习题 2.11). 由命题 1.20(3), 对每个 n, 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $0 \leq f_n \leq 1$, 且 $C_n = [f_n = 1]$. 令

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

对每个 $x \in X$, 令 $[x] = \{y \in X : d(x,y) = 0\}$, 则 $[x]$ 是 x 的等价类, 其等价关系是: $x \sim y$ 当且仅当 $d(x,y) = 0$. 令 $\widehat{X}$ 表示等价类全体, 在 $\widehat{X}$ 上定义距离 δ:

$$\delta([x],[y]) = d(x,y),$$

则 $(\widehat{X}, \delta)$ 为距离空间. 令 $\eta(x) = [x]$. 设 $r > 0, E = \{[y] : \delta[y],[x] < r\}$, 则 $\eta^{-1}(E) = \{y : d(y,x) < r\}$ 为 X 中的开集 (因 $d(\cdot,x)$ 为 X

上的连续函数). 由习题 1.27, $\eta(C)$ 为 $\widehat{X}$ 的紧子集. 由于 $\widehat{X}$ 是距离空间, $\eta(C)$ 为 $\widehat{X}$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$- 集, 即 $\eta(C)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\widehat{O}_n$, 其中每个 $\widehat{O}_n$ 为 $\widehat{X}$ 的开子集. 令 $O_n=\eta^{-1}(\widehat{O}_n)$, 则 O_n 为 X 的开子集, 且 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$, 即 C 为 $\mathcal{G}_\delta$- 集. 证毕.

下面我们研究 $C_c(X)$ 上的正线性泛函的积分表示. 为此, 我们先回顾 Daniell 积分的定义 (见第三章定义 5.3). 设 X 为一拓扑空间, $C_c(X)$ 上的一线性泛函 I 称为**正的**, 如果 $f\in C_c(X), f\geq 0\Rightarrow I(f)\geq 0$. $C_c(X)$ 上一正线性泛函 I 称为 Daniell 积分, 如果

$$f_n\in C_c(X),\ f_n\geq 0,\ f_n\downarrow 0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}I(f_n)=0.$$

2.6 引理 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间, I 为 $C_c(X)$ 上的一正线性泛函, 则 I 为 $C_c(X)$ 上的 Daniell 积分.

证 设 $f_n\in C_c(X), f_n\geq 0, f_n\downarrow 0$, 令 $S_1=\mathrm{supp}(f_1)$, 则 $\mathrm{supp}(f_n)\subset S_1$. 由 Dini 定理 (习题 1.31), f_n 在 S_1 上一致趋于 0, 从而在 X 上一致趋于 0. 因此, 对给定 $\epsilon>0$, 存在自然数 N, 使当 $n\geq N$ 时, $f_n(x)<\epsilon$, 对一切 $x\in X$ 成立. 另一方面, 由命题 1.20(2), 存在 $g\in C_c(X), 0\leq g\leq 1$, 使 g 在 S_1 上为 1. 于是当 $n\geq N$, 我们有 $f_n\leq \epsilon g$, 从而有 $I(f_n)\leq \epsilon I(g)$. 由于 $\epsilon>0$ 是任意的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}I(f_n)=0$, 这表明 I 为 $C_c(X)$ 上的 Daniell 积分.

2.7 定义 设 X 为一拓扑空间, A 为一子集. 称 A 为**有界集**, 如果存在一紧集 K, 使 $K\supset A$; 称 A 为 **σ-有界集**, 如果存在一列紧集 (K_n), 使 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$.

下一定理是所谓的 **Riesz 表现定理**.

2.8 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, I 为 $C_c(X)$ 上的一正线性泛函. 则有下列结论:

(1) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的唯一测度 μ_1, 满足如下条件:

(i) $C_c(X)\subset L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu_1)$, 且 $\forall f\in C_c(X)$, 有 $I(f)=\mu_1(f)$;

(ii) 对任意 σ- 有界开集 O, 有

$$\mu_1(O)=\sup\{\mu_1(K):\ K\subset O, K\in\mathcal{K}\},\tag{2.1}$$

对一切 Borel 集 A, 有

$$\mu_1(A) = \inf\{\mu_1(O),\ O \supset A,\ O \text{ 为 } \sigma\text{- 有界开集}\}. \tag{2.2}$$

此外，对任一紧集 K, 有 $\mu_1(K) < \infty$.

(2) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的唯一测度 μ_2, 满足如下条件：

(i)′ $C_c(X) \subset L^1(X\mathcal{B}(X), \mu_2)$, 且 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu_2(f)$;

(ii)′ 对任何开集 O, 有

$$\mu_2(O) = \sup\{\mu_2(K):\ K \subset O,\ K \in \mathcal{K}\}, \tag{2.3}$$

对一切 Borel 集 A, 有

$$\mu_2(A) = \inf\{\mu_2(O):\ O \supset A,\ O \in \mathcal{G}\}. \tag{2.4}$$

此外，对任一紧集 K, 有 $\mu_2(K) < \infty$.

证 我们分别用 $\mathcal{G}_0$ 及 $\mathcal{G}_1$ 表示 $C_c(X)$- 开集及 σ- 有界开集全体. 显然有 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1$, 且 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1$ 对可列并及有限交封闭. 令

$$\mu_1^*(O) = \sup\{I(f):\ f \in C_c(X), 0 \le f \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset O\},\ O \in \mathcal{G}_1,$$

$$\mu_1^*(A) = \inf\{\mu^*(O):\ O \supset A, O \in \mathcal{G}_1\},\ A \subset X.$$

往证 μ_1^* 为 X 上的外测度. 设 $O_i \in \mathcal{G}_1, i = 1, 2, \cdots$. 若 $f \in C_c(X), 0 \le f \le 1$, 且 $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^\infty O_i$, 则存在 n, 使 $\mathrm{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n O_i$. 故由命题 1.22, 存在 $f_i \in C_c(X), 1 \le i \le n$, 使得 $0 \le f_i \le 1, f = f_1 + \cdots + f_n$, 且 $\mathrm{supp}(f_i) \subset O_i$. 因此我们有

$$I(f) = \sum_{i=1}^n I(f_i) \le \sum_{i=1}^n \mu_1^*(O_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu_1^*(O_i).$$

于是有

$$\mu_i^*(\bigcup_{i=1}^\infty O_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu_i^*(O_i).$$

由于 $\mathcal{G}_1$ 对可列并封闭，故由第一章命题 4.3 易知 μ_1^* 为 X 上的外测度.

再证每个 Borel 集为 μ_1^*- 可测集. 为此，只需证每个开集为 μ_1^*- 可测集. 设 V 为一开集，由第一章引理 4.5 知，为证 V 为 μ_1^*- 可测集，只需证：对一切 $O \in \mathcal{G}_1$, 有

$$\mu_1^*(O) \geq \mu_1^*(O \cap V) + \mu_1^*(O \cap V^c). \tag{2.5}$$

下面证明这一事实. 不妨设 $\mu_1^*(O) < \infty$, 从而 $\mu_1^*(O \cap V) < \infty$. 由于 $O \cap V \in \mathcal{G}_1$, 依定义，对给定 $\epsilon > 0$, 存在 $f_1 \in C_c(X), 0 \leq f_1 \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_1) \subset O \cap V$, 使得 $I(f_1) \geq \mu_1^*(O \cap V) - \epsilon$. 令 $K = \mathrm{supp}\,(f_1)$, 则 $O \cap K^c \in \mathcal{G}_1$, 故存在 $f_2 \in C_c(X), 0 \leq f_2 \leq 1, \mathrm{supp}\,(f_2) \subset O \cap K^c$, 使得 $I(f_2) \geq \mu_1^*(O \cap K^c) - \epsilon$. 由于 $O \cap K^c \supset O \cap V^c$, 故 $I(f_2) \geq \mu_1^*(O \cup V^c) - \epsilon$. 令 $f = f_1 + f_2$, 则 $f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1$, 且 $\mathrm{supp}(f) \subset O$. 因此有

$$\mu_1^*(O) \geq I(f) = I(f_1) + I(f_2) \geq \mu_1^*(O \cap V) + \mu_1^*(O \cap V^c) - 2\epsilon,$$

不等式 (2.5) 得证.

现令 μ_1 为 μ_1^* 在 $\mathcal{B}(X)$ 上的限制，往证 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu_1(f)$. 首先，由 Daniell-Stone 定理 (第三章定理 5.8) 知，存在 $\sigma(C_c(X))$ 上的测度 μ, 使对一切 $f \in C_c(X)$, 有 $I(f) = \mu(f)$. 下面先证对一切 $C_c(X)$- 开集 O , 有 $\mu(O) = \mu_1(O)$. 设 O 是 $C_c(X)$- 开集，则存在 $f_n \in C_c(X), n \geq 1$, 使 $O \leq f_n \uparrow I_O$, 于是 $K_n \triangleq [f_n \geq \frac{1}{n}] \uparrow O, K_n$ 为紧集. 由命题 1.20(2), 存在 $g_n \in C_c(X)$, 使 $I_{K_n} \leq g_n \leq I_O$, 且 $\mathrm{supp}(g_n) \subset O$. 由于 $O \in \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1$, 于是有

$$\mu(O) = \sup_n \mu(K_n) \leq \sup_n \mu(g_n) = \sup_n I(g_n) \leq \mu_1^*(O) = \mu_1(O).$$

另一方面，由 μ_1^* 的定义易知 $\mu_1^*(O) \leq \mu(O)$, 故 $\mu(O) = \mu_1(O)$. 现设 $f \in C_c(X)_+$, 令

$$f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I_{[\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}]} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} I_{[f > \frac{k}{2^n}]},$$

则 $f_n \uparrow f$, 且 $[f > \frac{k}{2^n}]$ 为 $C_c(X)$- 开集，于是我们有

$$I(f) = \mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu([f > \frac{k}{2^n}])$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1([f > \frac{k}{2^n}] = \lim_{n\to\infty} \mu_1(f_n) = \mu_1(f).$$

现在证明 (2.1). 设 $O \in \mathcal{G}_1$, 令 $f \in C_c(X), 0 \le f \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset O$, 则 $I(f) = \mu_1(f) \le \mu_1(\mathrm{supp}(f))$, 故 (2.1) 得证.

下面证明满足条件 (i) 及 (ii) 的测度唯一性. 设另有测度 ν 满足 (i) 及 (ii), 则 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $\nu(f) = I(f) = \mu_1(f)$. 设 $O \in \mathcal{G}_1$, 则对任何紧集 $K \subset O$, 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \le f \le I_O$, $\mathrm{supp}(f) \subset O$. 故有

$$\begin{aligned}
\nu(O) &= \sup\{\nu(K) : K \subset O, K \in \mathcal{K}\} \\
&\le \sup\{\nu(f) : f \in C_c(X), 0 \le f \le 1,\ \mathrm{supp}(f) \subset O\} \\
&= \sup\{I(f) : f \in C_c(X), 0 \le f \le 1,\ \mathrm{supp}(f) \subset O\} \\
&\le \mu_1(O) \\
&= \sup\{\mu_1(K) :\ K \subset O,\ K \in \mathcal{K}\} \\
&\le \sup\{\mu_1(f) :\ f \in C_c(X), 0 \le f \le 1,\ \mathrm{supp}(f) \subset O\} \\
&= \sup\{\nu(f) :\ f \in C_c(X), 0 \le f \le 1,\ \mathrm{supp}(f) \subset O\} \\
&\le \nu(O).
\end{aligned}$$

于是有 $\nu(O) = \mu_1(O)$. 从而由 (2.2) 知： $\nu(A) = \mu_1(A)$, 对一切 $A \in \mathcal{B}(X)$ 成立. 唯一性得证. 最后, 设 K 为一紧集, 由命题 1.20(2) 知 $\mu_1(K) < \infty$.

综上所证，(1) 得证. (2) 的证明完全类似 (在定义 μ_2^* 时用 $\mathcal{G}$ 代替 $\mathcal{G}_1$).

2.9 注 由 μ_1^* 及 μ_2^* 的定义易知，我们有 $\mu_1 \ge \mu_2$. 此外，由命题 1.20(4) 知： (2.1) 及 (2.3) 分别等价于

$$\mu_1(O) = \sup\{\mu_1(K) :\ K \subset O, K \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta\text{- 紧集}\},$$

$$\mu_2(O) = \sup\{\mu_2(K) :\ K \subset O, K \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta\text{- 紧集}\}.$$

最后，若 X 为 σ- 紧的，则 $\mu_1 = \mu_2$.

习题

2.10 设 X 为一拓扑空间，则 $\sigma(C(X)) = \sigma(C_b(C)) \subset \sigma(\mathcal{G}_\delta$-闭集).

2.11 设 X 为一正规拓扑空间，$\mathcal{B}_0(X)$ 为 Baire σ- 代数，μ 为 $\mathcal{B}_0(X)$ 上的一 σ- 有限测度，则

(1) $\mathcal{B}_0(X) = \sigma(\mathcal{G}_\delta$- 闭集);

(2) 为要 G 为 $\mathcal{F}_\delta$- 开集，必须且只需存在一非负有界连续函数 f, 使得 $G = [f > 0]$;

(3) 对一切 $A \in \mathcal{B}_0(X)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B):\ B \subset A, B \text{ 为 } \mathcal{G}_\delta\text{- 闭集}\}.$$

若进一步 μ 为有限测度，则对一切 $A \in \mathcal{B}_0(X)$, 还有

$$\mu(A) =\in \{\mu(G):\ G \supset A, G \text{ 为 } \mathcal{F}_\sigma\text{- 开集}\}.$$

§ 3 Hausdorff 空间上的正则测度

3.1 定义 令 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{B}(X)$ 为其 Borel σ- 代数，$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$ 为 X 上的 σ- 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上一测度. 称 μ 为**内正则的**(相应地，**强内正则的**), 如果对每个开集 (相应地，$\mathcal{A}$- 可测集)O, 有 $\mu(O) = \sup\{\mu(K):\ K \subset O, K$ 为紧集 $\}$; 称 μ 为**外正则的**, 如果对每个 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\mu(A) = \inf\{\mu(O):\ O \supset A, O$ 为开集 $\}$. 既内正则又外正则的测度称为**正则测度**. 若进一步对一切非负 $f \in C_c(X)$, 有 $\mu(f) < \infty$, 则称正则测度 μ 为 **Radon 测度**.

由定理 2.8(2) 立刻推得下述定理.

3.2 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，则 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度与 $C_c(X)$ 上的正线性泛函之间有如下一一对应关系:

设 μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度，令

$$L_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C_c(X),$$

则 L_μ 为 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 反之， $C_c(X)$ 上的正线性泛函必具有这种形式.

3.3 定理 设 X 为一拓扑空间， $\mathcal{G}$ 及 $\mathcal{F}$ 表示 X 的开集类和闭集类， μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 σ- 有限测度. 若每个开集为 $\mathcal{F}_\sigma$- 集，则对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A, F \in \mathcal{F}\}. \tag{3.1}$$

若进一步 μ 为有限测度，则对每个 $A \in \mathcal{B}(X)$, 还有

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \supset A, G \in \mathcal{G}\}. \tag{3.2}$$

证 由于 $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$, 故由第一章定理 6.3 及命题 6.4 推得定理的结论.

3.4 系 设 X 为一距离空间， μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一有限测度，则对一切 $A \in \mathcal{B}(X)$,(3.1) 及 (3.2) 成立.

证 由于距离空间中每个开集为 $\mathcal{F}_\sigma$- 集，故由定理 3.3 立得系的结论.

3.5 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间， $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数， μ 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度. 若 $A \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(A) < \infty$, 则有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \in \mathcal{K}\}. \tag{3.3}$$

证 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 $V \supset A$, 使 $\mu(V) < \mu(A) + \epsilon$. 取紧集 $L \subset V$, 使 $\mu(L) > \mu(V) - \epsilon$. 由于 $\mu(V \backslash A) < \epsilon$, 故有开集 $W \supset V \backslash A$, 使 $\mu(W) < \epsilon$. 令 $K = L \backslash W$, 则 $K \subset A$ 为紧集，且有

$$\mu(K) = \mu(L) - \mu(L \cap W) > \mu(V) - 2\epsilon \geq \mu(A) - 2\epsilon,$$

故有 (3.3).

下一定理表明：有限测度的正则性与强内正则性等价.

3.6 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的有限测度. 则 μ 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度，当且仅当 μ 是强内正则的.

证 只需证充分性. 设 μ 是强内正则的. 这蕴含 μ 的内正则性. 对 A^c 应用 (3.1) 便得 μ 的外正则性.

3.7 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一测度.

(1) 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, 且 A 关于 μ 为 σ- 有限集，则

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K):\ K \subset A, K \in \mathcal{K}\}.$$

(2) 若对每个 $K \in \mathcal{H}$, 有 $\mu(K) < \infty$, 则 μ 为 Radon 测度.

证 (1) 设 G 为 X 中的一开集，则由习题 1.33 及 1.37 知，G 为 $\mathcal{K}_\sigma$- 集，故由第一章定理 6.3 立得 (1) 的结论.

(2) 由于 X 中每个开集为 $\mathcal{K}_\sigma$- 集，故 μ 为内正则的. 往证 μ 是外正则的. 由习题 1.35 知，存在一列开集 G_n, 使得 $\overline{G}_n$ 为紧集，且 $\bigcup_n G_n = X$. 于是，对每个 n, 有 $\mu(G_n) < \infty$. 令

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap G_n),\ n \geq 1,$$

则 μ_n 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度，故由定理 3.3 知，μ_n 是外正则的. 设 $A \in \mathcal{B}(X)$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 $V_n \supset A$, 使得 $\mu(G_n \cap V_n) \geq \mu(A \cap G_n) + \epsilon/2^n$. 令 $V = \bigcup_{n=1}^\infty (G_n \cap V_n)$, 则 $V \supset A$, 且有

$$\mu(V \backslash A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(G_n \cap V_n \backslash A) \leq \epsilon,$$

从而 $\mu(V) \leq \mu(A) + \epsilon, \mu$ 的外正则性得证. 证毕.

下面讨论符号测度的正则性.

3.8 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一符号测度. 如果 μ 的变差测度 $|\mu|$ 是正则的，则称 μ 是 **正则的**.

下一命题给出了有限符号测度 μ 的正则性的另一等价描述.

3.9 命题 为要一有限符号测度 μ 是正则的，必须且只需 μ^+ 及 μ^- 是正则的. 这里 μ^+ 及 μ^- 分别是 μ 的正部及负部.

证 充分显然. 现证必要性. 设 $|\mu|$ 为正则测度, 令 $A \in \mathcal{A}, \epsilon > 0$, 取开集 $U \supset A$, 使 $|\mu|(U) < |\mu|(A)+\epsilon$. 则 $\mu^-(U\backslash A) \le |\mu|(U\backslash A) < \epsilon$, 从而

$$\mu^-(U) = \mu^-(A) + \mu^-(U\backslash A) < \mu^-(A) + \epsilon,$$

μ^- 的外正则性得证. μ^- 的内正则性证明类似. 同理可证 μ^+ 的正则性.

3.10 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上一正则符号测度. 设 $A \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(A)$ 为有限值, 则对任给 $\epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使对任何满足 $K \subset B \subset A$ 的 $B \in \mathcal{A}$, 有 $|\mu(A) - \mu(B)| < \epsilon$.

证 由 $|\mu|$ 的正则性及定理 3.5 知: 存在紧集 $K \subset A$, 使 $|\mu|(A\backslash K) < \epsilon$, 于是对任何满足 $K \subset B \subset A$ 的 $B \in \mathcal{A}$, 有

$$|\mu(A) - \mu(B)| = |\mu(A\backslash B)| \le |\mu|(A\backslash B) \le |\mu|(A\backslash K) < \epsilon.$$

3.11 记号 设 X 为一 Hausdorff 空间, 我们用 $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限符号测度全体, 用 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限正则符号测度全体.

由第三章 3.24(4) 知: $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ 按符号测度的全变差范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 为一 Banach 空间. 另一方面, 易知 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 是 $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ 的闭线性子空间, 故 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 按范数 $\|\cdot\|_{\text{var}}$ 也为一 Banach 空间.

下面我们研究关于正则测度的不定积分. 为此先证明一引理.

3.12 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一正则测度. 设 $B \in \mathcal{A}$, 且 $\mu(B) < \infty$. 令 $\nu(A) = \mu(B \cap A), A \in \mathcal{A}$, 则 ν 也为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度.

证 由定理 3.5, 对任何 $A \in \mathcal{A}$, 我们有

$$\begin{aligned}\nu(A) = \mu(B \cap A) &= \sup\{\mu(K):\ K \subset B \cap A, K \in \mathcal{K}\} \\ &= \sup\{\nu(K):\ K \subset B \cap A, K \in \mathcal{K}\},\end{aligned}$$

故有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(K):\ K\subset A, K\in\mathcal{K}\},$$

从而由定理 3.5 知 ν 为 $\mathcal{A}$ 上的正则测度. 证毕.

3.13 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一正则测度. 若 $f\in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$, 则 f 关于 μ 的不定积分 $f.\mu$ 是有限正则符号测度.

证 令 $\nu=f.\mu$, 由于 $|\nu|=|f|.\mu$, 故由符号测度正则性的定义, 为证 ν 正则, 不妨设 f 非负. 首先设 $f=I_B$, 其中 $B\in\mathcal{B}(X)$, 且 $\mu(B)<\infty$. 令 $\nu_1(A)=\mu(A\cap B), A\in\mathcal{B}(X)$, 则由引理 3.12 知, ν_1 为正则测度. 因此, 对 μ- 可积的非负简单函数 $f, f.\mu$ 也是正则测度. 对一般的非负 μ- 可积函数 f, 令 f_n 为非负简单函数, 使 $f_n\uparrow f$, 则有

$$\|f.\mu-f_n.\mu\|_{\mathrm{var}}=\int_X(f-f_n)d\mu\to 0,\ n\to\infty.$$

由 $\mathcal{M}_r(X,(X))$ 的完备性知 $f.\mu\in\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$. 证毕.

3.14 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一 Radon 测度, ν 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一有限正则符号测度. 则下列断言等价:

(1) ν 为某 $f\in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 关于 μ 的不定积分;

(2) ν 关于 μ 绝对连续;

(3) 设 K 为紧集, 且 $\mu(K)=0$, 则有 $\nu(K)=0$.

证 显然有 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 下证 (3)$\Rightarrow$ (2). 设 (3) 成立. 令 $A\in\mathcal{B}(X)$, 且 $\mu(A)=0$, 则对一切紧集 $K\subset A$, 有 $\mu(K)=0$. 往证 $\nu(A)=0$. 假定 $|\nu(A)|=\alpha>0$, 则由命题 3.10 知, 存在紧集 $K\subset A$, 使 $|\nu(A)-\nu(K)|<\dfrac{\alpha}{2}$. 特别有 $\nu(K)\neq 0$, 但有 $\mu(K)=0$, 这与 (3) 矛盾. 因此, 必须有 $\nu(A)=0$, 这表明 $\nu\ll\mu$.

最后证 (2)$\Rightarrow$(1). 设 (2) 成立. 由 $|\nu|$ 的内正则性, 存在一列紧集 K_n, 使 $\sup_n|\nu|(K_n)=|\nu|(X)$. 令 $X_0=\bigcup_n K_n$, 则有 $|\nu|(X\backslash X_0)=0$. 令 $\mu_0(A)=\mu(A\cap X_0)$, 则因 $\mu(K_n)<\infty$, 故 μ_0 为 σ- 有限测度, 且 $\nu\ll\mu_0$. 于是由 Radon-Nikodym 定理

知，存在 $f_0 \in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu_0)$，使 $\nu = f_0.\mu_0$. 令 $f = f_0 I_{X_0}$，则 $f \in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$，且 $\nu = f.\mu$. 证毕.

习题

3.15 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的 σ- 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的内正则测度. 试证：

(1) 对每个开集 O，有

$$\mu(O) = \sup\{\mu(f):\ f \in C_c(X), 0 \le f \le 1, \mathrm{supp}(f) \subset O\}$$
$$= \sup\{\mu(f):\ f \in C_c(X), 0 \le f \le I_O\}.$$

(提示：利用命题 1.20(2).)

(2) 令 $\mathcal{G}_1 = \{O:\ O$ 为开集，且 $\mu(O) = 0\}$，并令 U 为 $\mathcal{G}_1$ 中全体集合的并，则 $\mu(U) = 0$.(注：通常称 U^c 为 μ的支撑，记为 $\mathrm{supp}[\mu]$.)

3.16 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$ 为一 σ- 代数，μ 为 $\mathcal{A}$ 上的 σ- 有限正则测度，则 $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$. 这里 $\overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 关于 μ 的完备化.

3.17 设 X 为一紧 Hausdorff 空间，μ 为 Baire σ- 代数 $\mathcal{B}_0(X)$ 上的一有限测度，则 μ 可以唯一扩张成为 $\mathcal{B}(X)$ 上的正则测度. (提示：用 Riesz 表现定理.)

3.18 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一正则测度，则为要 μ 为 Radon 测度，必须且只需对一切紧集 K，有 $\mu(K) < \infty$.

3.19 证明 $\mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X))$ 是 $\mathcal{M}(X,\mathcal{B}(X))$ 的闭线性子空间.

3.20 给出系 3.4 的一个直接证明 (提示：令 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 中满足 (3.1) 及 (3.2) 的集 A 全体. 显然 $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$. 为证 $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X)$，只需证 $\mathcal{C}$ 对可列并运算封闭，且 $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$.)

3.21 设 X 为一 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一 Radon 测度. 令 $\mathcal{M}_r(\mu) = \{\nu \in \mathcal{M}_r(X,\mathcal{B}(X)) : \nu \ll \mu\}$，则 $f \mapsto f.\mu$ 为从 $L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ 到 $\mathcal{M}_r(\mu)$ 上的线性保范同构映射. (提示：$\|f.\mu\|_{\mathrm{var}} = \|f\|_{L^1(\mu)}$.)

§4 空间 $C_0(X)$ 的对偶

设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 我们用 $C_c(X)$ 表示 X 上具紧支撑连续函数全体. X 上的一实值连续函数 f 称为**在无穷远处为零**, 是指对任给 $\epsilon > 0$, 存在紧集 K 使 f 在 K^c 上有 $|f(x)| < \epsilon$. 我们用 $C_0(X)$ 表示在无穷远处为零的连续函数全体, 本节将证明 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 可以视为 $C_0(X)$ 的对偶.

设 $f \in C_0(X)$, 令

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

则 $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ 为赋范线性空间.

4.1 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 则 $C_0(X)$ 为一 Banach 空间, 且 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密.

证 设 (f_n) 为 $C_0(X)$ 中一基本列, 则对每个 $x \in X, (f_n(x))$ 为一实数基本列, 故有极限 $f(x)$. 显然 f_n 在 X 上一致收敛于 f, 故 f 为 X 上的连续函数. 往证 f 在无穷远处为零. 任给 $\epsilon > 0$, 先取一自然数 n, 使对一切 $x \in X$ 有 $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. 由于 $f_n \in C_0(X)$. 故存在紧集 K, 使 $|f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in K^c$. 于是有

$$|f(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 2\epsilon, \ x \in K^c,$$

依定义, $f \in C_0(x)$. 这表明 $C_0(X)$ 为一 Banach 空间.

现证 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密. 设 $f \in C_0(X)$, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在紧集 K, 使 $\forall x \in K^c$ 有 $|f(x)| \le \epsilon$. 另一方面, 由命题 1.20, 存在 $g \in C_c(X)$, 使 $I_K \le g \le 1$. 令 $h = gf$, 则 $h \in C_c(X)$, 且有 $\|f - h\|_\infty \le \epsilon$. 这表明 $C_c(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密. 证毕.

4.2 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函, 则存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-, 使 $L = L_+ - L_-$.

证 设 $f \in C_0(X)$ 且 $f \ge 0$(简记为 $f \in C_0(X)_+$), 令

$$L_+(f) = \sup\{L(g) : \ g \in C_0(X), 0 \le g \le f\}, \tag{4.1}$$

则易知 $|L_+(f)| \leq \|L\| \|f\|_\infty$，其中 $\|L\|$ 表示 L 的范数．此外，显然有 $L_+(f) \geq 0$, 且 $\forall \alpha \geq 0$, 有 $L_+(\alpha f) = \alpha L_+(f)$．下面证明：$\forall f_1, f_2 \in C_0(X)$, 有

$$L_+(f_1 + f_2) = L_+(f_1) + L_+(f_2). \tag{4.2}$$

由 (4.1) 不难看出： $L_+(f_1) + L_+(f_2) \leq L_+(f_1 + f_2)$．为证相反的不等式，取 $g \in C_0(X)$, 使 $0 \leq g \leq f_1 + f_2$．令

$$g_1 = g \wedge f_1, \quad g_2 = g - g_1,$$

则 $g_1, g_2 \in C_0(X), 0 \leq g_1 \leq f_1, 0 \leq g_2 \leq f_2$．于是有

$$L(g) = L(g_1) + L(g_2) \leq L_+(f_1) + L_+(f_2),$$

由此得 $L_+(f_1 + f_2) \leq L_+(f_1) + L_+(f_2)$．故 (4.2) 得证．

设 $f \in C_0(X)$, 令

$$L_+(f) = L_+(f^+) - L_+(f^-),$$

则 L_+ 为 $C_0(X)$ 上的线性泛函，且有

$$|L_+(f)| \leq L_+(f^+) \vee L_+(f^-) \leq \|L\| \|f\|_\infty,$$

于是 L_+ 为连续线性泛函．最后，令 $L_- = L_+ - L$, 则 L_- 为连续线性泛函，并由 (4.1) 知：对 $f \in C_0(X)_+, L_-(f) \geq 0$. 从而 L_- 为正泛函．证毕．

4.3 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间．令 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限正则符号测度全体．对 $\mu \in \mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$，令 $L_\mu(f) = \int f d\mu$, $f \in C_0(X)$, 则 $\mu \mapsto L_\mu$ 为从 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 到 $C_0(X)^*$ 上的保范同构映射．

证 设 $\mu \in \mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$, 显然有 $L_\mu \in C_0(X)^*$, 且

$$\|L_\mu(f)\|_\infty \leq \|\mu\|_{\text{var}} \|f\|_\infty, \quad f \in C_0(X),$$

于是有 $\|L_\mu\| \le \|\mu\|_{\text{var}}$. 往证等号成立. 设 $X = D \cup D^c$ 为 μ 的 Jordan 分解 (即 $\mu^+(A) = \mu(A \cap D), \mu^-(A) = -\mu(A \cap D^c)$). 对任给 $\epsilon > 0$, 由 μ^+ 及 μ^- 的正则性及定理 3.5 知: 存在紧集 $K_1 \subset D$ 及紧集 $K_2 \subset D^c$, 使得

$$\mu(K_1) - \mu(K_2) = |\mu|(K_1 \cup K_2) > |\mu|(X) - \epsilon = \|\mu\|_{\text{var}} - \epsilon.$$

另一方面, 由命题 1.23, 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $\|f\|_\infty = 1$, 且

$$fI_{K_1 \cup K_2} = I_{K_1} - I_{K_2}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\|L_\mu\| \ge L_\mu(f) = \int f d\mu = \int fI_{K_1 \cup K_2} d\mu + \int fI_{(K_1 \cup K_2)^c} d\mu \\ \ge \mu(K_1) - \mu(K_2) - |\mu|((K_1 \cup K_2)^c) > \|\mu\|_{\text{var}} - 2\epsilon.\end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的, 故有 $\|L_\mu\| \ge \|\mu\|_{\text{var}}$, 从而有 $\|L_\mu\| = \|\mu\|_{\text{var}}$.

现在证明映射 $\mu \mapsto L_\mu$ 是 $\mathcal{M}_r(X, \mathcal{B}(X))$ 到 $C_0(X)^*$ 的满射. 为此, 设 $L \in C_0(X)^*$, 即设 L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函. 由引理 4.2, 存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-, 使得 $L = L_+ - L_-$. L_+ 及 L_- 限于 $C_c(X)$ 为正线性泛函, 故由 Riesz 表现定理 (定理 2.8(2)) 存在 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度 μ_1 及 μ_2, 使得对一切 $f \in C_c(X)$, 有 $L_+(f) = \int f d\mu_1, L_-(f) = \int f d\mu_2$. 习题 3.15 蕴含

$$\mu_1(X) = \sup\{L_+(f): f \in C_c(X), 0 \le f \le 1\} \le \|L_+\| < \infty,$$

同理 $\mu_2(X) < \infty$, 故 $\mu = \mu_1 - \mu_2 \in \mathcal{M}_r(X, \mathcal{B})$. 显然我们有 $L = L_\mu$, 映射 $\mu \mapsto L_\mu$ 显然是线性的. 证毕.

习题

4.4 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, 令 X^Δ 为 X 的单点紧化 (见 1.11), 对 X 上的函数 f, 令

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ 0, & x = \Delta, \end{cases}$$

则为要 $f \in C_0(X)$, 必须且只需 f_Δ 为 X^Δ 上的连续函数.

4.5 设 X 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 则 $C_0(X)$ 为可分 Banach 空间. (提示: 先考虑 X 为紧空间情形, 然后利用 4.4.)

§5 用连续函数逼近可测函数

在许多情况下, 连续函数比可测函数容易处理, 本节介绍有关用连续函数逼近可测函数的一些结果.

下一定理的一个特殊情形见第三章习题 4.16.

5.1 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一 Radon 测度. 令 $1 \le p < \infty$, 则 $C_c(X)$ 在 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中稠密.

证 显然 $C_c(X) \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. 由于 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中的简单函数在 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中稠密 (见第三章引理 4.7), 故为证定理只需证明如下事实: 若 $A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$, 则有 $f \in C_c(X)$, 使 $\|I_A - f\|_p$ 任意小. 为此, 设 $\epsilon > 0$, 由 μ 的外正则性, 先取开集 $U \supset A$, 使 $\mu(U) < \mu(A) + \epsilon$, 再由定理 3.5, 取一紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(K) > \mu(A) - \epsilon$. 由命题 1.20(2), 存在 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \le f \le I_U$, 则 $|I_A - f| \le I_U - I_K$, 故有

$$\|I_A - f\|_p \le \|I_U - I_K\|_p = \mu(U - K)^{\frac{1}{p}} < (2\epsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

定理得证.

下一定理称为 **Lusin 定理**.

5.2 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一正则测度, f 为 X 上的一 $\mathcal{A}$- 可测实值函数. 如果 $A \in \mathcal{A}$, $0 < \mu(A) < \infty$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(A \backslash K) < \epsilon$, 且 f 限于 K 连续. 若进一步, X 为局部紧, 则存在 $g \in C_c(X)$, 使 g 与 f 在 K 上一致, 且使

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} \le \sup\{|f(x)| : x \in A\}. \tag{5.1}$$

证　首先设 f 只取可数多个值，即 $f=\sum_{i=1}^{\infty}a_iI_{A_i}$，其中 $a_i\neq a_j$, $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$, 且 $\sum_i A_i=X$. 取正整数 n, 使得 $\mu(A\cap(\sum_{i=1}^n A_i)^c)<\epsilon/2$. 由定理 3.5, 存在 $A\cap A_n,\cdots,A\cap A_n$ 的紧子集 $K_1,\cdots,K_n$, 使得 $\sum_{i=1}^n\mu((A\cap A_i)\backslash K_i)<\epsilon/2$. 令 $K=\sum_{i=1}^n K_i$, 则 K 为 A 的紧子集，且有

$$\begin{aligned}\mu(A\backslash K)&=\mu\Big(A\cap(\sum_{i=1}^n A_i)^c\Big)+\sum_{i=1}^n\mu((A\cap A_i)\backslash K_i)\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

由于 f 限于每个 K_i 为常数，从而 f 限于 K 为连续 (见习题 1.30).

现设 f 为任一实值 $\mathcal{A}$- 可测函数，令

$$f_n(x)=\frac{k}{2^n},\ \text{若}\ \frac{k}{2^n}\leq f(x)<\frac{k+1}{2^n},\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

由前所证，对每个 $n\geq1$, 存在紧集 $K_n\subset A$, 使 $\mu(A\backslash K_n)<\epsilon/2^n$, 且 f_n 限于 K_n 为连续. 令 $K=\bigcap_n K_n$, 则由于 f 是 (f_n) 的一致极限，故 f 限于 K 连续，此外有

$$\mu(A\backslash K)\leq\sum_n\mu(A\backslash K_n)<\epsilon.$$

最后证明定理的第二部分. 假定 X 为局部紧 Hausdorff 空间，令 $X^\Delta=X\cup\{\Delta\}$ 为 X 的单点紧化，则 X^Δ 是正规空间 (见命题 1.19). 故由 Tietze 扩张定理，存在 X^Δ 上的连续函数 h^*, 使 h^* 在 K 上与 f 一致，且使 $\sup\{|h^*(x)|:x\in X\}=\sup\{|f(x)|:x\in K\}$. 取 $p\in C_c(X)$, 使得 $I_K\leq p\leq1$(见命题 1.20(2)), 并令 $g=ph$, 其中 h 为 h^* 在 X 上的限制，则 $g\in C_c(X)$, g 与 f 在 K 上一致，且使 (5.1) 成立. 证毕.

习题

5.3 设 X 为一 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一有限正则测度, f 为 X 上的一实值函数. 则下列三断言等价:

(1) f 为 $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$- 可测 (即 $\overline{\mathcal{B}(X)}^{\mu}$- 可测, 见习题 3.16);

(2) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall \epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $\mu(A \backslash K) < \epsilon$, 且 f 限于 K 连续;

(3) 存在 X 的划分: $X = (\sum_n K_n) \cup N$, 其中每个 K_n 为紧集, N 为 μ- 零测集, 使得 f 限于每个 K_n 为连续函数.

5.4 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 且对一切 $a, b \in \mathbb{R}$, 有 $f(a+b) = f(a) + f(b)$. 试证: (1) f 在 $\mathbb{R}$ 上连续当且仅当它在一点连续; (2) 若 f 为 Lebesgue 可测, 则 f 连续. (提示: 利用 Lusin 定理.)

§6 乘积拓扑空间上的测度与积分

本节研究的中心问题是: 给定两个局部紧 Hausdorff 空间 X 和 Y 及其上的两个 Radon 测度 μ 和 ν, 如何在乘积拓扑空间 $X \times Y$ 上构造一 Radon 测度 $\mu \times \nu$, 使其在 X 及 Y 上的边缘测度分别是 μ 及 ν? 进一步, 是否有相应的 Fubini 定理? 这里遇到的困难是: μ 及 ν 一般并非 σ- 有限, 且 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ 一般严格比 $\mathcal{B}(X \times Y)$ 小. 因此, 第四章的结果不再适用. 为了克服这一困难, 我们将求助于 Riesz 表现定理.

下面首先研究拓扑空间的乘积.

6.1 定义 设 $(X_1, \mathcal{G}_1), \cdots, (X_n \mathcal{G}_n)$ 为拓扑空间, 令 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots, \times X_n$,

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n : U_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则 $\mathcal{B}$ 对有限交运算封闭. 以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑 $\mathcal{G}$ 称为 X 的 **乘积拓扑**;$(X, \mathcal{G})$ 称为 $(X_1, \mathcal{G}_1), \cdots, (X_n, \mathcal{G}_n)$ 的 **乘积拓扑空间**.

令 $\mathcal{B}_0 = \{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{G}_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 其中 π_i 为 X 到

X_i 的投影映射，则易见 $\mathcal{B}_0$ 为 $\mathcal{G}$ 的子基，且 $\mathcal{G}$ 是使每个投影映射为连续的最小拓扑.

6.2 定义 设 $\{(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha),\alpha\in\wedge\}$ 为一族拓扑空间，$X=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$，$\mathcal{G}$ 为 X 上使每个投影映射 π_α 为连续的最小拓扑，称 $(X,\mathcal{G})$ 为 $(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha),\alpha\in\Lambda$ 的 **乘积拓扑空间**.

设 $\mathcal{P}_0$ 为 Λ 的非空有穷子集全体，令

$$\mathcal{B}=\bigcup_{S\in\mathcal{P}_0}\{\pi_S^{-1}(\prod_{i\in S}U_i):\ U_i\in\mathcal{G}_i,\ i\in S\},$$

则易知 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{G}$ 的基.

6.3 定理 (Tychonoff 定理) 设 $(X_\alpha,\mathcal{G}_\alpha)$ 为一族紧拓扑空间，则其乘积拓扑空间 $(X,\mathcal{G})$ 亦为紧拓扑空间.

关于该定理的证明，读者可以参看任何一本有关点集拓扑的书，这里从略.

下面我们研究乘积拓扑空间上的 Borel σ- 代数. 为方便起见，我们只讨论两个拓扑空间乘积情形. 关于集合和函数的截口概念见第四章第 2 节.

6.4 引理 设 X 及 Y 为 Hausdorff 空间，$X\times Y$ 为其乘积拓扑空间 (它也是 Hausdorff 空间).

(1) 我们有 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)\subset\mathcal{B}(X\times Y)$. 若 X 及 Y 都有可数基，则 $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)=\mathcal{B}(X\times Y)$;

(2) 设 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 则对每个 $x\in X$ 及每个 $y\in Y$, 有 $E_x\in\mathcal{B}(Y),E^y\in\mathcal{B}(X)$. 这里 $E_x=\{y\in Y:(x,y)\in E\},E^y=\{x\in X:(x,y)\in E\}$;

(3) 设 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathcal{B}(X\times Y)$- 可测函数，则对每个 $x\in X$ 及 $y\in Y,f_x$ 为 Y 上的 $\mathcal{B}(Y)$- 可测函数，f^y 为 X 上的 $\mathcal{B}(X)$- 可测函数. 这里记号 f_x 及 f^y 见第四章定义 2.1.

证 (1) 第一部分显然. 现设 $\mathcal{C}$ 及 $\mathcal{D}$ 分别为 X 及 Y 的可数基. 令 $\mathcal{H}=\{U\times V:U\in\mathcal{C},V\in\mathcal{D}\}$, 则 $\mathcal{H}$ 为 $X\times Y$ 的可数基. 由于

$\mathcal{H} \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$, 且 $X \times Y$ 的每个开集为 $\mathcal{H}$ 中元素的可列并，故有 $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. 从而有 $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$.

(2) 设 $x \in X$, 令 $g_x(y) = (x, y)$, 则 g_x 为 Y 到 $X \times Y$ 上的连续函数，从而关于 $\mathcal{B}(Y)$ 及 $\mathcal{B}(X \times Y)$ 可测. 但 $E_x = g^{-1}(E)$, 故 $E_x \in \mathcal{B}(Y)$. 同理可证 $E^y \in \mathcal{B}(X)$.

(3) 注意： $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x, (f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y$, 故 (3) 由 (2) 推得.

下一引理的证明留给读者完成.

6.5 引理 设 S 及 T 为拓扑空间，T 为紧空间. 令 f 为 $S \times T$ 上的实值连续函数. 则对任一 $s_0 \in S$ 及任一 $\epsilon > 0$, 存在 s_0 的一开邻域 U, 使得对一切 $s \in U$ 及一切 $t \in T$, 有 $|f(s,t) - f(s_0,t)| < \epsilon$.

6.6 命题 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间， μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度，令 $f \in C_c(X \times Y)$. 则

(1) 对任何 $x \in X, y \in Y$, 有 $f_x \in C_c(Y), f^y \in C_c(X)$;

(2) 函数 $x \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy)$ 及 $y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx)$ 分别属于 $C_c(X)$ 及 $C_c(Y)$;

(3) $\int_X \int_Y f(x,y)\nu(dy)\mu(dx) = \int_Y \int_X f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

证 (1) 令 $K = \text{supp}(f)$, 设 K_1 及 K_2 分别为 K 在 X 及 Y 上的投影，则 K_1 及 K_2 为紧集. 显然 f_x 在 Y 上连续，且 $\text{supp}(f_x) \subset K_2$, 故 $f_x \in C_c(Y)$. 同理 $f^y \in C_c(X)$.

(2) 分别对 $X \times K_2$ 及 $K_1 \times Y$ 应用引理 6.5 即可推得 (2) 的结论 (注意 $\nu(K_2) < \infty, \mu(K_1) < \infty$).

(3) 对任给 $\epsilon > 0$, 由引理 6.5 知：对每个 $x \in K_1$, 存在 x 的开邻域 U_x, 使对一切 $x' \in U_x$ 及一切 $y \in K_2$ 有 $|f(x',y) - f(x,y)| < \epsilon$. 由于 K_1 为紧集，故存在 K_1 的有限覆盖 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. 令 $(A_i, 1 \leq i \leq n)$ 为两两不交的 Borel 集，使得 $A_i \subset U_{x_i}, 1 \leq i \leq n$,

且 $\sum_{i=1}^n A_i = K_1$. 令 $g(x,y)=\sum_{i=1}^n f(x_i,y)I_{A_i}(x)$, 则容易验证

$$\begin{aligned}\int\int g(x,y)\mu(dx)\nu(dy) &= \int\int g(x,y)\nu(dy)\mu(dx)\\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i)\int f(x_i,y)\nu(dy).\end{aligned}$$

此外, f 及 g 在 $K_1\times K_2$ 的余集上为 0, 且 $|f-g|<\epsilon$. 于是有

$$\begin{aligned}&\left|\int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)-\int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)\right|\\ &\le \left|\int\int (f(x,y)-g(x,y))\mu(dx)\nu(dy)\right|\\ &\quad+\left|\int\int (f(x,y)-g(x,y))\mu(dx)\nu(dy)\right|\\ &\le 2\epsilon\mu(K_1)\nu(K_2).\end{aligned}$$

由于 $\epsilon>0$ 是任意的, 故 (3) 得证.

命题 6.6 导致如下的

6.7 定义 设 μ 及 ν 分别为局部紧 Hausdorff 空间 X 及 Y 上的 Radon 测度. 由命题 6.6(3) 知, 我们可在 $C_c(X\times Y)$ 上定义一正线性泛函 I:

$$I(f)=\int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)=\int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx).$$

由于 $X\times Y$ 是局部紧 Hausdorff 空间, 故由 Riesz 表现定理知, 有 $X\times Y$ 上唯一的 Radon 测度与 I 对应. 我们称此 Radon 测度为 μ 与 ν 的 **Radon 乘积**, 记为 $\mu\times\nu$.

注 若 X 及 Y 都有可数基, 则 Radon 乘积 $\mu\times\nu$ 即为通常的乘积测度 (见习题 6.15).

下面的任务是要证明与 Radon 乘积测度 $\mu\times\nu$ 有关的 Fubini 定理. 为此, 我们需要有关下半连续函数积分的一个结果.

6.8 定义 设 X 为一拓扑空间. 函数 $f: X \to (-\infty, +\infty]$ 称为**下半连续的**, 如果对每个实数 a,$[f > a]$ 为开集; 称函数 $f: X \to [-\infty, +\infty)$ 为**上半连续的**, 如果 $-f$ 为下半连续.

显然, 既下半连续又上半连续的函数为连续函数. 反之亦然. 此外, 一族下半连续函数的上端为下半连续函数, 下半连续函数为 Borel 可测.

6.9 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{B}(X)$ 的一 σ- 代数, μ 为 $\mathcal{A}$ 上的一 Radon 测度. 设 $\mathcal{H}$ 为一族非负下半连续函数, 使得 $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, 存在 $h \in \mathcal{H}$, 满足 $h \geq h_1 \vee h_2$. 令

$$f(x) = \sup\{h(x): \ h \in \mathcal{H}\}, \ x \in X,$$

则 $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu: \ h \in \mathcal{H}\}$.

证 显然对 $h \in \mathcal{H}$ 有 $\int h d\mu \leq \int f d\mu$. 为证引理, 只需证: 对任一实数 $a < \int f d\mu$, 存在 $h \in \mathcal{H}$, 使 $a < \int h d\mu$. 为此, 先用简单函数逼近 f. 令 $U_{n,i} = [f > \frac{i}{2^n}]$,

$$f_n = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n} I_{U_{n,i}} = \sum_{i=1}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} I_{[\frac{i}{2^n} < f_n \leq \frac{i+1}{2^n}]} + nI_{[f>n]},$$

则 f_n 为 Borel 可测, $f_n \uparrow f$, 故有 $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$. 于是存在自然数 N, 使 $\int f_N d\mu > a$. 由于 $\int f_N d\mu = \dfrac{1}{2^N}\sum_i \mu(U_{N,i})$, 故由 μ 的正则性, 存在 $U_{N,i}$ 的紧子集 $K_i, i = 1, 2, \cdots, N2^N$, 使得 $\dfrac{1}{2^N}\sum_i \mu(K_i) > a$. 令 $g = \dfrac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N2^N} I_{K_i}$, 则对每个 $x \in \bigcup_{i=1}^{N2^N} K_i$, 有 $g(x) \leq f_N(x) < f(x)$. 于是由 f 的定义, 对每个 $x \in \bigcup_{i=1}^{N2^N} K_i$, 存在 $h_x \in \mathcal{H}$, 使 $g(x) < h_x(x)$. 由于 $h_x - g$ 为下半连续 (见习题 6.12), 故存在 x 的一开邻域 U_x, 使对一切 $y \in U_x$, 有 $h_x(y) - g(y) > 0$. 现取 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_m}$, 使 $\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \supset \bigcup_{i=1}^{N2^N} K_i$, 并取 $h \in \mathcal{H}$, 使 $h \geq \bigvee_{i=1}^m h_{x_i}$, 则 $h \geq g$, 从而有

$$a < \frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N2^N} \mu(K_i) = \int g d\mu \leq \int h d\mu.$$

引理得证.

6.10 命题 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间, μ 及 ν 分别是 X 及 Y 上的 Radon 测度, $\mu\times\nu$ 为其 Radon 乘积. 令 U 为 $X\times Y$ 的开子集, 则

(1) 函数 $x\mapsto\nu(U_x)$ 及 $y\mapsto\mu(U^y)$ 为下半连续函数;

(2) $(\mu\times\nu)(U)=\int_X\nu(U_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(U^y)\nu(dy)$.

证 (1) 令

$$\mathcal{H}_x=\{f_x:\ f\in C_c(X\times Y):\ 0\le f\le I_U\},$$
$$\mathcal{H}^y=\{f^y:\ f\in C_c(X\times Y):\ 0\le f\le I_U\},$$

则 $\mathcal{H}_x\subset C_c(Y),\mathcal{H}^y\subset C_c(X)$, 且 $\mathcal{H}_x$ 及 $\mathcal{H}^y$ 满足引理 6.9 的条件. 故由引理 6.9 得

$$\nu(U_x)=\sup\{\int_Y f_xd\nu:\ f_x\in\mathcal{H}_x\},\tag{6.1}$$

$$\mu(U^y)=\sup\{\int_X f^yd\mu:\ f^y\in\mathcal{H}^y\}.\tag{6.2}$$

但由命题6.6,$x\mapsto\int f_xd\nu$ 及 $y\mapsto\int f^yd\mu$ 是连续函数, 故 $x\mapsto\nu(U_x)$ 及 $y\mapsto\mu(U^y)$ 是下半连续函数.

(2) 令 $\mathcal{H}=\{f\in C_c(X\times Y):0\le f\le I_U\}$, 则相继由习题 3.15, 引理 6.9 及 (6.1) 式得

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(U)&=\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_{X\times Y}fd(\mu\times\nu)\\&=\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_X\int_Y f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)\\&=\int_X(\sup_{f\in\mathcal{H}}\int_Y f_xd\nu)\mu(dx)\\&=\int_X\nu(U_x)\mu(dx).\end{aligned}$$

(2) 的第一部分得证. 同理可证 (2) 的另一半. 证毕.

下一定理是有关 Radon 乘积测度 $\mu\times\nu$ 积分的 **Fubini 定理**.

6.11 定理 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间，μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度，$\mu\times\nu$ 为其 Radon 乘积. 设 $f\in L^1(X\times Y,\mathcal{B}(X\times Y),\mu\times\nu)$, 且存在分别关于 μ 及 ν 为 σ- 有限的 Borel 集 X_0 及 Y_0, 使 f 在 $X_0\times Y_0$ 的余集上为 0, 则

(1) 对 μ-a.e.x, f_x 为 ν- 可积，对 ν-a.e. y, f^y 为 μ- 可积；

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x d\nu, & 若 f_x\in L^1(Y,\mathcal{B}(Y),\nu),\\ 0, & 其它情形;\end{cases}$$

$$I^f(y)=\begin{cases}\int_X f^y d\mu, & 若 f^y\in L^1(X,\mathcal{B}(X),\mu),\\ 0, & 其它情形,\end{cases}$$

则 I_f 为 μ- 可积，I^f 为 ν- 可积，且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X I_f(x)\mu(dx)=\int_Y I^f(y)\nu(dy).$$

证 首先假定 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 并假定存在 $A\in\mathcal{B}(X)$, $B\in\mathcal{B}(Y)$, 使 $\mu(A)<\infty,\nu(B)<\infty$, 且 $E\subset A\times B$. 往证

(a) 函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 及 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 Borel 可测；

(b) $(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy)$.

由 μ 及 ν 的外正则性，存在开集 $U\supset A$ 及开集 $V\supset B$, 使 $\mu(U)<\infty,\nu(V)<\infty$. 令 $W=U\times V$,

$$\mathcal{S}=\{D\in\mathcal{B}(X\times Y):\ D\subset W, D\ 满足性质\ (a)\ 及\ (b)\},$$

则易见 $\mathcal{S}$ 为 W 上的 λ- 类. 另一方面, 由命题 6.10,W 的一切开子集属于 $\mathcal{S}$, 故由单调类定理 (第一章定理 2.2),$\mathcal{S}=\mathcal{B}(W)=W\cap\mathcal{B}(X)$ (后一等号见第一章习题 2.9). 特别 $E\in\mathcal{S}$.

由上所证容易推知：对 $E\in\mathcal{B}(X\times Y)$, 假定存在关于 μ 的 σ- 有限集 $A\in\mathcal{B}(X)$ 及关于 ν 的 σ- 有限集 $B\in\mathcal{B}(Y)$, 使 $E\subset A\times B$, 则 E 满足性质 (a) 及 (b). 于是，用通常的方法从简单函数过渡到非负可测函数，即可推得定理的结论. 证毕.

习题

6.12 设 X 为一拓扑空间，A 为 X 的一子集，则为要 I_A 为下半连续函数（相应地，上半连续函数），必须且只需 A 为开集（相应地，闭集）.

6.13 设 X 为一拓扑空间，f 及 g 为下半连续函数，则 $f+g$ 为下半连续函数.

6.14 设 X,Y,μ,ν 及 $\mu\times\nu$ 如定理 6.11. 令 f 为 $X\times Y$ 上的非负下半连续函数，则

(1) 函数 $x\mapsto\int f(x,y)\nu(dy)$ 及 $y\mapsto\int f(x,y)\mu(dx)$ 为 Borel 可测；

(2) $\int fd(\mu\times\nu)=\int\int f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)=\int\int f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

6.15 设 X 及 Y 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度. 则 μ 及 ν 为 σ- 有限测度，$\mathcal{B}(X\times Y)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$，且 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 上通常意义下的乘积测度 $\mu\times\nu$ 就是 Radon 乘积测度.

6.16 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为一列拓扑空间. 若每个 X_n 有可数基，则 $\mathcal{B}(\prod\limits_n X_n)=\prod\limits_n\mathcal{B}(X_n)$.

§7 波兰空间上有限测度的正则性

波兰 (Polish) 空间是概率论中经常用到的一类拓扑空间. 本节只介绍波兰空间的基本性质，有关这类空间的进一步性质可参看 Donald L.Cohn 《Measure Theory》,p.251—296.

7.1 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间. 如果在 X 上存在与拓扑相容的距离 ρ，使 (X,ρ) 为一完备可分距离空间，则称 X 为波兰空间.

7.2 命题 设 X 为一波兰空间，F 及 U 分别为 X 的非空闭子集和开子集. 则作为 X 的子空间，F 及 U 都是波兰空间.

证 设 ρ 为与拓扑相容的距离，使 (X,ρ) 为一可分完备距离空间. 显然，作为 X 的闭子空间，(F,ρ) 为可分且完备的，故 F

为波兰空间.

下面证明 U 为波兰空间. 为此, 设 U 不等于全空间. 在 U 上定义 $\rho_0(x,y)$ 如下

$$\rho_0(x,y)=\rho(x,y)+\left|\frac{1}{\rho(x,U^c)}-\frac{1}{\rho(y,U^c)}\right|,$$

其中

$$\rho(x,U^c)=\inf\{\rho(x,z):\ z\in U^c\}.$$

容易看出: ρ_0 是 U 上的一距离空间, 且 U 中序列 $\{x_n\}$ 按 ρ_0 收敛于 U 中的点 x 等价于 $\{x_n\}$ 按 ρ 收敛于 x. 这表明: 距离 ρ_0 与 U 的拓扑相容. 特别, (U,ρ_0) 是可分的.

现证 (U,ρ_0) 是完备距离空间. 设 $\{x_n\}$ 是 U 中序列, 且按 ρ_0 为基本列. 依 ρ_0 的定义知, $\{x_n\}$ 按距离 ρ 亦为基本列. 故由 (X,ρ) 的完备性, 存在 $x\in X$, 使 $\rho(x_n,x)\to 0$, $n\to\infty$. x 必属于 U. 因为否则的话, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,U^c)=0$, 这将导致 $\limsup\limits_{n,m\to\infty}\rho_0(x_n,x_m)=\infty$, 这与假定 $\{x_n\}$ 关于 ρ_0 为基本列矛盾. 既然 $x\in U$, 则由 $\rho(x_n,x)\to 0$ 推出 $\rho_0(x_n,x)\to 0$, (U,ρ_0) 的完备性得证. 因此, U 为波兰空间. 证毕.

7.3 命题 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间是波兰空间.

证 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 令 X^Δ 为其单点紧化, 则 X^Δ 为具可数基的紧 Hausdorff 空间. 从而存在 X^Δ 上一与拓扑相容的距离 ρ, 使 (X^Δ,ρ) 为可分紧距离空间 (见习题 1.40). 但紧距离空间显然是完备的, 故 X^Δ 为波兰空间. 单 X 是 X^Δ 中的开子集, 故由命题 7.2 知, X 为波兰空间, 证毕.

7.4 命题 设 $X_1,X_2,\cdots$ 为波兰空间的有限或可数序列, 则其乘积空间 $\prod\limits_n X_n$ 为波兰空间.

证 设 d_n 为 X_n 上的与拓扑相容的距离, 使 (X_n,d_n) 为可分完备距离空间. 不妨设对一切 $x,y\in X_n$, 有 $d_n(x,y)\le 1$(否则令

$d'_n(x,y)=d_n(x,y)\wedge 1$，则 d'_n 与 d_n 等价，且 (X_n,d'_n) 仍完备). 令

$$d(x,y)=\sum_n \frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n),$$

其中 $x,y\in\prod_n X_n$，则易见 d 为 $\prod_n X_n$ 上与拓扑相容的距离，且 $(\prod_n X_n,d)$ 为可分完备距离空间. 因此 $\prod_n X_n$ 为波兰空间. 证毕.

下一命题推广了命题 7.2.

7.5 命题 设 X 为一波兰空间，Y 为 X 的一子空间，则 Y 为波兰空间，当且仅当它是 $\mathcal{G}_\delta$- 集. 这里 $\mathcal{G}$ 表示 X 的开子集全体.

证 充分性. 设 $Y=\bigcap_n U_n$，其中每个 U_n 为 X 的开子集. 由于每个 U_n 为波兰空间 (命题 7.2)，故 $\prod_n U_n$ 为波兰空间 (命题 7.4). 令

$$\Delta=\{u=(u_1,u_2,\cdots)\in\prod_n U_n:\ u_j=u_k,\forall j,k\geq 1\},$$

则 Δ 为 $\prod_n U_n$ 中的闭集，从而为波兰空间 (命题 7.2). 令

$$i(y)=(y,y,\cdots),\ y\in\bigcap_n U_n=Y,$$

则 i 为 Y 到 Δ 的同胚映射. 故 Y 是波兰空间.

必要性. 设 Y 为 X 的波兰子空间. 令 d 及 d_0 分别是 X 及 Y 上的与拓扑相容的距离，使 (X,d) 及 (Y,d_0) 为可分完备距离空间. 设 V 为 Y 的子集，我们用 $d_0(V)$ 表示 V 在 d_0 下的直径，即 $d_0(V)=\sup_{x,y\in V}d_0(x,y)$. 令

$$V_n=\bigcup\left\{W:\ W\in\mathcal{G},W\cap Y\neq\emptyset,\ d_0(W\cap Y)\leq\frac{1}{n}\right\},\quad n\geq 1,$$

则每个 V_n 为开集. 往证

$$Y=\overline{Y}\cap(\bigcap_n V_n). \tag{7.1}$$

由于 d 与 d_0 在 Y 上诱导同一拓扑，故易见 $Y \subset \overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n)$. 再证相反的包含关系. 设 $x \in \overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n)$, 则由 V_n 的定义知，对每个 n, 存在 x 的开邻域 W_n, 使 $W_n \cap Y \neq \emptyset$, 且 $d_0(W_n \cap Y) \leq \frac{1}{n}$. 不妨设 (W_n) 是单调下降的集列. 另一方面，对每个 n, 存在 x 的开邻域 G_n, 使 $d(G_n) \leq \frac{1}{n}$, 不妨设 (G_n) 也是单调下降的. 由于 $x \in \overline{Y}$, 故 $G_n \cap Y \neq \emptyset$. 令 $U_n = W_n \cap G_n$, 则对每个 n, 有

$$x \in U_n,\ U_n \cap Y \neq \emptyset,\ d(U_n) \leq \frac{1}{n},\ d_0(U_n \cap Y) \leq \frac{1}{n}.$$

由于 (Y, d_0) 完备， $U_n \cap Y$ 单调下降，故存在唯一的 $y \in Y$, 使 $\bigcap_n F_n = \{y\}$(Cantor 定理), 这里 F_n 为 $U_n \cap Y$ 在 Y 中的闭包. 另一方面，由于 (X, d) 是完备的， U_n 单调下降，且 $x \in U_n, n \geq 1$, 故 $\bigcap_n \overline{U}_n = \{x\}$. 但显然有 $F_n \subset \overline{U}_n \cap Y$(因后者是 Y 中闭集，且包含 $U_n \cap Y$) , 故 $y \in \bigcap_n \overline{U}_n$, 从而 $y = x$, 特别，有 $x \in Y$. 因此，我们证明了 $\overline{Y} \cap (\bigcap_n V_n) \subset Y$. (7.1) 得证. 由 (7.1) 知： Y 为 $\mathcal{G}_\delta$- 集 (因 $\overline{Y}$ 作为距离空间 X 中的闭集是 $\mathcal{G}_\delta$- 集， $\bigcap_n V_n$ 也是 $\mathcal{G}_\delta$- 集). 证毕.

7.6 定理 设 X 为一波兰空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一有限测度，则 μ 为正则的.

证 令 ρ 为 X 上与拓扑相容的距离，使 (X, ρ) 为一可分完备距离空间. 由定理 3.6, 为证 μ 的正则性，只需证： $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K):\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}. \tag{7.2}$$

设 $\{x_n\}$ 为 X 的可数稠子集，令 $B(x, \delta)$ 表示以 x 为球心， δ 为半径的开球. 由于 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \frac{1}{n})$, 故对任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 k_n, 使

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_j, \frac{1}{n})\Big) > \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^n},\ n \geq 1.$$

令 K 为全有界集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{k_n}B(x_j,\frac{1}{n})$ 的闭包，则 K 为紧集 (因 (X,ρ) 为完备的). 我们有

$$\mu(K^c)\le\sum_n\mu\Big(\big(\bigcup_{j=1}^{k_n}B(x_j,\frac{1}{n})\big)^c\Big)<\sum_n\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon,$$

即有 $\mu(K)>\mu(X)-\epsilon$. 但 $\epsilon>0$ 是任意的，故 (7.2) 对 $A=X$ 成立. 现设 $A\in\mathcal{B}(X)$, 对任给 $\epsilon>0$, 先取紧集 K, 使 $\mu(K^c)<\epsilon$. 此外，由系 3.4 知，存在 A 的闭子集 F, 使 $\mu(F)>\mu(A)-\epsilon$. 令 $K_1=K\cap F$, 则 K_1 为紧集， $K_1\subset A$, 且有 $\mu(K_1)>\mu(A)-2\epsilon$, 故 (7.2) 得证. 证毕.

注 在定理 7.6 中, 如果 μ 不有限 (即使有 $\mu(K)<\infty,\forall K\in\mathcal{K}$), 则 μ 不一定正则. 例如，设 X 不是 σ- 紧的波兰空间， $\forall B\in\mathcal{B}(X)$, 若 B 为 σ- 有界集，令 $\mu(B)=0$, 否则令 $\mu(B)=\infty$, 则 (7.2) 对 $A=X$ 不成立.

习题

7.7 设 X 为 $\mathbb{R}$ 中无理数全体，则 X 按 $\mathbb{R}$ 诱导出的拓扑为波兰空间.

第六章 测度的收敛

本章研究测度序列的收敛，其中包括欧氏空间上 Borel 测度的收敛，距离空间上有限测度的弱收敛及局部紧 Hausdorff 空间上 Radon 测度的淡收敛.

§1 欧氏空间上 Borel 测度的收敛

设 μ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的 Radon 测度. 令 $a \in \mathbb{R}^d$, 若 $\mu(\{a\}) = 0$, 则称 a 为 μ 的**连续点**; 若 $\mu(\{a\}) > 0$, 则称 a 为 **μ-原子**. 显然 μ-原子全体为一至多可数集. 特别, μ 的连续集全体在 $\mathbb{R}^d$ 中稠. 我们用 $C(\mu)$ 表示 μ 的连续点集全体. 设 $a, b \in C(\mu), a < b$, 称 $(a, b]$ 为 μ 的**连续区间**. 我们用 $\mathcal{I}(\mu)$ 表示 μ 的连续区间全体.

1.1 定义 设 μ_n 及 μ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Radon 测度. 如果 $\forall (a, b] \in \mathcal{I}(\mu)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n((a, b]) = \mu((a, b])$, 则称序列 (μ_n)**淡收敛于**μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$; 如果进一步还有 $\sup\limits_n \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}^d) = \mu(\mathbb{R}^d)$, 则称 (μ_n)**弱收敛于**μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

下面两个定理分别给出了淡收敛及弱收敛的积分刻画. 这一刻画允许我们将这两个收敛概念推广到一般拓扑空间情形.

1.2 定理 为要 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 必须且只需

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu, \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^d). \tag{1.1}$$

这里 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上有紧支撑的连续函数全体.

证明 必要性. 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 依淡收敛的定义, 当 $(a, b] \in \mathcal{J}(\mu), f = I_{(a,b]}$ 时 (1.1) 成立. 现设 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. 取 $(a, b] \in \mathcal{I}(\mu)$, 使 μ 的支集含于 (a, b). 对给定 $\epsilon > 0$, 则易知存在 $\mathbb{R}^d$ 上的简单函数 f_ϵ, 使得 $[f_\epsilon \neq 0] \subset (a, b)$, 且为 $\mathcal{I}(\mu)$ 中元素的有限不交并, 满足

$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x) - f_\epsilon(x)| \leq \epsilon$. 则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu\right| &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_\epsilon| d\mu_n \\ &+ \limsup_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} f_\epsilon d\mu\right| + \int_{\mathbb{R}^d} |f_\epsilon - f| d\mu \\ &\leq 2\epsilon\mu((a,b]).\end{aligned}$$

故 (1.1) 成立.

充分性. 设 (1.1) 成立. 令 $(a,b] \in \mathcal{I}(\mu)$. 对给定 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta \in \mathbb{R}^d, \delta > 0$, 使得 $\mu(U) < \epsilon$, 此处

$$U = (a-\delta, a+\delta) \cup (b-\delta, b+\delta).$$

令 $g = I_{(a,b]}$. 易知存在 $g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 使得 $g_1 \leq g \leq g_2$, $g_2 - g_1 \leq I_U$. 我们有

$$\int g_1 d\mu \leftarrow \int g_1 d\mu_n \leq \mu_n((a,b]) \leq \int g_2 d\mu_n \to \int g_2 d\mu$$

$$\int g_1 d\mu \leq \mu((a,b]) \leq \int g_2 d\mu$$

$$\int (g_2 - g_1) d\mu \leq \mu(U) < \epsilon,$$

故有 $\mu_n((a,b]) \to \mu((a,b])$, 即 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

1.3 定理 假定 $\sup_n \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty, \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. 为要 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 必须且只需

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu, \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

证明 由于 $\mathbb{R}^d$ 上常值函数 1 属于 $C_b(\mathbb{R}^d)$, 且 $C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d)$, 故条件的充分性显然. 往证必要性. 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. 对给定 $\epsilon > 0$, 存在 $(a,b] \in \mathcal{I}(\mu)$, 使得 $\mu((a,b]^c) < \epsilon$. 由于 $\mu_n((a,b]) \to$

$\mu((a,b])$, 且 $\mu_n(\mathbb{R}^d)\to\mu(\mathbb{R}^d)$, 故存在 $n_0(\epsilon)$, 使得 $\forall n\ge n_0(\epsilon)$, 有 $\mu_n(((a,b])^c)<\epsilon$. 现设 $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, $|f|\le M<\infty$. 显然存在 $f_\epsilon\in C_c(\mathbb{R}^d)$, 使得 f_ϵ 在 $(a,b]$ 上等于 f, 且 $|f-f_\epsilon|\le 2M$. 由定理 1.2 知, (1.2) 对 f_ϵ 成立, 故有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left|\int f d\mu_n-\int f d\mu\right| &\le \limsup_{n\to\infty}\int|f-f_\epsilon|d\mu_n\\ &+\limsup_{n\to\infty}\left|\int f_\epsilon d\mu_n-\int f_\epsilon d\mu\right|+\int|f-f_\epsilon|d\mu\\ &\le 4M\epsilon,\end{aligned}$$

这表明 (1.2) 成立.

下一结果是 **Helly 定理**.

1.4 定理 设 (μ_n) 为 $\mathbb{R}^d$ 上一列有限 Borel 测度, $\sup\limits_n\mu_n(\mathbb{R}^d)<\infty$, 则存在 (μ_n) 的一子列 (μ_{n_k}), 使得 $\mu_{n_k}\xrightarrow{v}$ 某 μ.

证明 $\forall x\in\mathbb{R}^d$, 令

$$F_n(x)=\mu_n((-\infty,x]).\tag{1.3}$$

任取 $\mathbb{R}^d$ 中一可数稠子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$. 由对角线原理, 可选取 (F_n) 的一子列 (F_{n_k}), 使得 $\forall m\ge 1$, $\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x_m)$ 存在, 记为 $G(x_m)$. 令

$$F(x)=\inf\{G(x_m):\ x_m\ge x\},$$

则 $F(x_m)=G(x_m)$, $m\ge 1$, 且 F 为 $\mathbb{R}^d$ 上的右连续增函数. 此外, 容易证明: 对 F 的一切连续点 x, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x)=F(x)$. 令 μ 为由 F 产生的 $\mathbb{R}^d$ 上的测度 (见第一章 §5), 则显然有 $\mu_{n_k}\xrightarrow{v}\mu$. 证毕.

1.5 注 设 (μ_n) 为 $\mathbb{R}^d$ 上一列概率测度, (F_n) 为由 (1.3) 定义的 $\mathbb{R}^d$ 上的右连续增函数 (称为 μ_n 的 **分布函数**). 则 (μ_n) 淡收敛于某测度 μ(μ 不一定是概率测度) 等价于相应的分布函数序列 (F_n)**弱收敛** 于某一右连续增函数 F($F(x)$ 不一定等于 $\mu((-\infty,x])$);(μ_n)

弱收敛于某概率测度 μ 等价于 (F_n)全收敛于F(这时 F 是 μ 的分布函数).

下面的例子表明 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ 不蕴含 $F_n \xrightarrow{w} F$, 其中 $F_n(x) = \mu_n((-\infty, x]), F(x) = \mu((-\infty, x])$. 令 μ_n 为 $\mathbb{R}$ 上负荷于 $\{-\frac{1}{n}\}$ 的概率测度, 则 (μ_n) 淡收敛于零测度 μ, 但是有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, 而 $F(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

习题

1.6 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 且 $\sup\limits_n(\mathbb{R}^d) < \infty$, 则 $\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu.$$

这里 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上在无穷远处为 0 的连续函数全体.

1.7 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu, (a, b] \in \mathcal{I}(\mu)$. 则对 $\mathbb{R}^d$ 上一切连续函数 f 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f d\mu_n = \int_a^b f d\mu.$$

§2 距离空间上有限测度的弱收敛

设 X 为一距离空间 (或可距离化的拓扑空间),$C_b(X)$ 表示 X 上有界连续函数全体. 由定理 1.3 我们自然引进如下的定义:

2.1 定义 设 (X, ρ) 为一距离空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度. 如果对一切 $f \in C_b(X)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu,$$

则称 (μ_n)弱收敛于μ, 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

显然, 弱收敛的极限是唯一的. 此外, 由于 $C_b(X)$ 只与 X 的拓扑有关, 所以测度弱收敛概念并不依赖于距离的选取.

下一引理允许我们将有限测度的弱收敛归结为概率测度的弱收敛，其证明是不足道的.

2.2 引理 设 (X,ρ) 为一距离空间， $\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度. 令

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(X)},\quad P_n(A)=\frac{\mu_n(A)}{\mu_n(X)},\quad A\in\mathcal{B}(X).$$

则下列二断言等价：

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$;

(2) $P_n\xrightarrow{w}P$, $\mu_n(X)\to\mu(X)$.

2.3 定义 设 X 为一拓扑空间， μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一测度， $A\in\mathcal{B}(X)$. 若 $\mu(\partial A)=0(\partial A=\overline{A}\backslash\mathring{A}$ 为 A 的边界), 则称 A 为 μ-连续集.

下一定理给出了测度弱收敛的若干刻画.

2.4 定理 (X,ρ) 为一距离空间， $\mathcal{U}_\rho(X)$ 表示 X 上关于 ρ 一致连续的有界函数全体 (从而有 $\mathcal{U}_\rho(X)\subset C_b(X)$). 令 $\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度，则下列条件等价：

(1) $\mu\xrightarrow{w}\mu$;

(2) $\forall f\in\mathcal{U}_\rho(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int fd\mu_n=\int fd\mu$;

(3) $\forall$ 闭集 F, $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu(F)\le\mu(F)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$;

(4) $\forall$ 开集 G, $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n(G)\ge\mu(G)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$.

(5) 对任何 μ- 连续集 $A\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A)=\mu(A)$.

证 (1)⇒(2) 显然. 往证 (2)⇒(3). 假设 (2) 成立. 设 F 为闭集，令 $f_n(X)=\left(\dfrac{1}{1+\rho(x,F)}\right)^n, n\ge1$, 则 $f_n\in\mathcal{U}_\rho(X)$, 且 $f_n\downarrow I_F$, 故有

$$\mu(F)=\lim_{k\to\infty}\int f_kd\mu=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int f_kd\mu_n\ge\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F).$$

此外，令 $f\equiv 1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$, 故 (3) 成立. (3)⇔(4) 显然. (3)+(4)⇒(5) 由下式看出:

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)\le\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{A})\le\mu(\overline{A})=\mu(\overset{\circ}{A})$$
$$\le\liminf_{n\to\infty}\mu_n(\overset{\circ}{A})\le\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A).$$

剩下只需证 (5)⇒(1). 设 (5) 成立. 令 $f\in C_b(X)$, 给定 $\epsilon>0$, 选取 N 及实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{N-1}$, 使得

$$-\|f\|-1=a_0<a_1<\cdots<a_{N-1}<a_N=\|f\|+1,$$

且使 $\sup_i(a_i-a_{i-1})<\epsilon$ 及 $\mu([f=a_i])=0, 1\le i\le N-1$. 这里 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$. 令 $B_i=[a_{i-1}\le f(x)<a_i], i=1,2,\cdots,N$. 则 (B_i) 两两不相交，且 $\sum_i B_i=X, \mu(\partial B_i)=0, 1\le i\le N$. 此外，对一切 $x\in X$, 有 $|f(x)-\sum\limits_{i=1}^{N}a_iI_{B_i}(x)|<\epsilon$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|$$
$$\le\lim_{n\to\infty}(\mu_n(X)+\mu(X))\epsilon+\limsup_{n\to\infty}\left|\int\sum_{i=1}^{N}a_iI_{B_i}d(\mu_n-\mu)\right|$$
$$\le 2\mu(X)\epsilon+\sum_{i=1}^{N}|a_i|\limsup_{n\to\infty}|\mu_n(B_i)-\mu(B_i)|=2\mu(X)\epsilon.$$

由于 $\epsilon>0$ 是任意的，故 (1) 成立. 定理得证.

从现在起，我们只讨论概率测度的弱收敛.

2.5 引理 设 h 为距离空间 (X,ρ) 到另一距离空间 (X,d) 中的映射，令 $D(h)$ 表示 h 的不连续点全体，则 $D(h)$ 为 X 中的 Borel 可测集.

证 $\forall n,m\ge 1$, 令

$$A_{n,m}=\Big\{x\in X:\ \text{存在}\,y,z\in X,\ \text{使}\,\rho(x,y)<\frac{1}{n},$$
$$\rho(x,z)<\frac{1}{n}, d(h(y),h(z))\ge\frac{1}{m}\Big\},$$

则 $A_{n,m}$ 为 X 的开子集. 显然有 $D(h)=\bigcup_m\bigcap_n A_{n,m}$, 故 $D(h)$ 为 X 中的 Borel 可测集.

2.6 定义 设 (X,ρ) 为一距离空间, P 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一概率测度, h 为 (X,ρ) 到另一距离空间 (Y,d) 的映射. 如果 $P(D(h))=0$, 则称 h 为 **P- 连续的**.

2.7 命题 设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个距离空间, $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度, h 为 X 到 Y 中的 Borel 可测映射. 如果 $P_n\xrightarrow{w}P$ 且 h 为 P- 连续的, 则有 $P_nh^{-1}\xrightarrow{w}Ph^{-1}$. 这里 Ph^{-1} 为由 h 在 $(Y,\mathcal{B}(Y))$ 上导出的概率测度.

证 设 F 为 Y 中的闭集, 则有

$$\overline{h^{-1}(F)}\subset D(h)\cup h^{-1}(F). \tag{2.1}$$

于是由假定 $P(D(h))=0$ 知 $P(\overline{h^{-1}(F)})=P(h^{-1}(F))$. 再由假定 $P_n\xrightarrow{w}P$ 及定理 2.4 知:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}P_nh^{-1}(F)&=\limsup_{n\to\infty}P_n(h^{-1}(F))\\&\le\limsup_{n\to\infty}P_n(\overline{h^{-1}(F)})\le P(\overline{h^{-1}(F)})\\&=P(h^{-1}(F))=Ph^{-1}(F).\end{aligned}$$

这表明 $P_nh^{-1}\xrightarrow{w}Ph^{-1}$(见定理 2.4). 证毕.

下一命题是上一命题的重要推论, 它使我们对测度的弱收敛有了更进一步的认识.

2.8 命题 设 (X,ρ) 为一距离空间, $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度. 若 $P_n\xrightarrow{w}P$, 则对一切 P- 连续的有界 Borel 可测实值函数 f, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int fdP_n=\int fdP.$$

证 设 f 为 X 上的有界 Borel 可测函数, 则存在 $a>0$, 使 $|f|\le a$, 于是 f 为 $(X,\mathcal{B}(X))$ 到 $([-a,a],\mathcal{B}([-a,a]))$ 中的可测映射. 假定 f 为 P- 连续, 则由命题 2.7,$P_nf^{-1}\xrightarrow{w}Pf^{-1}$. 令

$g(t)=t, t\in[-a,a]$, 则 g 为 $[-a,a]$ 上的有界连续函数. 故由弱收敛定义知

$$\lim_{n\to\infty}\int gd(P_nf^{-1})=\int gd(Pf^{-1}).$$

因此, 由第三章习题 1.15 知 (注意 $g\circ f=f$)

$$\lim_{n\to\infty}\int fdP_n=\int fdP.$$

习题

2.9 证明命题 2.7 的如下推广: 设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个距离空间, $P,P_1,P_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的概率测度, 且 $P_n\xrightarrow{w}P$. 又设 $h,h_1,h_2,\cdots$ 为 X 到 Y 中的 Borel 可测映射, 如果存在 X 中的 Borel 可测集 $B,B_1,B_2,\cdots$, 使得

(1) $P(B^c)=0, P_n(B_n^c)=0, n=1,2,\cdots$;

(2) $x_n\in B_n, x\in B, \rho(x_n,x)\to 0\Rightarrow h_n(x_n)\to h(x)$,

则 $P_nh_n^{-1}\xrightarrow{w}Ph^{-1}$.

2.10 证明 (2.1) 式.

2.11 设 (X,ρ) 为距离空间, A 为 X 的一子集, P 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一概率测度, 则为要 A 为 P- 连续, 必须且只需 A 的示性函数 I_A 为 P- 连续函数.

§3 胎紧与 Prohorov 定理

在本节中, 我们恒假定 (X,ρ) 为可分距离空间. 我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上概率测度全体, 这时, 我们可以在 $\mathcal{P}(X)$ 上引入距离 d, 使得按距离 d 收敛等价于上一节定义的测度弱收敛. 本节的主要任务在于给出 $(\mathcal{P}(X),d)$ 中相对紧集的一个刻画.

3.1 命题 在 $\mathcal{P}(X)$ 上可以引入距离 d, 使得 $P_n\xrightarrow{w}P\Leftrightarrow d(P_n,P)\to 0$.

证 由于 (X,ρ) 是可分距离空间, 由 Tychonoff 嵌入定理, X 与一紧距离空间 (Y,ρ') 的某一子空间同胚. 我们不妨设 X 为

该子空间，于是距离 ρ' 限于 X 与 ρ 等价. 令 $\overline{X}$ 为 X 在 (Y,ρ') 中的闭包，则 $(\overline{X},\rho')$ 为紧空间，且为可分的，从而 $C(\overline{X})$ 为可分 Banach 空间 (见第五章习题 4.5). 这里 $C(\overline{X})$ 表示 $\overline{X}$ 上连续函数全体 (即有界连续函数全体). 另一方面，令 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 表示 X 上按距离 ρ' 一致连续有界函数全体，则易知： $f\in\mathcal{U}_{\rho'}(X)$, 当且仅当存在 $\overline{f}\in C(\overline{X})$, 使 f 为 $\overline{f}$ 在 X 上的限制. 这时还有 $\|f\|=\|\overline{f}\|$, 因此，$\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 与 $C(\overline{X})$ 同构，从而 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 可分. 令 $\{(f_1,f_2,\cdots\}$ 为 $\mathcal{U}_{\rho'}(X)$ 可数稠子集. 对 $P,Q\in\mathcal{P}(X)$, 令

$$d(P,Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}(1\wedge\Big|\int f_jdP-\int f_jdQ\Big|),$$

则 d 为 $\mathcal{P}(X)$ 上的距离，且由定理 2.4 知 $d(P_n,P)\to 0\Leftrightarrow P_n\overset{w}{\to}P$. 证毕.

3.2 注 若 X 为一波兰空间，则可证明 $\mathcal{P}(X)$ 按测度弱收敛拓扑也是波兰空间. 由于下面不需要这一结果，我们不在这里给出它的证明.

设 $\wedge$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的一子集，称 $\wedge$ 为**相对紧的**, 如果 $\wedge$ 的闭包 $\overline{\wedge}$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 中的紧集. 下面我们将给出 $\mathcal{P}(X)$ 中相对紧集的刻画. 为此，先引进胎紧的概念.

3.3 定义 设 $\wedge$ 为 $\mathcal{P}(X)$ 的一子集，如果对任给 $\epsilon>0$, 存在 X 的一紧子集 K, 使得 $\inf\{P(K):P\in\wedge\}\geq 1-\epsilon$, 则称 $\wedge$ 为**胎紧的 (tight)**.

3.4 定理 (Prohorov 定理) 设 $\wedge\subset\mathcal{P}(X)$.

(1) 若 $\wedge$ 是胎紧的，则 $\wedge$ 在 $\mathcal{P}(X)$ 中是相对紧的；

(2) 若 X 是波兰空间，则 $\wedge$ 的相对紧性蕴含 $\wedge$ 的胎紧性.

证 (1) 首先，将 X 嵌入到一紧距离空间 (Y,ρ') 中，并令 $\overline{X}$ 为 X 在 (Y,ρ') 中的闭包 (见命题 3.1 的证明), 则 $(\overline{X},\rho')$ 为紧空间. 现设 $\wedge$ 为胎紧的，令 (P_n) 为 $\wedge$ 中的一序列，要证存在子列 (P_{n_k}), 使 $P_{n_k}\overset{w}{\to}$ 某 P (这等价于 $\wedge$ 的相对紧性，因为 $\mathcal{P}(X)$ 是可

分距离空间). 对 $A \in \mathcal{B}(\overline{X})$, 令

$$Q_n(A) = P_n(A \cap X),$$

则易知 Q_n 为 $(\overline{X}, \mathcal{B}(\overline{X}))$ 上的测度 (注意 $\mathcal{B}(X) = X \cap \mathcal{B}(\overline{X})$). 设 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 为 $C(\overline{X})$ 的一可数稠子集, 我们不妨设 $f_1(x) = 1, \forall x \in \overline{X}$. 用对角线法则, 可选取 (Q_n) 的子列 (Q_{n_k}), 使得对每个 $j = 1, 2, \cdots$, 下述极限存在且有穷:

$$\lim_{k \to \infty} \int f_j dQ_{n_k} = l(f_j). \tag{3.1}$$

l 可唯一扩张成为 $C(\overline{X})$ 上的一正线性泛函. 由于 $l(1) = 1$, 故由 Riesz 表现定理, 存在 $Q \in \mathcal{P}(X)$, 使对一切 $f \in C(\overline{X})$, 有 $Q(f) = l(f)$. 于是由 (3.1) 不难看出, $Q_{n_k} \stackrel{w}{\to} Q$. 下面我们将证明: 存在 $P \in \mathcal{I}(X)$, 使 $P_{n_k} \stackrel{w}{\to} P$.

由于假定 $\wedge$ 是胎紧的, 故对每个 $m = 1, 2, \cdots$, 存在 X 的紧子集 K_m(从而也是 $\overline{X}$ 的紧子集), 使得 $P_{n_k}(K_m) > 1 - \frac{1}{m}, k = 1, 2, \cdots$. 显然有 $Q_{n_k}(K_m) = P_{n_k}(K_m)$, 于是有 (注意 $Q_{n_k} \stackrel{w}{\to} Q$)

$$Q(K_m) \geq \overline{\lim_k} Q_{k_k}(K_m) \geq 1 - \frac{1}{m}, \ m = 1, 2, \cdots.$$

设 $X_0 = \bigcup_m K_m$, 则 $Q(X_0) = 1$. 令

$$P(A) = Q(A \cap X_0), \ A \in \mathcal{B}(X),$$

则 $P \in \mathcal{P}(X)$, 且 $P(X_0) = 1$. 设 F 为 X 中的闭集, 则存在 $\overline{X}$ 中的闭集 A, 使 $F = A \cap X$, 于是我们有

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap X) = P(A \cap X_0) = Q(A \cap X_0) = Q(A) \\ &\geq \limsup_{k \to \infty} Q_{n_k}(A) = \limsup_{k \to \infty} P_{n_k}(A \cap X) = \limsup_{k \to \infty} P_{n_k}(F). \end{aligned}$$

故由定理 2.4 知, $P_{n_k} \stackrel{w}{\to} P$. (1) 得证.

(2) 不妨设 (X,ρ) 本身是完备的. 设 $\wedge$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的相对紧集. 对任给 $\delta > c$, 因 X 是可分的, 故存在可数多个直径为 δ 的开球 $A_1, A_2, \cdots$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$. 令 $B_n = \bigcup_{i\leq n} A_i$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 n, 使得 $\inf\{P(B_n) : P \in \wedge\} \geq 1-\epsilon$. 因为如若不然, 对每个 n, 存在 $P_n \in \wedge$, 使 $P_n(B_n) < 1-\epsilon$. 由于 (P_n) 的相对紧性, 存在子列 (P_{n_k}) 使 $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$, 这时有 (注意 B_n 为开集, 且 $B_n \uparrow X$)

$$P(B_n) \leq \liminf_{k\to\infty} P_{n_k}(B_n) \leq \liminf_{k\to\infty} P_{n_k}(B_{n_k}) \leq 1-\epsilon.$$

由上式得 $P(X) \leq 1-\epsilon$, 这不可能. 由上所证, 给定 $\epsilon > 0$, 对每个 $k = 1, 2, \cdots$, 存在有限多个直径为 $1/k$ 的开球 $A_{k1}, \cdots, A_{kn_k}$, 使得 $\inf\{P(\bigcup_{i=1}^{n_k} A_{ki}) : P \in \wedge\} \geq 1-\epsilon/2^k$. 如果令 K 为全有界集 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n_k} A_{ki}$ 的闭包, 则 K 为紧集 (因 (X,ρ) 是完备的), 且有 $\inf\{P(K) : P \in \wedge\} \geq 1-\epsilon$. 依定义, $\wedge$ 是胎紧的. (2) 得证.

习题

3.5 设 $(P_n) \subset \mathcal{P}(X)$. 若 (P_n) 为相对紧的, 且只有唯一的极限点 P, 则 $P_n \xrightarrow{w} P$.

§4 波兰空间上概率测度的弱收敛

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, (S,ρ) 为一可分距离空间. Ω 到 S 中的 Borel 可测映射称为 S- 值**随机元**. 对随机元 X, 令

$$\mu(A) = P(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(S),$$

则 μ 为 $(S, \mathcal{B}(S))$ 上的概率测度. 称 μ 为 X 的**分布**, 记为 $\mathcal{L}(X)$.

4.1 定义 设 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n\geq 1}$ 为一列概率空间, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, X_n 及 X 分别为 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P)$ 及 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 S- 值随机元, 其分布分别为 μ_n 及 μ. 如果 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 则称 (X_n)**依分布收敛于**X, 记为 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

设 X_n 及 X 都是定义于同一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 S- 值随机元. 如果 $\rho(X_n,X)\xrightarrow{\text{a.s.}}0$, 则称 (X_n) a.s. 收敛于X, 记为 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X$; 如果 $\rho(X_n,X)\xrightarrow{\text{P}}0$, 则称 (X_n)依概率收敛于 X, 记为 $X_n\xrightarrow{\text{P}}X$.

显然 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$. 下一命题表明 $X_n\xrightarrow{\text{P}}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

4.2 命题 设 (X_n) 及 X 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 S- 值随机元. 如果 $X_n\xrightarrow{\text{P}}X$, 则对任何 $f\in C_b(S)$, 有 $\lim_{n\to\infty}|f(X_n)-f(X)|=0$. 特别有 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

证明 由第二章定理 3.4 及 3.5 知: $X_n\xrightarrow{\text{P}}X$, 当且仅当对 (X_n) 的任一子列 $(X_{n'})$ 存在其子列 $(X_{n'_k})$, 使 $X_{n'_k}\xrightarrow{\text{a.s.}}X$. 于是 $X_n\xrightarrow{\text{P}}X$ 蕴含 $f(X_n)\xrightarrow{\text{P}}f(X)$, $\forall f\in C_b(S)$. 又由于 f 有界, 故有 $\lim_{n\to\infty}|f(X_n)-f(X)|=0$. 特别, 令 μ_n 及 μ 分别为 X_n 及 X 的分布, 则有

$$\mu_n(f)=P(f(X_n))\to P(f(X))=\mu(f).$$

这表明 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$, 即 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$. 证毕.

下一定理是 Skorohod 表现定理. 它表明波兰空间中的概率测度的弱收敛可以表现为随机元序列的 a.s. 收敛.

4.3 定理 设 S 为一波兰空间, $(\mu_n)_{n\geq 0}$ 为 $(S,\mathcal{B})$ 上的一列概率测度. 如果 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 则存在一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上的一列随机元 $(X_n)_{n\geq 0}$, 使得 μ_n 为 X_n 的分布, 且 $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X_0$.

证明 令 ρ 为 S 上一距离, 使得 S 为一可分完备距离空间. 取 $\Omega=[0,1],\mathcal{F}=\mathcal{B}([0.1])$, 并以 P 表示 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 首先, 对 S 作如下划分:

$$S=\sum_i S_i,\quad S_{j_1,\cdots,j_k}=\sum_{j=1}^{\infty}S_{i_1,\cdots,i_k,j},\quad k\geq 1,$$

使得 $\mu_n(\partial S_{i_1,\cdots,i_k})=0$, $n\geq 0$, 且

$$\sup\{\rho(x,y):x,y\in S_{i_1,\cdots,i_k}\}\leq 2^{-k},\ k\geq 1.$$

由于 S 可分，这样的划分存在 (例如可用中心在 S 的可列稠密集上半径小于 2^{-k-1} 的 μ_n- 连续球出发来划分). 其次，对 $[0,1]$ 作如下划分：

$$[0,1]=\sum_i \Delta_i^{(n)},\ \Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}=\sum_{j=1}^{\infty}\Delta_{i_1,\cdots,i_k,j}^{(n)},$$

$$|\Delta_{i_1,\cdots,i_k}^{(n)}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}),\ k\geq 1, n\geq 0,$$

其中 $|\Delta|$ 表示区间 Δ 的长度，$\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}$ 按词典编序法则排列.

我们定义 Ω 上的 S- 值随机元 $X_n^{(k)}$ 如下：

$$X_n^{(k)}=\begin{cases} x_{i_1\cdots i_k}, & \text{若}\omega\in\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}, S_{i_1\cdots i_k}^o\neq\emptyset. \\ x, & \text{若}\omega\in\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}, S_{i_1\cdots i_k}^o=\emptyset. \end{cases}$$

其中 x 是 S 中取定的一点，$x_{i_1\cdots i_k}$ 是 $S_{i_1\cdots i_k}$ 的内部 $S_{i_1\cdots i_k}^o$ 中的一点. 由于 $x_{i_1\cdots i_{k+p}}\in S_{i_1\cdots i_{k+p}}^o\subset S_{i_1\cdots i_k}^o$，故 $\rho(X_n^{(k)}(\omega), X_n^{(k+p)}(\omega))\leq 2^{-k}, \forall p\geq 1$. 由 S 的完备性，存在 S- 值随机元 X_n 使

$$\lim_{k\to\infty}X_n^{(k)}=X_n(\omega),\ \ \omega\in\Omega,\ n\geq 0.$$

往证 $X_n\overset{\text{a.s.}}{\to}X_0$. $\forall\epsilon>0$, 取 k 使 $2^{-k}<\epsilon/2$. 设 $\omega\in(\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(0)})^o$. 由于

$$|\Delta_{i_1\cdots i_j}^{(n)}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_j})\to\mu_0(S_{i_1\cdots i_j})=|\Delta_{i_j\cdots i_j}^{(0)}|,\ j\geq 1,$$

且由 $\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}$ 的排列方法，存在 n_k 使当 $n>n_k$ 时 $\omega\in\Delta_{i_1\cdots i_i}^{(n)}$ 及

$$X_n^{(k)}(\omega)=x_{i_1\cdots i_k},\ \ \forall n\geq 0,$$

$$\begin{aligned}\rho(X_n,X_0)&\leq\rho(X_n,X_n^{(k)})+\rho(X_n^{(k)},X_0^{(k)})+\rho(X_0^{(k)},X_0)\\ &\leq 2\cdot 2^{-k}<\epsilon,\end{aligned}$$

于是在 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i_1\cdots i_k}(\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(0)})^o$ 上 $X_n\to X_0$, 即有 $X_n\overset{\text{a.s.}}{\to}X_0$.

最后证 $\mathcal{L}(X_n)=\mu_n$. 令 $\mathcal{C}=\{S_{i_1\cdots i_k}, i_j\geq 1, 1\leq j\leq k, k\geq 1\}$, 则 $\mathcal{C}$ 为 π- 类，且

$$P(X_n^{(k+p)}\in S_{i_1\cdots i_k})=|\Delta_{i_1\cdots i_k}^{(n)}|=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}),\ \ \forall p\geq 1,$$
$$P(X_n\in S_{i_1\cdots i_k})=\mu_n(S_{i_1\cdots i_k}).$$

于是 $\mathcal{L}(X_n)$ 和 μ_n 在 $\mathcal{C}$ 上一致. 从而由单调类定理知 $\mathcal{L}(X_n)=\mu_n$.

习题

4.4 设 X_n 为 $(\Omega_n\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的 S- 值随机元， $a\in S$. 则 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}a\Longleftrightarrow X_n\xrightarrow{P}a$.

4.5 设 X_n 及 Y_n 是 $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$ 上的 S- 值随机元， X 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机元. 如果 $\forall\epsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(\rho(X_n,Y_n)\geq\epsilon)=0$, 则 $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X\Longleftrightarrow Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$.

4.6 设 S 为一波兰空间， (μ_n) 及 μ 为 $(S,\mathcal{B}(S))$ 上的概率测度，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$. 令 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一与 $([0,1],\mathcal{B}([0,1])$ 可测同构的测空间， P 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一概率测度. 假定 $\forall\omega\in\Omega,\{\omega\}\in\mathcal{F}$, 且 $P(\{\omega\})=0$, 则存在 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 S- 值随机元序列 (X_n) 及随机元 X, 使得 μ_n 及 μ 分别为 X_n 及 X 的分布，且 $X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

§5 局部紧 Hausdorff 空间上 Radon 测度的淡收敛

由定理 1.2 我们自然引进如下的定义：

5.1 定义 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间， $\mu,\mu_1,\mu_1,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 如果对一切 $f\in C_c(X)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int fd\mu_n=\int fd\mu,$$

则称 (μ_n)淡收敛于 μ, 记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$(我们将英文 "vague convergence" 译为淡收敛).

由 Riesz 表现定理知，淡收敛的极限是唯一的.

5.2 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 如果对一切 $f \in C_c(X)$, 下述极限存在且有穷:

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = l(f), \tag{5.1}$$

则存在 $\mathcal{B}(X)$ 上唯一的 Rodon 测度 μ, 使得 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

证 l 为 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, 故由 Riesz 表现定理, 存在唯一的 Radon 测度 μ 使 $\forall f \in C_c(X)$, 有 $l(f) = \mu(f)$. 故由 (4.1) 知 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

5.3 引理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, μ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上一 Radon 测度, 则对任一紧集 K, 存在一包含 K 的 μ-连续紧集.

证 由第五章习题 1.38 知, 存在一列紧集 (K_n), 使 $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}, n \geq 1$, 且 $X = \bigcup_n K_n$. 于是存在某个 n, 使 $K \subset \mathring{K}_n$. 令 ρ 为 X 上与拓扑相容的距离 (见第五章习题 1.40), 则存在 $\delta > 0$, 使 $\{x : \rho(x, K) \leq \delta\} \subset \mathring{K}_n$. 令 $F_t = \{x : \rho(x, K) \leq t\}$, 则 $\partial F_t = \{x : \rho(x, K) = t\}$. 由于 $\partial F_t \cap \partial F_s = \emptyset, t \neq s$, 且 $\partial F_t \subset \mathring{K}_n, 0 < t \leq \delta$, 故存在某 $t_0 \in (0, \delta)$, 使 $\mu(\partial F_{t_0}) = 0$(注意 $\mu(\mathring{K}_n) = \mu(K_n) < \infty$). 于是 F_{t_0} 为包含 K 的 μ- 连续紧集. 证毕.

5.4 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间, $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 考虑下列命题:

(1) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$;

(2) 对一切紧集 K, 有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$, 对一切相对紧开集 G, 有 $\mu(G) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G)$;

(3) 对一切 μ- 连续相对紧 Borel 集 B, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$.

则有 (1)⇒(2)⇒(3). 若 X 具可数基, 则上述三命题等价.

证 (1)⇒(2). 设 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu, K$ 为紧集. 对任给 $\epsilon > 0$, 由 μ 的正则性, 存在开集 $U \supset K$, 使 $\mu(U) < \mu(K) + \epsilon$. 于是由第五章命题

1.20(2), 存在 $f \in C_c(X)$, 使得 $I_K \leq f \leq I_U$. 因此我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) \leq \mu(U) < \mu(K) + \epsilon.$$

由于 ϵ 是任意的，故有 $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$. 现设 G 为相对紧开集. 对任给 $\epsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset G$, 使 $\mu(G) < \mu(K) + \epsilon$. 取 $f \in C_c(X)$, 使 $I_K \leq f \leq I_G$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f) \geq \mu(K) > \mu(G) - \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，故有 $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$.

(2)⇒(3) 由下式看出 (注意 $\overline{B}$ 为紧集，$\mathring{B}$ 为相对紧开集):

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) &\leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{B}) \leq \mu(\overline{B}) = \mu(\mathring{B}) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{B}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B).\end{aligned}$$

现在假定 X 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间. 为证 (1),(2) 及 (3) 等价，只需证 (3) ⇒(1). 设 (3) 成立，令 $f \in C_c(X)$, 由引理 5.3, 存在 μ- 连续紧集 C, 使 $C \supset \mathrm{supp}(f)$. 令

$$\nu_n(B) = \mu_n(B \cap C),\ \nu(B) = \mu(B \cap C),$$

则对任何 ν- 连续集 B, 易知 $B \cap C$ 为 μ- 连续集 (注意 $\partial(B \cap C) = \overline{B \cap C} \backslash \mathring{B} \cap \mathring{C} \subset \overline{B} \cap C \backslash \mathring{B} \cap \mathring{C} \subset (\partial B \cup \partial C) \cap C = (\partial B \cap C) \cup \partial C$), 从而由 (3) 知

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(B \cap C) = \mu(B \cap C) = \nu(B).$$

但 X 为可距离化空间，故由命题 2.4 知 $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$. 由于 $\mathrm{supp}(f) \subset C$, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f) = \nu(f) = \mu(f).$$

由于 $f\in C_c(X)$ 是任意的，故依定义有 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 证毕.

下一命题用弱收敛来刻画淡收敛.

5.5 命题 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，$\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度. 令 (G_k) 为一列相对紧开集，使 $G_k\uparrow X$. ((G_k) 的存在性见第五章习题 1.38.) 任取 $f_k\in C_c(X)$，使 $I_{G_k}\le f_k\le 1$ (见第五章命题 1.20(2)). 令 $\nu_{k,n}=f_k.\mu_n$，则下列二断言等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{v}$ 某 μ;

(2) $\forall k, \nu_{k,n} \xrightarrow{w}$ 某 ν_k, $n\to\infty$.

此外，这时有 $\nu_k=f_k.\mu$.

证 (1)⇒(2) 显然. 往证 (2)⇒(1). 设 (2) 成立，令 $f\in C_c(X)$，则由于 $\mathrm{supp}(f)$ 为紧集，故存在某 k_0，使 $\mathrm{supp}(f)\subset G_{k_0}$，从而有 $ff_{k_0}=f$. 因此，下述极限存在且有穷：

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(ff_{k_0})=\lim_{n\to\infty}\nu_{k_0,n}(f),$$

故由命题 5.2 知，(μ_n) 淡收敛于某 Radon 测度 μ. 命题最后一断言显然. 证毕.

作为命题 5.5 的一个重要推论，我们得到一族 Radon 测度关于淡收敛拓扑为相对紧的准则.

5.6 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，M 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的一族 Radon 测度. 则为要 M 关于淡收敛拓扑为相对紧的 (即 M 中的任一序列有淡收敛子列)，必须且只需对任何紧集 K，有 $\sup_{\mu\in M}\mu(K)<\infty$.

证 由定理 5.4 知，条件的必要性显然. 现证充分性. 设对任何紧集 K，有 $\sup_{\mu\in M}\mu(K)<\infty$. 令 (G_k) 为一列相对紧开集，$G_k\uparrow X$，$(f_k)\subset C_c(X)$，使 $I_{G_k}\le f_k\le 1, k\ge 1$. 对 $\mu\in M$，令 $\widetilde{\mu}_k=f_k.\mu$. 则对每个 k 及 $\mu\in M, \widetilde{\mu}_k$ 在紧集 $\mathrm{supp}(f_k)$ 的余集上为 0. 又由于 $\sup_{\mu\in M}\widetilde{\mu}_k(X)<\infty$，故由 Prohorov 定理 (定理 3.4) 易知：每个 $\widetilde{M_k}=\{\widetilde{\mu}_k:\ \mu\in M\}$ 按弱收敛拓扑是相对紧的 (参见引理 2.2). 现设 (μ_n) 为 M 中的一序列，则用对角线法则，可选 (μ_n)

的一子列 (μ_{n_j}), 使得 $\forall k \geq 1, f_k \cdot \mu_{n_j} \xrightarrow{w} 某\mu_k,\ j \to \infty$. 故由命题 5.5 知 $\mu_{n_j} \xrightarrow{w}$ 某 μ. 这表明 M 按淡收敛相对紧. 证毕.

为了进一步研究 Radon 测度的淡收敛, 我们需要下述引理.

5.7 引理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 令 B 为一紧集 (相应地, 开集). 则存在紧集 (相应地, 相对紧开集)B_n, 及 $f_n \in C_c(X), n \geq 1$, 使得

$$I_B \leq f_n \leq I_{B_n} \downarrow I_B (相应地, I_B \geq f_n \geq I_{B_n} \uparrow I_B).$$

证 由第五章习题 1.38, 存在相对紧开集序列 $(G_n, n \geq 1)$, 使 $G_n \uparrow X$. 设 B 为紧集, 则存在某 n_0, 使 $B \subset G_{n_0}$. 任取 X 上与拓扑相容的距离 ρ, 令

$$B^\epsilon = \{x : \rho(x, B) \leq \epsilon\},$$

则当 $\epsilon > 0$ 足够小, 有 $B^\epsilon \subset G_{n_0}$. 记 $B_n = B^{\frac{\epsilon}{n}}, n \geq 1$, 令

$$f_n(x) = 1 - \frac{n}{\epsilon}\left(\rho(x, B) \wedge \frac{\epsilon}{n}\right),$$

则 $f_n \in C_c(X), I_B \leq f_n \leq I_{B_n} \downarrow I_B$. 对相对紧开集 B, 类似可证引理结论. 对一般开集 B, 可考虑相对紧开集 G_n. 我们将证明细节留给读者.

下一定理表明: 淡收敛拓扑是可以距离化的.

5.8 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间, 令 $\mathcal{R}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上 Radon 测度全体, 则 $\mathcal{R}$ 按淡收敛拓扑为波兰空间.

证 设 $\mathcal{C}$ 为 X 的可数基, 不妨设 $\mathcal{C}$ 对有限并闭, 且 $\mathcal{C}$ 中的元为相对紧的. 由引理 5.7, 对 $C \in \mathcal{C}$, 存在 $g_n \in C_c(X)$, 使 $0 \leq g_n \uparrow I_C$. 由于 $\mathcal{C}$ 中元素是可数的, 我们可以把相应于所有 $C \in \mathcal{C}$ 的序列 (g_n) 合并排列为 $f_1, f_2, \cdots$, 则 Radon 测度 μ 显然由 $\{\mu(f_k), k = 1, 2, \cdots\}$ 唯一决定, 因后者决定了 μ 在 $\mathcal{C}$ 上的值.

由定理 5.6 容易证明: $\mu_n \xrightarrow{v}$ 某 μ, 当且仅当对一切 $k \geq 1, \mu_n(f_k)$ 收敛于某实数 c_k. 于是若令

$$d(\mu, \mu') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\left[1 - \exp\{-|\mu(f_k) - \mu'(f_k)|\}\right],\ \mu, \mu' \in \mathcal{R},$$

则 d 为 $\mathcal{R}$ 上的距离，且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu \Leftrightarrow d(\mu_n,\mu) \to 0$. 此外，容易验证 $(\mathcal{R},d)$ 为可分完备距离空间. 证毕.

习题

5.9 补足引理 5.7 及定理 5.8 的证明细节.

5.10 设 X 为一具可数基局部紧 Hausdorff 空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的 Radon 测度，且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. 则对任何有紧支撑的 μ-连续有界 Borel 可测函数 f, 有 $\mu_n(f) \to \mu(f)$.(提示：利用命题 5.5 及命题 2.8.)

5.11 设 X 为一具可数基局部紧 Hausdorff 空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$, 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限测度 (从而为 Radon 测度), 则下列断言等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$;

(2) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, 且 $\mu_n(X) \to \mu(X)$;

(3) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, $\inf\{\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(K^c) : K\text{为紧集}\} = 0$.

第七章 概率论基础选讲

由于本书不是一部概率论教材，我们不打算系统介绍概率论的内容. 本章着重介绍与测度论有关的一些重要概率论基础问题.

§1 事件和随机变量的独立性

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间. 在概率论中，我们称 $\mathcal{F}$ 中的元为 (随机) 事件，称 Ω 为 **必然事件**，Ω 上的 $\mathcal{F}$- 可测函数称为 **随机变量**. 设 ξ 为一随机变量，若 ξ 关于 P 的积分存在，则称积分 $\int_\Omega \xi dP$ 为 ξ 的 **数学期望**，记为 $E[\xi]$. 概率为 1 成立的性质称为 **几乎必然** 成立，简称为 a.s. 成立.

事件的独立性概念是概率论的最重要的概念之一.

1.1 定义 设 A, B 为二事件，称 A 与 B **独立**，是指

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

更一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为事件，称 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 相互独立，是指对任何 $m \le n$ 及 $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m \le n$，有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{k_j}).$$

注意：$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 两两独立不蕴含它们相互独立.

1.2 定义 设 $\mathcal{D} = \{A_t, t \in T\}$ 为一族事件. 如果对 T 的任何非空子有限子集 S，有 $P(\bigcap_{s \in S} A_s) = \prod_{s \in S} P(A_s)$，则称 $\mathcal{D}$ 中事件相互独立. 设 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为一族事件，如果从每个事件类 $\mathcal{C}_t$ 中任取一事件 A_t，$\{A_t, t \in T\}$ 中事件相互独立，则称 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为 **独立 (事件) 类**. 设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为一族随机变量. 若 $\{\sigma(\xi_t), t \in T\}$ 为独立事件类，则称 $\{\xi_t, t \in T\}$ **相互独立**.

1.3 定理(独立类的扩张) 设 $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ 为一独立事件类，如果每个 $\mathcal{C}_t$ 为 π- 类，则 $\{\sigma(\mathcal{C}_t), t \in T\}$ 为独立事件类.

证 不妨设 Ω 属于每个 $\mathcal{C}_t$(因为添加必然事件 Ω 不影响独立性). 设 $n \geq 2, S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ 为 T 的有限子集，令

$$\mathcal{D} = \Big\{A \in \mathcal{F} : P(A \cap \bigcap_{j=2}^{n} C_j) = P(A) \cdot \prod_{j=2}^{n} P(C_j), \quad \forall C_j \in \mathcal{C}_{s_j}, 2 \leq j \leq n\Big\},$$

则易见 $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}_{s_1}$，且 $\mathcal{D}$ 为 λ- 类，故由单调定理知 $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{C}_{s_1})$. 这表明 $\{\sigma(\mathcal{C}_{s_1}), \mathcal{C}_{s_2}, \cdots, \mathcal{C}_{s_n}\}$为独立事件类. 依此类推，$\{\sigma(\mathcal{C}_{s_1}), \sigma(\mathcal{C}_{s_2}), \cdots, \sigma(\mathcal{C}_{s_n})\}$ 为独立事件类. 由于 S 为 T 的任意非空有限子集，故 $\{\sigma(\mathcal{C}_t), t \in T\}$ 为独立事件类. 证毕.

下一命题给出了随机变量相互独立性的判别准则.

1.4 命题 设 $\{\xi_t, t \in T\}$ 为一族随机变量，则为要它们相互独立，必须且只需对 T 的任一有限子集 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$，及 $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$，有

$$P(\xi_{s_1} \leq x_1, \cdots, \xi_{s_n} \leq x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(\xi_{s_j} \leq x_j).$$

证 令 $\mathcal{C}_t = \{[\xi_t \leq x], x \in \mathbb{R}\}, t \in T$，则 $\mathcal{C}_t$ 为 π- 类. 于是由定理 1.3 立刻推得命题的结论.

下一定理称为 **Borel-Cantelli** 引理，它在概率论中非常有用.

1.5 定理 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为一列事件.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则 $P(A_n, \text{i.o.})=0$;

(2) 反之，若 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为相互独立，则 $P(A_n, \text{i.o.})=0$ 蕴含 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

这里 $\{A_n, \text{i.o.}\}$ 表示 $\{A_n, n \geq 1\}$ 中有无穷多个事件发生 (i.o. 是 infinitely often 的缩写)，即有 $\{A_n, \text{i.o.}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

证 (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 由于 $\forall k \geq 1, \{A_n, \text{i.o.}\} \subset \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, 从而

$$P(A_n, \text{i.o.}) \leq P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0,\ k \to \infty.$$

(1) 得证.

(2) 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 相互独立. 假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 则对任何 $m > k$ 有 (注意: $1 - x \leq e^{-x}, \forall 0 \leq x \leq 1$)

$$\begin{aligned}
1 - P(\bigcup_{n=k}^{m} A_n) &= P((\bigcup_{n=k}^{m} A_n)^c) = P(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) \\
&= \prod_{n=k}^{n} P(A_n^c) = \prod_{n=k}^{m} (1 - P(A_n)) \\
&\leq \exp\{-\sum_{n=k}^{m} P(A_n)\}.
\end{aligned}$$

因此, 对一切 $k \geq 1$, 有

$$\begin{aligned}
0 \leq 1 - P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) &= 1 - \lim_{m \to \infty} P(\bigcup_{n=k}^{m} A_n) \\
&\leq \lim_{m \to \infty} \exp\{-\sum_{n=k}^{m} P(A_n)\} = 0,
\end{aligned}$$

从而有

$$P(A_n, \text{i.o.}) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n \to \infty} A_n) = 1.$$

这反证了 (2). 证毕.

1.6 系 (Borel 0-1 律) 设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为相互独立事件，则依 $\sum_n P(A_n) < \infty$ 或 $= \infty$ 而有 $P(A_n, \text{i.o.})=0$ 或 1.

下一引理是 Borel-Cantelli 引理的一个简单应用.

1.7 引理 设 (ξ_n) 为一列非负实值随机变量，则存在一正实数序列 (c_n)，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\xi_n < \infty, \text{a.e.}$.

证 取一正实数列 (a_n)，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n > a_n) < \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理， $\limsup_{n\to\infty} P(\xi_n > a_n) = 0$. 这表明，对几乎所有 ω，存在整数 $N(\omega)$，使得当 $n \geq N(\omega)$ 时，有 $\xi_n(\omega) \leq a_n$. 令 $c_n = (2^n a_n)^{-1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\xi_n < \infty, \text{a.e.}$.

1.8 定义 设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为一列随机变量，令

$$\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\xi_j, j > n\},$$

称 $\mathcal{D}$ 为 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 的**尾 σ- 代数**，$\mathcal{D}$ 中的元素称为 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 的**尾事件**.

下一定理通常称为 **Kolmogrov 0-1 律**.

1.9 定理 独立随机变量序列的尾事件的概率为 0 或 1.

证 设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立随机变量序列. 对任何 $n \geq 1$，由定理 1.3 知： $\sigma(X_j, 1 \leq j \leq n)$ 与 $\sigma(X_j, j > n)$ 独立. 从而 $\sigma(\xi_j, 1 \leq j \leq n)$ 与 $\mathcal{D}$ 独立 ($\mathcal{D}$ 是尾 σ- 代数). 令 $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_i, 1 \leq j \leq n)$，则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 但 $\mathcal{A}$ 为 π- 类，故由定理 1.3 知 $\sigma(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 显然 $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\xi_j, j \geq 1)$，故 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}$ 独立. 于是对任何 $D \in \mathcal{D}$，我们有 $P(D) = P(D \cap D) = P(D)^2$，从而 $P(D) = 0$ 或 1. 证毕.

习题

1.10 设 $(X_n, n \geq 1)$ 为独立随机变量序列，则

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 与 $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 为退化随机变量 (即 a.s. 等于某一常数);

(2) 为要 $P(X_n \to 0)=1$, 必须且只需对任何 $C>0$, 有 $\sum_n P(|X_n|>C)<\infty$.(提示: 利用 Borel-Cantelli 引理.)

1.11 设 $(X_n, 1\le i\le n)$ 为独立随机变量序列. 若每个 X_i 非负或每个 X_i 可积, 则有 $E[\prod_{i=1}^n X_i]=\prod_{i=1}^n E[X_i]$. (提示: 从简单随机变量过渡到非负随机变量.)

1.12 设 $(X_n, n\ge 1)$ 为独立实值随机变量序列, $(g_n, n\ge 1)$ 为一列 Borel 可测函数, 则 $(g_n(X_n), n\ge 1)$ 为独立随机变量序列.

1.13(测度的卷积) 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的测度. 令 $g(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i, x_i\in\mathbb{R}^d$(这里是向量相加), 则 g 为 $(\mathbb{R}^d)^n$ 到 $\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 可测映射. 令 $\mu*\cdots*\mu_n=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)g^{-1}$(见第三章习题 1.15), 称 $\mu_1*\cdots*\mu_n$ 为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的卷积.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为相互独立的实值随机变量, 令 $Y=\sum_{i=1}^n X_i$. (1) 试证 $PY^{-1}=PX_1^{-1}*\cdots*PX_n^{-1}$;(2) 用 $(X_i, 1\le i\le n)$ 的分布函数表示 Y 的分布函数

1.14 设 X 及 Y 为相互独立可积随机变量, 且 $E[X]=0$, 则 $E[|X+Y|]\ge E[|Y|]$. (提示: $|y|=|E(y+X)|\le E|y+X|$.)

1.15 设 $(X_n, n\ge 1)$ 为独立同分布 (i.i.d.) 随机变量序列, 每个 X_n 服从参数为 1 的指数分布 (即 $P(X_n>x)=e^{-x}, x\ge 0$). 证明:

$$(1)\ P(X_n>\alpha\log n, \text{i.o.})=\begin{cases}0, & 若\alpha>1,\\ 1, & 若\alpha\le 1;\end{cases}$$

(2) 令 $L=\limsup_{n\to\infty}(X_n/\log n)$, 则 $P(L=1)=1$.(提示: 证明 $P(L\ge 1)=1, P(L>1)=0$.)

1.16 设 $(X_n, n\ge 1)$ 为 i.i.d. 标准正态随机变量序列. 证明:

$$(1)\ P(X_n>\alpha\sqrt{2\log n}, \text{i.o.})=\begin{cases}0, & 若\alpha>1,\\ 1, & 若\alpha\le 1;\end{cases}$$

(2) 令 $L=\limsup_{n\to\infty}(X_n/\sqrt{2\log n})$, 则 $P(L=1)=1$.

§2 条件数学期望与条件独立性

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，A 和 B 为两个事件，且 $P(A)>0$. 在 A 发生的条件下 B 发生的概率显然等于 $P(AB)/P(A)$，我们称之为 B 关于 A 的 **条件概率**，记为 $P(B|A)$.

设 $(B_j)_{1\le j\le m}$ 为 Ω 的一个有限划分，且 $B_j\in\mathcal{F}, P(B_j)>0, 1\le j\le m$. 令 $\mathcal{G}$ 为由 (B_j) 生成的 σ- 代数. 对一可积随机变量 X，令

$$E[X|\mathcal{G}]=\sum_{j=1}^{m}\frac{E[XI_{B_j}]}{P(B_j)}I_{B_j},$$

称 $E[X|\mathcal{G}]$ 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的 **条件 (数学) 期望**. 如果 $(A_i)_{1\le i\le n}$ 是 Ω 的一个有限划分，且 $A_i\in\mathcal{F}, 1\le i\le n, X=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}$ 为一简单随机变量，则易知

$$E[X|\mathcal{G}]=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_iP(A_i|B_j)I_{B_j}.$$

$E(X|\mathcal{G})$ 是一 $\mathcal{G}$- 可测随机变量，满足：

$$E[E[X|\mathcal{G}]I_B]=E[XI_B],\qquad \forall B\in\mathcal{G}. \tag{2.1}$$

下面我们将条件期望推广到一般随机变量及 σ- 代数情形. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 设 X 为数学期望存在的随机变量，令 $\nu=X.P$ 为 X 关于 P 的不定积分，即

$$\nu(A)=\int_A XdP,\ A\in\mathcal{F},$$

则 ν 为符号测度，且 ν 关于 P 绝对连续. 若将 ν 及 P 都限于 $(\Omega,\mathcal{G})$，则仍有 $\nu\ll P$. 令 Y 为 ν 关于 P 在 $(\Omega,\mathcal{G})$ 上的 Radon-Nikodym 导数 (见第三章定理 3.11)，则 Y 为 $\mathcal{G}$ 可测随机变量，且有

$$E[YI_B]=E[XI_B],\ \forall B\in\mathcal{G},$$

我们称随机变量 Y 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的**条件(数学)期望**. 由第三章命题 1.8 知: 在 P- 等价意义下, 条件期望 Y 是唯一确定的, 我们把它记为 $E[X|\mathcal{G}]$, 它由 (2.1) 所刻画.

若 $B \in \mathcal{F}$, 则令 $P[B|\mathcal{G}] = E[I_B|\mathcal{G}]$, 并称 $P[B|\mathcal{G}]$ 为 B 关于 $\mathcal{G}$ 的**条件概率**.

2.1 定理 条件期望有如下基本性质:

(1) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$;

(2) 若 X 为 $\mathcal{G}$- 可测, 则 $E[X|\mathcal{G}] = X$, a.s.;

(3) 设 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, 则 $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$, a.s.;

(4) $E[X|\mathcal{G}] = [E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}]$, a.s.;

(5) $X \geq Y$ a.s.$\Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$, a.s.,;

(6) 设 c_1, c_2 为实数, $X, Y, c_1X + c_2Y$ 的期望存在, 则

$$E[c_1X + c_2Y|\mathcal{G}] = c_1E[X|\mathcal{G}] + c_2E[Y|\mathcal{G}], \text{a.s.},$$

如果右边和式有意义;

(7) $|E[X|\mathcal{G}]| \leq E[|X||\mathcal{G}]$, a.s.;

(8) 设 $0 \leq X_n \uparrow X$, a.s., 则 $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$, a.s.;

(9) 设 X 及 XY 的期望存在, 且 Y 为 $\mathcal{G}$- 可测, 则

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}], \text{ a.s.}; \tag{2.2}$$

(10) (条件期望的平滑性) 设 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数, 且 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, 则

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1], \text{ a.s.}. \tag{2.3}$$

(11) 若 X 与 $\mathcal{G}$ 相互独立 (即 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{G}$ 相互独立), 则有 $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$, a.s..

证 (1)—(7) 容易由条件期望定义直接看出.

(8) 由 (5) 知, $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow Y$,a.s.,$Y$ 为一 $\mathcal{G}$- 可测随机变量. 于是, 对一切 $B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B YdP = \lim_{n\to\infty} \int_B E[X_n|\mathcal{G}]dP = \lim_{n\to\infty} \int_B X_n dP,$$

从而 $Y = E[X|\mathcal{G}]$, a.s..

(9) 不妨设 X 及 Y 皆为非负随机变量. 首先设 $Y = I_A, A \in \mathcal{G}$, 则 $Y[X|\mathcal{G}]$ 为 $\mathcal{G}$- 可测, 且对一切 $B \in \mathcal{G}$, 有

$$\int_B YE[X|\mathcal{G}]dP = \int_{A\cap B} E[X|\mathcal{G}]dP = \int_{A\cap B} XdP$$
$$= \int_B I_A dP = \int_B YXdP,$$

故 (2.2) 成立. 然后利用 (8) 即可由简单随机变量过渡到一般非负随机变量.

(10) 设 $B \in \mathcal{G}_1$, 则

$$\int_B E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]dP = \int_B E[X|\mathcal{G}_2]dP = \int_B XdP,$$

故有 (2.3).

(11) 不妨设 X 为非负随机变量. 设 $A \in \mathcal{G}$, 由于 I_A 与 X 相互独立, 故由习题 1.11 知

$$\int_A E[X]dP = E[X]P(A) = E[XI_A] = \int_A XdP,$$

故 $E[X] = E[X|\mathcal{G}]$, a.s..

关于条件期望, 我们也有相应的单调收敛定理, Fatou 引理, 控制收敛定理, Hölder 不等式及 Minkowski 不等式, 它们的证明与第三章关于积分情形相应结果的证明类似. 因此, 下面我们只叙述结果而略去证明. 注意: 对概率空间情形, a.s. 收敛总蕴含依概率收敛.

在下面几个定理中, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数.

2.2 定理 (单调收敛定理) 设 (X_n) 为随机变量序列, 且每个 X_n 的期望存在.

(1) 设 $X_n \uparrow X$, a.s., 且 $E[X_1] > -\infty$, 则 X 的期望存在, 且 $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$, a.s.;

(2) 设 $X_n \downarrow X$, a.s., 且 $E[X_1] < \infty$, 则 X 的期望存在，且 $E[X_n|\mathcal{G}] \downarrow E[X|\mathcal{G}]$, a.s..

2.3 定理 (Fatou 引理) 设 (X_n) 为随机变量序列，且每个 X_n 的期望存在.

(1) 若存在随机变量 Y, 使 $E[Y] > -\infty$, 且对每个 $n \geq 1$, 有 $X_n \geq Y$, a.s. 则 $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}];$$

(2) 若存在随机变量 Y, 使 $E[Y] < \infty$, 且对每个 $n \geq 1$, 有 $X_n \leq Y$, a.s., 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\limsup_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \geq \limsup_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}].$$

2.4 定理 (控制收敛定理) 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$(相应地， $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$), 若存在非负可积随机变量 Y, 使 $|X_n| \leq Y$, a.s., 则 X 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$, a.s.)(相应地， $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[|\mathcal{G}]$).

下一定理是控制收敛定理的推广形式.

2.5 定理 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$(相应地，$X_n \xrightarrow{\text{P}} X, Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$), 其中 Y 及每个 Y_n 为非负可积随机变量. 如果对 $n \geq 1$, $|X_n| \leq Y_n$, a.s. 且 $E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[Y|\mathcal{G}]$(相应地， $E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[Y|\mathcal{G}]$), 则有 $E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$(相应地， $E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} 0$). 特别有 $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X|\mathcal{G}]$(相应地， $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[X|\mathcal{G}]$).

证 只需考虑 a.s. 收敛情形. 令 $Z_n = Y_n + Y - |X_n - X|$, 则 $Z_n \geq 0$, 且 $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 2Y$. 故由 Fatou 引理得

$$2E[Y|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[Z_n|\mathcal{G}] = 2E[Y|\mathcal{G}] - \limsup_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}],$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}] = 0$. 证毕.

2.6 定理 (Hölder 不等式) 设 $1 < p,q < \infty, 1/p + 1/q = 1$, 则

$$E[|XY||\mathcal{G}] \leq (E[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p}(E[|Y|^q|\mathcal{G}])^{1/q}.$$

2.7 定理 (Minkowski 不等式)　设 $p \geq 1$, 则

$$(E[|X+Y|^p|\mathcal{G}])^{1/p} \leq (E[|X|^p|\mathcal{G}])^{1/p} + (E[|Y|^p|\mathcal{G}])^{1/p}.$$

下面将条件期望的概念推广到最一般的情形 (见严加安 [10]).

2.8 定义　设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, X 为一随机变量, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 若 $E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}]$ a.s. 有定义 (即 $P[X^+|\mathcal{G}] = \infty, E[X^-|\mathcal{G}] = \infty) = 0$, 则称 X 关于 $\mathcal{G}$ 的 **条件期望存在**, 并令 (约定 $\infty - \infty = 0$)

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}].$$

我们称 $E[X|\mathcal{G}]$ 为 X 关于 $\mathcal{G}$ 的 **条件期望**.

若 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, 则 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 当且仅当 X 的期望存在. 此外, 任何 $\mathcal{G}$ 可测的随机变量 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[X|\mathcal{G}] = X$, a.s..

下一定理给出了条件期望存在的随机变量的一个有用刻画.

2.9 定理　下列二断言等价:

(1) X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在;

(2) 存在 $\mathcal{G}$ 可测实值随机变量 $\xi, |\xi| > 0$, a.s., 使 ξX 的期望存在.

证　(1)⇒(2). 设 (1) 成立. 令

$$A = [E[X^+|\mathcal{G}] = \infty], \qquad B = [E[X^-|\mathcal{G}] < \infty],$$

则 $P(A \cap B) = 0$. 令 $\eta = I_{A^c} - I_A$, 则 $|\eta| = 1, \eta$ 为 $\mathcal{G}$- 可测, 且有 $(\eta X)^+ = \eta^+ X^+ + \eta^- X^-$, 故有

$$E[(\eta X)^+|\mathcal{G}] = I_{A^c} E[X^+|\mathcal{G}] + I_A E[X^-|\mathcal{G}] < \infty, \text{ a.s.}.$$

令 $\xi = \eta/(1 + E[(\eta X)^+|\mathcal{G}])$, 则 $E[(\xi X)^+|\mathcal{G}] < 1$, a.s.. 特别, $E[(\xi X)^+] < 1$, 于是 ξX 的期望存在.

(2)⇒(1) 由下一定理的 (1) 推得.

下一定理是定理 2.1 的推广.

2.10 定理 2.8 定义的条件期望有下列性质:

(1) 设 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 则对任何 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量 ξ, ξX 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望也存在, 且有

$$E[\xi X|\mathcal{G}]=\xi E[X|\mathcal{G}], \text{ a.s.}. \tag{2.4}$$

(2) 设 X_1, X_2 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 若 X_1+X_2 及 $E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s. 有意义, 则 X_1+X_2 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有

$$E[X_1+X_2|\mathcal{G}]=E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}], \text{ a.s.}. \tag{2.5}$$

(3) 设 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数, 且 $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$. 若 X 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在, 则 X 关于 $\mathcal{G}_2$ 的条件期望存在, $E[X|\mathcal{G}_2]$ 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在, 且有

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=E[X|\mathcal{G}_1]. \tag{2.6}$$

证 (1) 我们有 $(\xi X)^+=\xi^+X^++\xi^-X^-, (\xi X)^-=\xi^+X^-+\xi^-X^+$. 于是有

$$E[(\xi X)^+|\mathcal{G}]=\xi^+E[X^+|\mathcal{G}]+\xi^-E[X^-|\mathcal{G}], \tag{2.7}$$

$$E[(\xi X)^-|\mathcal{G}]=\xi^-E[X^+|\mathcal{G}]+\xi^+E[X^-|\mathcal{G}]. \tag{2.8}$$

由于假定 $E[X^+|\mathcal{G}]-E[X^-|\mathcal{G}]$a.s. 有意义, 故 ξX 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在. 由 (2.7) 及 (2.8) 推得 (2.4).

(2) 令 $A=[E[X_1|\mathcal{G}]=-\infty], B=[E[X_2|\mathcal{G}]=-\infty]$, 则依假定, $E[X_1|\mathcal{G}]+E[X_2|\mathcal{G}]$ a.s. 有意义, 故在 A 上 a.s. 有 $E[X_1|\mathcal{G}]<\infty$, 在 B 上 a.s. 有 $E[X_1|\mathcal{G}]<\infty$, 于是有

$$I_AE[X_1^+|\mathcal{G}]<\infty, \text{ a.s.}, \ I_BE[X_1^+|\mathcal{G}]<\infty, \text{ a.s.}. \tag{2.9}$$

令 $\xi=I_{A\cup B}-I_{A^c\cap B^c}$, 则 $|\xi|=1$, ξ 为 $\mathcal{G}$- 可测. 记 $Y=\xi(X_1+X_2)$, 我们有

$$Y^+\leq\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-),$$

$$
\begin{aligned}
E[Y^+|\mathcal{G}] &\le E[\xi^+(X_1^+ + X_2^+) + \xi^-(X_1^- + X_2^-)|\mathcal{G}] \\
&= I_{A\cup B}(E[X_1^+|\mathcal{G}] + E[X_2^+|\mathcal{G}]) \\
&\quad + I_{A^c\cap B^c}(E[X_1^-|\mathcal{G}] + E[X_2^-|\mathcal{G}]) < \infty, \text{ a.s.}. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

特别，Y 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在．于是由 (1) 知 $X_1 + X_2$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在．此外，令

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \xi^+(X_1^+ + X_2^+) + \xi^-(X_1^- + X_2^-), \\
Z_2 &= \xi^-(X_1^+ + X_2^+) + \xi^+(X_1^- + X_2^-),
\end{aligned}
$$

则 $Y = Z_1 - Z_2$，且由 (2.10) 知 $E[Z_1|\mathcal{G}] < \infty$,a.s.．令 $\eta = \frac{1}{1+E[Z_1|\mathcal{G}]}$，则 $E[\eta Z_1] = E[\eta E[Z_1|\mathcal{G}]] \le 1$，因此 ηY 的期望存在．故由 (2.4) 及定理 2.1(6) 有

$$
\begin{aligned}
E[Y|\mathcal{G}] &= \frac{1}{\eta}E[\eta Y|\mathcal{G}] \\
&= \frac{1}{\eta}(E[\eta Z_1|\mathcal{G}] - E[\eta Z_2|\mathcal{G}]) \\
&= \frac{1}{\eta}(\eta E[Z_1|\mathcal{G}] - \eta E[Z_2|\mathcal{G}]) \\
&= E[Z_1|\mathcal{G}] - E[Z_2|\mathcal{G}] \\
&= \xi(E[X_1|\mathcal{G}] + E[X_2|\mathcal{G}]),
\end{aligned}
$$

由此及 (2.4) 便得 (2.5).

3) 设 X 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在．由定理 2.9 知，存在 $\mathcal{G}_1$- 可测实值随机变量 $\xi, |\xi| > 0$ a.s.，且 ξX 的期望存在．由于 ξ 为 $\mathcal{G}_2$- 可测，故仍由定理 2.9 知，X 关于 $\mathcal{G}_2$ 的条件期望存在，且由 (2.4) 得

$$
E[X|\mathcal{G}_2] = \frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathcal{G}_2].
$$

由于 $E[\xi X|\mathcal{G}_2]$ 的期望存在，故由 (1) 及上式知 $E[X|\mathcal{G}_2]$ 关于 $\mathcal{G}_1$ 的条件期望存在，且有 (利用 (2.3))

$$
\begin{aligned}
E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] &= \frac{1}{\xi}E[E[\xi X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] \\
&= \frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1].
\end{aligned}
$$

(2.6) 得证.

下面讨论一类特殊的关于 $\mathcal{G}$ 条件期望存在的随机变量.

2.11 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 一随机变量 X 称为关于 $\mathcal{G}$ 为 σ-可积, 如果存在 $\Omega_n\in\mathcal{G},\Omega_n\uparrow\Omega$, 使每个 XI_{Ω_n} 为可积随机变量.

下一定理给出了关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积的随机变量的一个刻画.

2.12 定理 设 X 为一随机变量, 则下列断言等价:

(1) X 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积.;

(2) X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 有穷;

(3) 存在一 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量 $\xi,|\xi|>0$, a.s., 使 ξX 为可积随机变量.

证 (1)⇒(3). 设 X 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积. 令 $\Omega_n\in\mathcal{G},\Omega_n\uparrow\Omega$, 使每个 XI_{Ω_n} 为可积. 令

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+E[\,|X|I_{\Omega}]}I_{\Omega_n},$$

则 $\xi>0,\xi$ 为 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量, 且 ξX 为可积.

(3)⇒(2) 显然.

(2)⇒(1). 设 $E[X|\mathcal{G}]$ a.s. 有穷, 由于 $E[X|\mathcal{G}]=E[X^+|\mathcal{G}]-E[X^-|\mathcal{G}]$, 故 $\mathrm{E}[\,|X|\,|\mathcal{G}]<\infty$ a.s.. 令 $\Omega_n=[E[\,|X|\,|\mathcal{G}]\le n]$, 则 $\Omega_n\uparrow\Omega$, a.s. $,\Omega_n\in\mathcal{G}$, 且 XI_{Ω_n} 为可积随机变量. 故 X 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ-可积. 证毕.

下一定理给出了条件期望的 Jensen 不等式的最一般形式.

2.13 定理 (Jensen 不等式) 设 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一连续凸函数, X 为一关于 $\mathcal{G}$ σ- 可积的随机变量, 则 $\varphi(X)$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有

$$\varphi(E[X|\mathcal{G}])\le E[\varphi(X)|\mathcal{G}],\ \text{a.s.}. \tag{2.11}$$

证 令 φ' 为 φ 的右导数, 则对任意实数 x,y 有

$$\varphi'(x)(y-x)\le\varphi(y)-\varphi(x).$$

以 $E[X|\mathcal{G}]$ 及 X 代替上式中的 x 及 y 得

$$\varphi'(E[X|\mathcal{G}])(X - E[X|\mathcal{G}]) + \varphi(E[X|\mathcal{G}]) \leq \varphi(X).$$

记上式左边的随机变量为 Y, 则 Y 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[Y|\mathcal{G}] = \varphi(E]X|\mathcal{G}])$. 特别, 由于 $\varphi(X)^- \leq Y^-$, 故 $E[\varphi(X)^-|\mathcal{G}] \leq E[Y^-|\mathcal{G}] < \infty$,a.s.. 因此, $\varphi(X)$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在, 且有 (2.11). 证毕.

下面我们推广有关条件期望的单调收敛定理、 Fatou 引理及控制收敛定理.

2.14 定理 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数, $(X_n, n \geq 1)$ 为一列关于 $\mathcal{G}$ 条件期望存在的随机变量.

(1) **(单调收敛定理)** 设 $X_n \uparrow X$,a.s., 且 $E[X_1^+|\mathcal{G}] < \infty$, a.s., 则 X 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在 (实际有 $E[X^-|\mathcal{G}] < \infty$, a.s.), 且有 $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$, a.s..

(2) **(Fatou 引理)** 若存在随机变量 Y, 使 $E[Y^-|\mathcal{G}] < \infty$, a.s., 且对每个 $n \geq 1$, 有 $X_n \geq Y$, a.s., 则 $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 关于 $\mathcal{G}$ 的条件期望存在 (实际有 $E[\liminf\limits_{n\to\infty} X_n)^-|\mathcal{G}] < \infty$, a.s.), 且有

$$E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}], \text{ a.s.}.$$

(3) **(控制收敛定理)** 设 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_n, Y \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$(相应地, $X_n \xrightarrow{\text{P}} X, Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$), 其中每个 Y_n 为非负随机变量, 且 Y 及每个 Y_n 关于 $\mathcal{G}$ 为 σ- 可积. 如果对 $n \geq 1, |X_n| \leq Y_n$,a.s., 且 $E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[Y|\mathcal{G}]$(相应地, $E[Y_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[Y|\mathcal{G}]$), 则有 $E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$(相应地, $E[|X_n - X||\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} 0$), 特别有 $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X|\mathcal{G}]$(相应地, $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{\text{P}} E[X|\mathcal{G}]$).

证 (1) 令 $\xi > 0$ 为一 $\mathcal{G}$- 可测实值随机变量, 使 ξX_1^- 为可积, 则 ξX_n 的期望存在, 且 $\xi X_n \uparrow \xi X$,a.s., 故由定理 2.2 得 $E[\xi X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[\xi X|\mathcal{G}]$,a.s., 但有 $E[\xi X_n|\mathcal{G}] = \xi E[X_n|\mathcal{G}]$, $E[\xi X|\mathcal{G}] = \xi E[X|\mathcal{G}]$, 从而有 $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$, a.s..

(2) 容易由 (1) 推得.

(3) 只需考虑 a.s. 收敛情形. 令 $Z_n = Y_n + Y - |X_n - X|$, 则 $Z_n \geq 0$, 且 $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 2Y$, 故由 (2) 得

$$2E[Y|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[Z_n|\mathcal{G}] = 2E[Y|\mathcal{G}] - \limsup_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}].$$

于是有 $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathcal{G}] = 0$. 证毕.

下一定理是 Jensen 不等式的一个推论.

2.15 定理 ($\mathbf{L}^r$- 收敛定理) 设 $\infty > r \geq 1$. 若 $X_n \xrightarrow{L^r} X$, 则 $E[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^r} E[X|\mathcal{G}]$.

证 令 $f(x) = |x|^r$, 则 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续凸函数. 故由 (2.11) 得

$$|E[X_n|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{G}]|^r \leq E[|X_n - X|^r|\mathcal{G}].$$

在不等式两边取期望即得定理的结论.

下一定理是条件期望的 Bayes 法则.

2.16 定理 设 Q 为一关于 P 绝对连续的概率测度, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 令

$$\xi = \frac{dQ}{dP}, \qquad \eta = E[\xi|\mathcal{G}].$$

则 $\eta > 0$, Q-a.s.. 如果 X 为一 Q- 可积的随机变量, 则有

$$E_Q[X|\mathcal{G}] = \eta^{-1}E[X\xi|\mathcal{G}], \quad Q\text{-a.s.}. \tag{2.12}$$

证 首先, 由于 $[\eta > 0] \in \mathcal{G}$, 我们有

$$Q([\eta > 0]) = E[\xi I_{[\eta>0]}] = E[\eta I_{[\eta>0]}] = E[\eta] = E[\xi] = 1.$$

设 X 为一 Q- 可积的随机变量, 则有

$$\begin{aligned} E[X\xi I_A] &= E_Q[XI_A] = E_Q[E_Q[X|\mathcal{G}]I_A] \\ &= E[E_Q[X|\mathcal{G}]\xi I_A] = E[E_Q[X|\mathcal{G}]\eta I_A], \quad \forall A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

这表明

$$E[X\xi|\mathcal{G}]=E_Q[X|\mathcal{G}]\eta,\quad P\text{-a.s.},$$

由此立刻推得 (2.12).

现在我们研究条件独立性.

2.17 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $\mathcal{G},\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数. 如果对任意 $B_1\in\mathcal{G}_1$ 及 $B_2\in\mathcal{G}_2$, 有

$$P[B_1\cap B_2|\mathcal{G}]=P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}],\text{a.s.},\tag{2.13}$$

则称 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 关于 $\mathcal{G}$条件独立.

设 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 条件独立, 则对任意 $\mathcal{G}_1$- 可测非负随机变量 X_1 及 $\mathcal{G}_2$- 可测非负随机变量 X_2, 有

$$E[X_1X_2|\mathcal{G}]=E[X_1|\mathcal{G}]E[X_2|\mathcal{G}],\text{a.s.}.$$

设 X 及 Y 为随机变量. 若 $\sigma(X)$ 与 $\sigma(Y)$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立, 则称 X 与 Y 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立. 类似可定义一随机变量与一子 σ- 代数关于 $\mathcal{G}$ 的条件独立性.

下一定理给出了条件独立性的一个判别准则.

2.18 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, $\mathcal{G},\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数. 则为要 $\mathcal{G}_1$ 与 $\mathcal{G}_2$ 关于 $\mathcal{G}$ 条件独立, 必须且只需对任意 $B_2\in\mathcal{G}_2$ 有

$$P[B_2|\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}]=P[B_2|\mathcal{G}],\text{ a.s.}.\tag{2.14}$$

(或等价地, 对任意 $B_1\in\mathcal{G}_1$, 有 $P[B_1|\mathcal{G}_2\vee\mathcal{G}]=P[B_1|\mathcal{G}]$, a.s..)

证 首先 (2.14) 式右边为 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}$- 可测且 $\{B_1\cap B:B_1\in\mathcal{G}_1,B\in\mathcal{G}\}$ 为生成 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}$ 的 π- 类, 由条件期望的定义易知 (2.14) 等价于

$$\int_{A\cap B_1}P(B_2|\mathcal{G})dP=\int_{B\cap B_1}I_{B_1}I_{B_2}dP,\ B\in\mathcal{G},B_1\in\mathcal{G}_1.\tag{2.15}$$

另一方面, (2.13) 等价于

$$\int_B P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}]dP=\int_B I_{B_1\cap B_2}dP,\ B\in\mathcal{G}.\tag{2.16}$$

但对 $B\in\mathcal{G},B_1\in\mathcal{G}_1,B_2\in\mathcal{G}_2$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{B\cap B_1}P[B_2|\mathcal{G}]dP&=\int_B I_{B_1}P(B_2|\mathcal{G}]dP\\&=\int_B E[I_{B_1}P[B_2|\mathcal{G}]|\mathcal{G}]dP\\&=\int_B P[B_1|\mathcal{G}]P[B_2|\mathcal{G}]dP,\end{aligned}$$

即 (2.15) 的左边与 (2.16) 的左边相等, 因此定理得证.

习题

2.19 设 $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P),\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数, $Y\in L^1(\Omega,\mathcal{G},P)$. 为要 $Y=E[X|\mathcal{G}]$, 必须且只需 $EX=EY$ 且对生成 $\mathcal{G}$ 的某 π- 类 $\mathcal{C}$ 中的所有集合 A 有 $E[XI_A]=E[YI_A]$.

2.20 设 $X,Y\in L^1(\Omega,\mathcal{B},P)$. 若 $E(X|Y)=Y$,a.s.,$E[Y|X]=X$, a.s., 则 $X=Y$,a.s..

2.21 设 $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P),\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ - 代数, 则

$$E(E[X|\mathcal{G}]-X)^2=\inf\{E(Y-X)^2:Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)\}.$$

2.22 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数, $g(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上非负或有界 Borel 可测函数. 若 X 为 $\mathcal{G}$- 可测的, 则

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}]=\xi(X),\ \text{a.s.},$$

其中 $\xi(x)=E[g(x,Y)|\mathcal{G}]$.

2.23 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量, $g(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的非负或有界 Borel 可测函数. 令 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数, 若 X 与 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2$ 独立, Y 关于 $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2$ 可测, 则有

$$\begin{aligned}E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1]&=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_2]\\&=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2],\text{a.s..}\end{aligned}$$

(提示：利用第二章定理 2.1.)

2.24 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量，$\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 X 与 Y 及 $\mathcal{G}_2$ 独立，Y 与 $\mathcal{G}_1$ 独立，则有

$$E[XY|\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2]=E[X|\mathcal{G}_1]E[Y|\mathcal{G}_2].$$

2.25 设 ξ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一实值随机变量，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，$A\in\mathcal{G}$. 令 $\mathcal{H}=\sigma(A\cap\mathcal{G})$. 如果 ξI_A 关于 $\mathcal{G}\,\sigma$- 可积，则 ξI_A 关于 $\mathcal{H}\,\sigma$- 可积，且有

$$E[\xi I_A|\mathcal{G}]=E[\xi I_A|\mathcal{H}],\quad \text{a.s.}.$$

§3 正则条件概率

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 由条件期望的性质知：条件概率 $P(A|\mathcal{G})$ 有如下性质：

$$P[\Omega|\mathcal{G}]=1,\ \text{a.s.},\quad P[A|\mathcal{G}]\geq 0,\ \text{a.s.},$$
$$P[\sum_j A_j|\mathcal{G}]=\sum_j P[A_j|\mathcal{G}],\ \text{a.s.}.$$

这些性质与概率测度的性质很相似,不同之处在于出现了例外集. 若对每个 $A\in\mathcal{F}$，可选取 $P[A|\mathcal{G}]$ 的一个版本 $P(\omega,A)$，使得对一切 $\omega\in\Omega$，$P(\omega,\cdot)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的概率测度，这时称 $\{P(\omega,A),\omega\in\Omega,A\in\mathcal{F}\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 一般说来，即使 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可分可测空间，正则条件概率未必存在. 本节将对可分可测空间情形给出使正则条件概率存在的一个充分条件 (定理 3.10) 及一个充要条件 (定理 3.15).

3.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 令 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一族概率测度，称它为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的 **正则条件概率**, 如果

(1) $\forall A\in\mathcal{F},P(\cdot,A)$ 为 Ω 上的 $\mathcal{G}$- 可测函数;

(2) $\forall A \in \mathcal{F}, P(\omega, A)$ 为 $P[A|\mathcal{G}]$ 的一个版本，即 $\forall B \in \mathcal{G}$ 有

$$\int_B P(\omega, A) P(d\omega) = P(A \cap B).$$

正则条件概率的第一个应用是：条件期望算子成了关于正则条件概率的积分.

3.2 定理 设 $\{P(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 设 X 为一随机变量，其期望存在，则对几乎所有 ω,X 关于 $P(\omega, \cdot)$ 的积分存在，且有

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \int_\Omega X(\omega') P(\omega, d\omega'), \text{ a.s. } \omega. \tag{3.1}$$

证 从示性函数过渡到非负可测函数，证明细节从略.

在上述定理中，如果有从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到另一可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射 ξ, 则可在 $(E, \mathcal{E})$ 上引出一族概率测度 $\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$:

$$Q(\omega, A) = P(\omega, \xi^{-1}(A)), \tag{3.2}$$

这时，对形如 $f(\xi)$ 的存在期望的随机变量 (其中 f 为 $(E, \mathcal{E})$ 上的 Borel 可测函数), 我们有 (见第三章习题 1.15)

$$E[f(\xi)|\mathcal{E}](\omega) = \int_E f(x) Q(\omega, dx). \tag{3.3}$$

在许多情况下，正则条件概率并不存在，但满足 (3.3) 的概率测度族 $\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 存在. 我们称 $\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的**混合条件分布**.

下面我们给出混合条件分布的确切定义.

3.3 定义 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数. 又设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可测空间，ξ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 中的可测映射 (称 ξ 为在 $(E, \mathcal{E})$ 中取值的 **随机元**). 令 $\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为

$(E,\mathcal{E})$ 上的一族概率测度. 称它为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的 **混合条件分布**, 如果

(1) $\forall A \in \mathcal{E}, Q(\cdot, A)$ 为 $\mathcal{G}$- 可测;

(2) $\forall A \in \mathcal{E}, Q(\omega, A)$ 为 $P[\xi^{-1}(A)|\mathcal{G}]$ 的一个版本, 即 $\forall B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B Q(\omega, A)P(d\omega) = P(B \cap \xi^{-1}(A)).$$

3.4 注 若 $(E,\mathcal{E}) = (\Omega, \mathcal{F}), \xi$ 为 Ω 上的恒等映射, 则 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布就是 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 因此, 正则条件概率存在性的研究可以归结为混合条件分布存在性的研究.

为研究混合条件分布的存在性, 我们先引入两个概念, 它们分别是 Hausdorff 空间中的紧集类及内正则测度概念的抽象化.

3.5 定义 设 $\mathcal{C}$ 为 E 上一集类. 如果下列条件满足:

$$\{C_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{C}, \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \Rightarrow \text{对某个 } m, \bigcap_{n=1}^{m} C_n = \emptyset,$$

则称 $\mathcal{C}$ 为 **紧类**.

紧类的一个典型例子是 Hausdorff 拓扑空间中的紧集类.

3.6 定义 设 $(E,\mathcal{E},\mu)$ 为一测度空间. 称 μ 为 $\mathcal{E}$ 上的 **紧测度**, 如果存在紧类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, 使得对一切 $A \in \mathcal{E}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, C \in \mathcal{C}\}.$$

由第五章定理 7.6 知 (见 (7.2) 式): 设 E 为一波兰空间, 则 $\mathcal{B}(E)$ 上的任一有限测度为紧测度. 更一般地, 我们有:

3.7 命题 设 X 为一波兰空间. 令 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{B}(X)$ 上有限测度全体, $\bigcap_{\mu \in \mathcal{M}} \overline{\mathcal{B}(C)}^{\mu}$ 中的集称为 **普遍可测集**. 若 E 为普遍可测集, 则 $E \cap \mathcal{B}(X)$ 上的任何有限测度 μ 为紧测度. 更确切地说, 令 $\mathcal{K}(E)$ 表示含于 E 的全体紧集, 则对任何 $A \in E \cap \mathcal{B}(X)$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A, C \in \mathcal{K}(E)\}.$$

证 留给读者作为习题.

3.8 引理 设 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}_1$ 为 E 上的两个代数, $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}, \mathcal{C}$ 为 E 上一紧类, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_1$. 令 μ 为 $\mathcal{A}_1$ 上的一非负有限可加集函数, 且 $\mu(E) < \infty$. 若对一切 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C):\ C \subset A, C \in \mathcal{C}\},$$

则 μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ- 可加的.

证 由第一章定理 3.4 知: 只需证 μ 在空集 $\emptyset$ 处连续. 设 $A_n \in \mathcal{A}, A_n \downarrow \emptyset$. 给定 $\epsilon > 0$, 依假定, 对每个 n, 存在 $C_n \subset A_n, C_n \in \mathcal{C}$, 使 $\mu(A_n) \leq \mu(C_n) + \epsilon/2^n$. 由于 $\bigcap_n C_n \subset \bigcap_n A_n = \emptyset$, 故由 $\mathcal{C}$ 是紧类的假定, 存在正整数 m, 使 $\bigcap_{n=1}^m C_n = \emptyset$, 即有 $\bigcup_{n=1}^m C_n^c = E$, 于是有

$$A_m = \bigcap_{n=1}^m A_n = \Big(\bigcap_{n=1}^m A_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=1}^m C_n^c\Big) \subset \bigcup_{n=1}^m (A_n \setminus C_n).$$

因此, 对 $k \geq m$, 我们有

$$\mu(A_k) \leq \mu(A_m) \leq \sum_{n=1}^m \mu(A_n \setminus C_n) < \epsilon.$$

这表明 $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) < \epsilon$. 但 $\epsilon > 0$ 是任意的, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_n) = 0$, 因此 μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ- 可加的.

下一定理给出了混合条件分布存在的一个有用的充分条件.

3.9 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $(E, \mathcal{E})$ 为一可分可测空间, ξ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 中的一可测映射. 令 $\mu = P\xi^{-1}$, 若 μ 是 $\mathcal{E}$ 上的紧测度, 则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ- 代数 $\mathcal{G}$, 存在 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布.

证 由第一章知: 存在 E 上一代数 $\mathcal{A}$, 其元素个数至多可数, 使得 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. 此外, 依假定, 存在 E 上的一紧类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, 使得对每个 $A \in \mathcal{E}$, 有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C):\ C \subset A, C \in \mathcal{C}\}.$$

因此，设 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$，则 $\forall i$，$\exists C_{ik}\in\mathcal{C}, C_{ik}\subset A_i, k\geq 1$，使

$$\mu(A_i)=\sup_k \mu(C_{ik}),\ i=1,2,\cdots. \tag{3.4}$$

对每个 $A\in\mathcal{E}$，令 $\widetilde{Q}(\omega,A)$ 为 $E[\xi^{-1}(A)|\mathcal{G}]$ 的一个版本，则

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\sup_k \mu(C_{ik})=\sup_k P(\xi^{-1}(C_{ik}))\\&=\sup_k\int\widetilde{Q}(\omega,C_{ik}dP\leq\int\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})dP\\&\leq\int\widetilde{Q}(w,A_i)dP=P(\xi^{-1}(A_i))=\mu(A_i).\end{aligned}$$

因此有

$$\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})=\widetilde{Q}(\omega,A_i),\ \text{a.s.}. \tag{3.5}$$

现令 $\mathcal{D}=\{C_{ik},i,k=1,2,\cdots\}$，并令 $\mathcal{A}_1$ 为由 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{D}$ 生成的代数，则 $\mathcal{A}_1$ 的元素仍为至多可数，且 $\sigma(\mathcal{A}_1)=\mathcal{E}$. 令

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\{\omega:\widetilde{Q}(\omega,E)=1,\widetilde{Q}(\omega,A)\geq 0,\forall A\in\mathcal{A}_1\},\\\Omega_2&=\{\omega:\widetilde{Q}(\omega,\cdot)\ \text{在}\ \mathcal{A}_1\ \text{上有限可加}\},\\\Omega_3&=\{\omega:\forall i\geq 1,\sup_k\widetilde{Q}(\omega,C_{ik})=\widetilde{Q}(\omega,A_i)\},\end{aligned}$$

则 Ω_1,Ω_2 及 Ω_3 都为 $\mathcal{G}$- 可测集，且 $P(\Omega_1)=P(\Omega_2)=P(\Omega_3)=1$. 由于 $\mathcal{D}$ 是紧集类，故由引理 3.8 知，对 $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3\doteq\Omega_0$, $\widetilde{Q}(\omega,\cdot)$ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ- 可加的，从而可以唯一地扩张成为 $\mathcal{E}$ 上的一概率测度，我们用 $Q(\omega,\cdot)$ 表示之. 对 $\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$，我们令 $Q(\omega,\cdot)=\mu$，则 $\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的一族概率测度. 下面证明它为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 令

$$\mathcal{H}=\Big\{A\in\mathcal{E}:\ Q(\cdot,A)\ \text{为}\ \mathcal{G}\text{- 可测，且}\ \forall B\in\mathcal{G}\ \text{有}\\ \int_B Q(\omega,A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A)\Big\}.$$

依 $Q(\omega, A)$ 的定义，显然有 $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$. 此外，易见 $\mathcal{H}$ 为单调类，故 $\mathcal{H} = \mathcal{E}$(因 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$). 这表明 $\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 证毕.

下一定理是定理 3.9 的直接推论 (见注 3.4), 它给出了正则条件概率存在的一个充分条件.

3.10 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可分可测空间，P 为 $\mathcal{F}$ 上的一紧概率测度 (见定义 3.6), 则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ- 代数 $\mathcal{G}$, 存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

一可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 称为 **可离的**, 如果它的每个原子都是单点集. 两个可测空间称为 **同构**, 如果在两者之间存在一双方单值双方可测的满射 (这样的映射称为 **可测同构**). 下一引理表明：任一可分且可离的可测空间同构于 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的某可测子空间.

3.11 引理 设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可分且可离的可测空间，则 $(E, \mathcal{E})$ 同构于 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的某可测子空间. 更确切地说，设 $\{A_n, n \geq 1\}$ 为 E 上生成 $\mathcal{E}$ 的代数，令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} I_{A_n}(x),$$

则 f 为 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(f(E), \mathcal{B}(f(E)))$ 上的可测同构. 这里，$\mathcal{B}(f(E)) = f(E) \cap \mathcal{B}(R)$(见第一章习题 2.9).

证 显然 f 为 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(f(E), \mathcal{B}(f(E)))$ 上的双方单值可测映射. 为证 f^{-1} 可测，只需证 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(E))) = \mathcal{E}$, 或者只需证每个 A_n 属于 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(E)))$. 令 G_n 表示 $[0,2]$ 中三进位展开中第 n 项为 1 的实数，则 $G_n \in \mathcal{B}(R)$, 从而 $G_n \cap f(E) \in \mathcal{B}(f(E))$. 我们有 $A_n = f^{-1}(G_n) = f^{-1}(G_n \cap f(E))$, 由此推得引理的结论.

引理 3.11 允许我们给出如下定义.

3.12 定义 设 $(E, \mathcal{E})$ 为一可分且可离的可测空间. 如果存在 $\mathbb{R}$ 的一普遍可测子集 A, 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(A, \mathcal{B}(A))$ 同构，则称 $(E, \mathcal{E})$ 为 **Radon 可测空间**.

可以证明：设 A 为一波兰空间 X 的普遍可测子集，则 $(A, \mathcal{B}(A))$ 为 Radon 可测空间 (参见 [1]).

下面两个定理是命题 3.7、定理 3.9 及 3.10 的直接推论.

3.13 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间，$(E, \mathcal{E})$ 为一 Radon 可测空间. 则对任何取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机元 ξ 及 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ-代数 $\mathcal{G}$, 存在 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布.

3.14 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一 Radon 可测空间，P 为 $\mathcal{F}$ 上的一概率测度，则对 $\mathcal{F}$ 的任一子 σ- 代数 $\mathcal{G}$, 存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

对可分可测空间情形，下一定理进一步给出了正则条件概率存在的一个充要条件 (见马志明 [4]).

3.15 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可分可测空间，f 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(R, \mathcal{B}(R))$ 的可测映射，使得 f 在不同的原子上取不同的值，且使 $f^{-1}(\mathcal{B}(f(\Omega))) = \mathcal{F}$. 令 P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度，$\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，$\{Q(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为 f 关于 $\mathcal{G}$ 混合条件分布. 则为要 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率存在，必须且只需存在 $\mathcal{G}$- 可测的概率为 1 集合 Ω_0, 使得对每个 $\omega \in \Omega_0$, $Q^*(\omega, f(\Omega)) = 1$. 这里 $Q^*(\omega, \cdot)$ 表示 $Q(\omega, \cdot)$ 的外测度.

证 充分性. 设定理中所给条件满足. 对 $A \in \mathcal{F}$, 令

$$P(\omega, A) = \begin{cases} Q^*(\omega, f(A)), & \omega \in \Omega_0, \\ P(A), & \omega \notin \Omega_0, \end{cases}$$

往证 $\{P(\omega, \cdot), \omega \in \Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率. 首先，对 $\omega \in \Omega_0$, 由于 $Q^*(\omega, f(\Omega)) = 1$, 故由第一章习题 4.9 知，$Q^*(\omega, \cdot)$ 限于 $f(\Omega) \cap \mathcal{B}(R) = \mathcal{B}(f(\Omega))$ 为一概率测度，从而 $P(\omega, \cdot)$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 (由于依假定，$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$). 此外，对任何 $A \in \mathcal{F}$, 存在 $B \in \mathcal{B}(R)$, 使 $f(A) = f(\Omega) \cap B$, 故有

$$P(\omega, A) = Q^*(\omega, f(A)) = Q^*(\omega, f(\Omega) \cap B) = Q(\omega, B), \omega \in \Omega_0.$$

因此，$P(\cdot, A)$ 为 $\mathcal{G}$- 可测的，并且有

$$P(\omega, A) = Q(\omega, B) = P[f^{-1}(B) | \mathcal{G}] = P[A | \mathcal{G}], \text{ a.s.}.$$

这表明 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率.

必要性. 设存在 P 关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率 $\{P(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$. 令

$$\tilde{Q}(\omega,A)=P(\omega,f^{-1}(A)),A\in\mathcal{B}(f(\Omega)),$$

则易见 $\{\tilde{Q}(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$ 为 f 关于 $\mathcal{G}$ 的混合条件分布. 对任何满足 $G\supset f(\Omega)$ 的 $G\in\mathcal{B}(R)$, 我们有 $f^{-1}(G)=\Omega$, 从而 $\tilde{Q}(\omega,G)=1$, 因此, 对一切 $\omega\in\Omega,\tilde{Q}^*(\omega,f(\Omega))=1$. 设 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的可数代数, 令

$$\Omega_0=\{\omega:Q(\omega,A_n)=\tilde{Q}(\omega,A_n),\forall n\geq 1\},$$

则 Ω_0 为 $\mathcal{G}$- 可测集, 且 $P(\Omega_0)=1$. 此外, 对 $\omega\in\Omega_0,Q(\omega,\cdot)$ 与 $\tilde{Q}(\omega,\cdot)$ 限于 $\mathcal{A}$ 一致, 从而在 $\mathcal{F}$ 上一致. 特别, 对 $\omega\in\Omega_0$ 有 $Q^*(\omega,f(\Omega))=1$.

§4 Kolmogorov 相容性定理及 Tulcea 定理的推广

下面我们用紧类及紧测度的概念证明 Kolmogorov 相容性定理的一个推广形式. 为此先证明两个引理.

4.1 引理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的紧类, 则 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 及 $\mathcal{C}_\delta$ 都是紧类. 这里 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 及 $\mathcal{C}_\delta$ 分别表示用有限并及可列交运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得的集类.

证 $\mathcal{C}_\delta$ 显然是紧类, 只需证 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 是紧类. 设 $D_n=\bigcup\limits_{m=1}^{M_n}C_n^m\in\mathcal{C}_{\cup f},n\geq 1$, 使得对一切 $p\geq 1$, $\bigcap\limits_{n\leq p}D_n\neq\emptyset$. 令 J 表示那些对每个 n 满足 $1\leq m_n\leq M_n$ 的自然数序列 $\{m_1,m_2,\cdots,\}$ 全体. 令

$$J_p=\Big\{\{m_n,n\geq 1\}\in J:\ \bigcap_{n\leq p}C_n^{m_n}\neq\emptyset\Big\}.$$

由于

$$\bigcup_{n\leq p}D_n=\bigcap_{n\leq p}\bigcup_{m=1}^{M_n}C_n^m=\bigcup_{\{m_n\}\in J}\Big(\bigcap_{n\leq p}C_n^{m_n}\Big),$$

于是对每个 $p\geq 1, J_p$ 非空. 显然有 $J_p\supset J_{p+1}, p\geq 1$, 往证 $\bigcap\limits_p J_p\neq\emptyset$. 对每个 $n\geq 1$, 任取 J_q 中一元素 $\{m_n^{(q)}, n\geq 1\}$. 由于对固定的 $n, 1\leq m_n^{(q)}\leq M_n$ 对一切 q 成立, 从而对任一由无穷多个自然数组成的集合 Λ, 必有无穷多个 q 属于 Λ, 使得 $m_n^{(q)}$ 取相同值. 因此, 由归纳法可构造一序列 $\{m_n^*, n\geq 1\}$, 使得它属于 J, 且对一切 $p\geq 1$, 及 $1\leq n\leq p, m_n^*=m_n^{(q)}$ 对无穷多个 q 成立. 这样一来, 对任一 $p\geq 1$, 存在 $q>p$, 使 $m_n^*=m_n^{(q)}, 1\leq n\leq p$. 由于 $\{m_n^*, n\geq 1\}\in J_q\subset J_p$, 故由 J_p 的定义知 $\{m_n^*, n\geq 1\}\in J_p$, 于是 $\{m_n^*, n\geq 1\}\in\bigcap\limits_p J_p$. 从而对一切 $p, \bigcap\limits_{n\leq p} C_n^{m_n^*}\neq\emptyset$. 但依假定, $\mathcal{C}$ 为紧类, 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n^{m_n^*}\neq\emptyset$, 从而 $\bigcap\limits_n D_n\neq\emptyset$(注意: $\bigcap\limits_n D_n\supset\bigcap\limits_n D_n^{m_n^*}$). 这表明 $\mathcal{C}_{\cup f}$ 为紧类. 证毕.

下一引理推广了引理 3.8.

4.2 引理 设 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}_1$ 为 E 上的两个半代数, $\mathcal{A}_1\supset\mathcal{A}, \mathcal{C}$ 为 E 上一紧类, 且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}_1$. 令 μ 为 $\mathcal{A}_1$ 上的一非负有限可加集函数, 且 $\mu(\Omega)<\infty$. 若对一切 $A\in\mathcal{A}$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathcal{C}\},$$

则 μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ- 可加的.

证 令 $\overline{\mathcal{A}}_1$ 及 $\overline{\mathcal{A}}$ 为分别由 $\mathcal{A}_1$ 及 $\mathcal{A}_2$ 产生的代数, 则 μ 可以唯一地扩张成为 $\overline{\mathcal{A}}_1$ 上的有限可加集函数, 且对一切 $A\in\overline{\mathcal{A}}$, 有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathcal{C}_{\cup f}\}.$$

但由引理 4.1 知, $\mathcal{C}_{\cup f}$ 为紧类, 故由引理 3.8 知: μ 限于 $\overline{\mathcal{A}}$ 为 σ- 可加的. 特别, μ 限于 $\mathcal{A}$ 为 σ- 可加的. 证毕.

4.3 定理 设 I 为一无穷集, $\mathcal{P}_0(I)$ 为 I 的非空有限子集全体. 设 $(\Omega,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间. 对每个 $T\in\mathcal{P}_0(I)$, 设 P_T 为 $(\prod\limits_{i\in T}\Omega_i, \prod\limits_{i\in T}\mathcal{F}_i)$ 上的一概率测度. 假定: (1) 每个 P_i 为 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)$

上的紧概率测度；(2) $\{P_T, T \in \mathcal{P}_0(I)\}$ 满足如下相容性条件：对 $T_1 \subset T_2$, 有

$$P_{T_1}(A_{T_1}) = P_{T_2}\Big(A_{T_1} \times \prod_{i \in T_2 \setminus T_1} \Omega_i\Big),\ A_{T_1} \in \prod_{i \in T_1} \mathcal{F}_i, \tag{4.1}$$

则在 $(\prod_{i \in JU} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一概率测度 P, 使得对一切 $T \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P\Big(A_T \times \prod_{i \in I \setminus T} \Omega_i\Big) = P_T(A_T),\ A_T \in \prod_{i \in T} \mathcal{F}_i. \tag{4.2}$$

证 令

$$\mathcal{S} = \bigcup_{T \in \mathcal{S}_0(I)} \Big\{\prod_{i \in T} A_i \times \prod_{i \notin T} \Omega_i :\ A_i \in \mathcal{F}_i, i \in T\Big\},$$

则 $\mathcal{S}$ 为半代数，且 $\sigma(\mathcal{S}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$. 令

$$P\Big(\prod_{i \in T} A_i \times \prod_{i \notin T} \Omega_i\Big) = P_T\Big(\prod_{i \in T} A_i\Big), \tag{4.3}$$

由 $\{P_T, T \in \mathcal{P}_0\}$ 的相容性知，如上定义的 P 在 $\mathcal{S}$ 上唯一确定，有限可加，且有 $P(\prod_{i \in I} \Omega_i) = 1$. 因此，由引理 4.2, 为证 P 在 $\mathcal{S}$ 上 σ- 可加，只需证存在一紧类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, 使得对一切 $A \in \mathcal{S}$, 有

$$P(A) = \sup\{P(C) :\ C \subset A, C \in \mathcal{C}\}. \tag{4.4}$$

依假定，对每个 $i \in I$, 存在 Ω_i 上一紧类 $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}_i$, 使得对一切 $A_i \in \mathcal{F}_i$, 有 $P_i(A_i) = \sup\{P_i(C) :\ C \subset A_i, C \in \mathcal{C}_i\}$. 不妨设每个 $\mathcal{C}_i$ 对可列交运算封闭. 令

$$\mathcal{D} = \Big\{C \times \prod_{j \neq i} \Omega_j, C \in \mathcal{C}_i, i \in I\Big\},$$

则 $\mathcal{D}$ 为紧类. 事实上, 设 $A_n = C_n \times \prod_{j \neq i_n} \Omega_j, C_n \in \mathcal{C}_{i_n}$, 则 $\bigcap\limits_n A_n$ 有如下形式: $\prod\limits_{i \in S} B_i \times \prod_{i \notin S} B_i$, 其中 S 为一可数集, 且 $B_i \in \mathcal{C}_i, i \in S$. 若 $\bigcap\limits_n A_n = \emptyset$, 则存在某 $s \in S$, 使 $B_s = \emptyset$. 由于 $B_s = \bigcap\limits_{i_n = s} C_n$, 故由 $\mathcal{C}_S$ 的紧性知, 存在 $\{n : i_n = s\}$ 的有限子集 J, 使 $\bigcap\limits_{n \in J} C_n = \emptyset$, 从而 $\bigcap\limits_{n \in J} A_n = \emptyset$. 因此, $\mathcal{D}$ 为紧类. 现令 $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{\cap f}$, 则 $\mathcal{C}$ 为紧类, 且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. 设 $A = \prod\limits_{i \in T} A_i \times \prod\limits_{i \in T} \Omega_i \in \mathcal{S}$. 对任给 $\epsilon > 0$, 取 $C_i \in \mathcal{C}_i, C_i \subset A_i$, 使得

$$P_i(A_i) \leq P_i(C_i) = \frac{\epsilon}{|T|},$$

这里 $|T|$ 表示 T 中元素的个数. 令

$$C = \prod_{i \in T} C_i \times \prod_{i \notin T} \Omega_i = \bigcap_{i \in T} (C_i \times \prod_{j \neq i} \Omega_j) \in \mathcal{C},$$

则 $C \subset A$, 且有 $A \setminus C \subset \bigcup\limits_{i \in T} \{(A_i \setminus C_i) \times \prod\limits_{j \neq i} \Omega_i\}$. 故由 P 的半有限可加性得

$$P(A) - P(C) \leq \sum_{i \in T} P_i(A_i \setminus C_i) \leq \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的, 故有 (4.4). 因此, P 在 $\mathcal{S}$ 上是 σ- 可加的, 从而可唯一地扩张成为 $\sigma(\mathcal{S}) = \prod\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i$ 上的一概率测度, 仍记为 P. 显然 P 满足 (4.2)(利用单调类定理). P 的唯一性显然. 证毕.

作为该定理的推论, 我们有如下的

4.4 定理 (Kolmogorov 相容性定理) 设 I 为一无穷集, $\mathcal{P}_0(I)$ 为 I 的非空有限子集全体. 设 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), i \in I$. 对每个 $T \in \mathcal{P}_0$, 设 P_T 为 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))(= (\prod\limits_{i \in T} \Omega_i, \prod\limits_{i \in T} \mathcal{F}_i))$ 上的一概率测度. 假定 $\{P_T, T \in \mathcal{P}_0(I)\}$ 满足相容性条件, 则在 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^T)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得对一切 $T \in \mathcal{P}_0(I)$, 有 (4.2) 式.

在随机过程理论中，有时遇到如下的概率测度的扩张问题：设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，$(\mathcal{F}_n)$ 为 $\mathcal{F}$ 的一列上升的子 σ- 代数，使得 $\sigma(\bigcap\limits_n \mathcal{F}_n)=\mathcal{F}$. 令 P_n 为 $\mathcal{F}_n$ 上的概率，使得 P_{n+1} 限于 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致. 是否存在 $\mathcal{F}$ 上的唯一概率测度，使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致？

下一定理回答了这一问题，它推广了 Tulcea 定理 (第四章定理 4.1).

4.5 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间，$(\mathcal{F}_n, n\geq 1)$ 为 $\mathcal{F}$ 的一列上升子 σ- 代数，使得 $\sigma(\bigcup\limits_n \mathcal{F}_n)=\mathcal{F}$. 令 P_n 为 $\mathcal{F}_n$ 上的概率测度，$n\geq 1$, 假定下列条件被满足：

(1) 对一切 $n\geq 1, P_{n+1}|_{\mathcal{F}_n}=P_n$;

(2) 对一切 $n\geq 2$, 存在 $(\Omega,\mathcal{F}_{n-1})$ 到 $(\Omega,\mathcal{F}_n)$ 的概率核 (见第四章定义 3.1)$Q_n(\omega,\cdot)$, 使得对一切 $B_n\in\mathcal{F}_n$, 有

$$P_n(B)=\int Q_n(\omega,B_n)P_{n-1}(d\omega),$$

且有

$$G\in\mathcal{F}_n, Q_n(\omega,G)>0 \Rightarrow A_{n-1}(\omega)\cap G\neq\emptyset \tag{4.5}$$

(这里 $A_k(\omega)$ 表示包含 ω 的 $\mathcal{F}_k$- 原子);

(3) $\{\omega^{(n)}, n\geq 1\}\subset\Omega$, $A_n(\omega^{(n)})\downarrow\ \Rightarrow \bigcap\limits_n A_n(\omega^{(n)})\neq\emptyset$,

则存在 $\mathcal{F}$ 上的唯一概率测度，使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致.

证 令 $\mathcal{A}=\bigcup\limits_n \mathcal{F}_n$. 由条件 (1),$(P_n, n\geq 1)$ 可在 $\mathcal{A}$ 上唯一确定一可加集函数 P, 使得 P 限于每个 $\mathcal{F}_n$ 与 P_n 一致. 为证 P 在 $\mathcal{A}$ 上是 σ- 可加的，只需证 P 在空集处连续. 设 $B_n\in\mathcal{A}$, $B_n\downarrow\emptyset$, 我们用反证法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=0$. 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)>0$. 不妨设对每个 $n\geq 1$, 有 $B_n\in\mathcal{F}_n$(否则，可以在序列 $\{B_n, n\geq 1\}$ 中添加某些相同的 B_n, 使新序列具有这一性质), 由条件 (2), 对每个 $n\geq 2$,

$$P(B_n)=\int_\Omega q_n^{(1)}(\omega)P_1(d\omega),$$

其中 $q_2^{(1)}(\omega) = Q_2(\omega, B_2)$,

$$q_n^{(1)}(\omega) = \int_\Omega Q_2(\omega, d\omega^{(2)}) \cdots Q_n(\omega^{(n-1)}, B_n),\ n \geq 3.$$

由于 $B_n \downarrow$, 故 $q_n^{(1)}(\omega) \downarrow h_1(\omega)$. 由控制收敛定理，我们有

$$\int_\Omega h_1(\omega) P_1(d\omega) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) > 0,$$

于是存在 $\omega^{(1)}$, 使 $h_1(\omega^{(1)}) > 0$. 实际上，必有 $\omega^{(1)} \in B_1$, 因为不然的话，由 (4.5) 知

$$q_2^{(1)}(\omega^{(1)}) = Q_2(\omega^{(1)}, B_2) \leq Q_2(\omega^{(1)}, B_1) = 0,$$

这将导致 $h_1(\omega^{(1)}) = 0$.

现设 $n > 2$, 则

$$q_n^{(1)}(\omega^{(1)}) = \int_\Omega q_n^{(2)}(\omega) Q_2(\omega^{(1)}, d\omega),$$

其中 $q_3^{(2)}(\omega) = Q_3(\omega, B_3)$,

$$q_n^{(2)}(\omega) = \int_\Omega Q_3(\omega, d\omega^{(3)}) \cdots Q_n(\omega^{(n-1)}, B_n),\ n \geq 4.$$

于是 $q_n^{(2)}(\omega) \downarrow h_2(\omega)$, 且

$$\int_\Omega h_2(\omega)\, Q_2(\omega^{(1)}, d\omega) = h_1(\omega^{(1)}) > 0.$$

因此， $Q_2(\omega^{(1)}, [h_2 > 0]) > 0$. 从而由 (4.5) 知，存在 $\omega^{(2)}$, 使 $\omega^{(2)} \in A_1(\omega^{(1)})$, 且 $h_2(\omega^{(2)}) > 0$. 与上述同理可证 $\omega^{(2)} \in B_2$.

这样，由归纳法我们得到 Ω 中的一列点 $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots$, 使得 $\omega^{(n)} \in B_n$, 且 $\omega^{(n+1)} \in A_n(\omega^{(n)}), n \geq 1$. 由于 $\mathcal{F}_n \downarrow$, 故易知

$A_{n+1}(\omega^{(n+1)}) \subset A_n(\omega^{(n)})$. 因此，由条件 (3) 知 $\bigcap_n A_n(\omega^{(n)}) \neq \emptyset$. 但显然有 $A_n(\omega^{(n)}) \subset B_n$, 故 $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$. 这与假定矛盾. 这表明，必须有 $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$, 因此， P 在 $\mathcal{A}$ 上是 σ- 可加的，从而 P 可以唯一扩张成为 $\mathcal{F}$ 上的一概率测度. 定理证毕.

注　实际上，条件 (2) 蕴含条件 (1)(见习题 4.7).

习题

4.6　为什么说定理 4.5 是 Tulcea 定理的推广形式?

4.7　设定理 4.5 的条件 (2) 成立. 则对一切 $n \geq 2$ 及 $B \in \mathcal{F}_{n-1}$, 有 $Q_n(\omega, B) = I_B(\omega)$. 进一步由此证明条件 (2) 蕴含条件 (1).

4.8　设 E 为一波兰空间， $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上 E- 值连续函数全体. 令 $X_t(\omega) = \omega(t)$ 为 Ω 上典则过程， $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t), \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s, s \geq 0)$. 如果对每个 t, 在 $\mathcal{F}_t$ 上存在一概率测度 P^t 使得 $\forall s < t, P^t$ 与 P^s 在 $\mathcal{F}_s$ 上一致，则存在 $\mathcal{F}_\infty$ 上一概率测度 P 使对每个 t,P 与 P^t 在 $\mathcal{F}_t$ 上一致.

§5　随机变量族的一致可积性

5.1 定义　设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间， $\mathcal{H}$ 为一族可积随机变量. 称 $\mathcal{H}$ 为**一致可积的**, 如果当 $C \to \infty$ 时，积分

$$\int_{[|\xi| \geq C]} |\xi| dP,\ \xi \in \mathcal{H}$$

一致趋于零.

下一定理给出了一个一致可积性准则.

5.2 定理　令 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 则为要 $\mathcal{H}$ 为一致可积族，必须且只需下列条件成立:

(1) $a = \sup\{E|\xi|, \xi \in \mathcal{H}\} < +\infty$;

(2) 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何满足 $P(A) \leq \delta$ 的

$A \in \mathcal{F}$, 有

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}} \int_A |\xi| dP \leq \epsilon. \tag{5.1}$$

证 必要性. 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 对给定 $\epsilon > 0$, 取 C 足够大, 使得

$$\sup_{\xi \in \mathcal{H}} \int_{[|\xi| \geq C]} |\xi| dP \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

另一方面, 我们有

$$\int_A |\xi| dP \leq CP(A) + \int_{[|\xi| \geq C]} |\xi| dP. \tag{5.2}$$

在 (5.2) 中令 $A = \Omega$ 得到条件 (1); 令 $\delta = \epsilon/(2C)$ 得到条件 (2).

充分性. 设条件 (1) 及 (2) 成立. 对任给 $\epsilon > 0$, 选取 $\delta > 0$ 使条件 (2) 中结论成立. 于是当 $C \geq a/\delta$ 时, 由于

$$P([|\xi| \geq C]) \leq \frac{1}{C} E[|\xi|] \leq \frac{a}{C} \leq \delta, \ \xi \in \mathcal{H},$$

故由 (5.1) 得

$$\int_{[|\xi| \geq C]} |\xi| dP \leq \epsilon, \ \xi \in \mathcal{H}.$$

这表明 $\mathcal{H}$ 是一致可积族. 证毕.

5.3 定理 设 $\mathcal{H}$ 是一致可积族, 则 $\mathcal{H}$ 在 $L^1(\Omega, \mathcal{F} < P)$ 中的闭凸包也是一致可积的.

证 由定理 5.3 易知一致可积族在 L^1 中的闭包是一致可积的, 因此只需证 $\mathcal{H}$ 的凸包 $\mathcal{H}_1$ 是一致可积的. 显然 $\mathcal{H}_1$ 满足定理 5.2 的条件 (1). 往证 $\mathcal{H}_1$ 满足条件 (2). 对给定 $\epsilon > 0$, 选取 $\delta > 0$, 使条件 (2) 中的结论对 $\mathcal{H}$ 成立. 则对任何 $n \geq 2, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in \mathcal{H}$ 及满足 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ 的非负实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和对任何满足 $P(A) \leq \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\int_A \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right| dP \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A |\xi| dP \leq \epsilon.$$

这表明 $\mathcal{H}_1$ 满足条件 (2), 故 $\mathcal{H}_1$ 为一致可积族. 证毕.

下一定理给出了 L^1- 收敛准则.

5.4 定理 设 (ξ_n) 为一可积随机变量序列, ξ 为一实值随机变量. 则下列条件等价:

(1) $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$;

(2) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 且 (ξ_n) 为一致可积;

(3) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 且 $E|\xi_n| \to E|\xi| < \infty$.

证 (1)⇔(3) 见第三章定理 2.9. 只需证 (1)⇔(2).

(1)⇒(2). 设 $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 令 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\int_A |\xi_n| dP \le \int_A |\xi| dP + E[|\xi_n - \xi|]. \tag{5.3}$$

给定 $\epsilon > 0$, 取一正数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $E[|\xi_n - \xi|] \le \epsilon/2$. 再选取 $\delta > 0$, 使得对任何满足 $P(A) \le \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\int_A |\xi| dP \le \frac{\epsilon}{2}, \int_A |\xi_n| dP \le \frac{\epsilon}{2}, n = 1, 2, \cdots, N. \tag{5.4}$$

于是由 (5.3) 及 (5.4) 知, 对任何满足 $P(A) \le \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有 $\sup_n \int_A |\xi_n| dP \le \epsilon$. 此外有 $\sup_n E[|\xi|] < \infty$. 故由定理 5.2 知, (ξ_n) 为一致可积族. 最后, 显然有 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

(2)⇒(1). 设 (ξ_n) 一致可积, 且 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. 由 Fatou 引理, $E[|\xi|] \le \sup\limits_n E[|\xi_n|] < +\infty$, 故 ξ 可积. 从而 $(\xi_n - \xi)$ 为一致可积. 对任给 $\epsilon > 0$, 由定理 5.2 知, 存在 $\delta > 0$, 使得对任何满足 $P(A) < \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\sup_n \int_A |\xi_n - \xi| dP \le \epsilon.$$

取 N 充分大, 使得当 $n \ge N$ 时, 有 $P([|\xi_n - \xi| \ge \epsilon]) < \delta$. 于是当 $n \ge N$ 时, 我们有

$$E[|\xi_n - \xi|] = \int_{[|\xi_n - \xi| < \epsilon]} |\xi_n - \xi| dP + \int_{[|\xi_n - \xi| \ge \epsilon]} |\xi_n - \xi| dP \le 2\epsilon,$$

这表明 $\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 定理证毕.

下一定理给出了一致可积性的又一准则.

5.5 定理 设 $\mathcal{H} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{H}$ 是一致可积的;

(2) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上满足 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$ 的非负 Borel 函数 φ, 使得 $\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}} E[\varphi \circ |\xi|] < \infty$.

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 由于对任何 $a > 0$, 有 $\int_\Omega (|\xi| - a)^+ dP \le \int_{[|\xi|>a]} |\xi| dP$, 故存在自然数 $n_k \uparrow \infty$, 使得

$$\sup_{\xi\in\mathcal{H}} \int_\Omega (|\xi| - n_k)^+ dP < 2^{-k}, k \ge 1.$$

令

$$\varphi(t) = \sum_{k\ge1} (n - n_k)^+, \ n \le t < n+1, n = 0, 1, 2, \cdots$$

则 φ 非负, 单调非降且右连续. 此外有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\ge1} (1 - \frac{n_k}{n})^+ = \infty,$$

从而 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(n)}{t} = \infty$. 最后

$$\begin{aligned} E[\varphi \circ |\xi|] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (n - n_k)^+ P([n \le |\xi| < n+1]) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n - n_k)^+ P([n \le |\xi| < n+1]) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega (|\xi| - n_k)^+ dP < 1. \end{aligned}$$

(1)⇒(2) 得证.

(2)⇒(1). 设 (2) 成立. 对给定 $\epsilon>0$. 令 $a=M/\epsilon$, 其中 $M=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}} E[\varphi\circ|\xi|]$. 选取充分大的 C, 使得当 $t\geq C$ 时, 有 $\varphi(t)/t\geq a$. 则在 $[|\xi|\geq C]$ 上, 我们有 $|\xi|\leq\frac{\varphi\circ|\xi|}{a}$, 故有

$$\int_{[|\xi|\geq C]}|\xi|dP\leq\frac{1}{a}\int_{[|\xi|\geq C]}\varphi\circ|\xi|dP\leq\frac{M}{a}=\epsilon,\ \xi\in\mathcal{H}.$$

因此 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

5.6 系 设 $\mathcal{H}\subset L^p(\Omega,\mathcal{F},P),(p>1)$. 如果 $\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}}E[|\xi|^p]<\infty$, 则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

证 令 $\varphi(t)=t^p, t\geq 0$. 由定理 5.5 立得系的结论. 另一直接证明如下: 令 $a=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}}E[|\xi|^p]$, 则 $\forall C>0$, 有

$$\int_{[|\xi|>C]}|\xi|dP\leq\int_{[|\xi|>C]}\frac{|\xi|^p}{C^{p-1}}dP\leq\frac{1}{C^{p-1}}E[|\xi|^p]\leq\frac{a}{C^{p-1}},$$

故由定义知, $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

5.7 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为概率空间, ξ 为一可积随机变量, $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数. 令 $\eta_i=E[\xi|\mathcal{G}_i]$, 则 $(\eta_i, i\in I)$ 为一致可积族.

证 对任何 $C>0$, 我们有

$$P([|\eta_i|\geq C])\leq\frac{1}{C}E[|\eta_i|]\leq\frac{1}{C}E[|\xi|],\ i\in I,$$

于是有 (注意 $|\eta_i|\geq C\in\mathcal{G}_i$)

$$\begin{aligned}\int_{[|\eta_i|\geq C]}|\eta_i|dP&\leq\int_{[|\eta_i|\geq C]}|\xi|dP\leq\delta P([|\eta_i|\geq C])+\int_{[|\xi|\geq\delta]}|\xi|dP\\&\leq\frac{\delta}{C}E[|\xi|]+\int_{[|\xi|\geq\delta]}|\xi|dP.\end{aligned}$$

对 $\epsilon>0$, 取 $\delta>0$, 使得 $\int_{[|\xi|\geq\delta]}|\xi|dP\leq\epsilon/2$. 则当 $C\geq(2\delta/\epsilon)E[|\xi|]$ 时, 有 $\int_{[|\eta_i|\geq C]}|\eta_i|dP\leq\epsilon, i\in I$. 这表明 $(\eta_i, i\in I)$ 为一致可积族.

下面我们进一步研究一致可积随机变量族的性质. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 为可积随机变量. 如果对一切有界随机变量 η, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} E[\xi_n\eta]=E[\xi\eta]$, 则称 ξ_n 在 L^1 中弱收敛于 ξ(见第三章定义 4.16).

5.8 引理 设 (ξ_n) 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上一可积随机变量序列, 则为要 ξ_n 在 L^1 中弱收敛于某可积随机变量 ξ, 必须且只需对每个 $A\in\mathcal{F}$, $E[\xi_n I_A]$ 的极限存在且有穷.

证 必要性显然. 往证充性. 设引理的条件成立. 令 μ_n 为 ξ_n 关于 P 的不定积分, 由 Vitali-Hahn-Saks 定理 (第三章定理 3.15) 知, $\sup\limits_n\|\mu_n\|=\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$. 此外, 存在 $\mathcal{F}$ 上一有限测度 μ, 使对一切 $A\in\mathcal{F}$, 有 $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$, 且有 $\mu\ll P$. 令 $\xi=\frac{d\mu}{dP}$. 则易见 ξ_n 弱收敛于 ξ.(这里用到第二章习题 1.14 及 $\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$ 这一事实.)

下一定理是著名的 **Dunford-Pettis 弱紧性准则** 的一个部分 (对概率论最有用的部分).

5.9 定理 设 $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 则下列条件等价:

(1) $\mathcal{H}$ 为一致可积族;

(2) 对 $\mathcal{H}$ 中的任一序列 (ξ_n), 存在其子列 (ξ_{n_k}), 使之在 L^1 中弱收敛.

证 (1)⇒(2). 设 $\mathcal{H}$ 为一致可积族. 令 (ξ_n) 为 $\mathcal{H}$ 中的一序列, $\mathcal{G}=\sigma(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, 则 $\mathcal{G}$ 为一可分的 σ- 代数, 故存在一可数代数 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\cdots\}$, 使 $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{G}$. 由对角线法则, 可选 (ξ_n) 的子列 (ξ_{n_k}) 使得对一切 $j\geq 1$, 极限 $\lim\limits_{k\to\infty} E[\xi_{n_k}I_{A_j}]$ 存在且有穷. 令

$$\mathcal{H}=\{A\in\mathcal{G}:\lim_{k\to\infty}E[\xi_{n_k}I_A]\text{存在且有穷}\}.$$

利用 (ξ_{n_k}) 的一致可积性 (见定理 5.2) 不难看出 $\mathcal{H}$ 为一单调类. 由于 $\mathcal{A}\subset\mathcal{H}$, 故由单调类定理知 $\mathcal{H}=\mathcal{G}$. 于是由引理 5.8 知, (ξ_{n_k}) 在 $L(\Omega,\mathcal{G},P)$ 中弱收敛, 从而对一切有界 $\mathcal{G}$- 可测随机变量 η, 极限 $\lim E[\xi_{n_k}\eta]$ 存在且有穷. 现设 $A\in\mathcal{F}$, 令 $\eta=E[I_A|\mathcal{G}]$, 则有

$E[\xi_{n_k} I_A] = E[E[\xi_n I_A|\mathcal{G}]] = E[\xi_{n_k}\eta]$, 从而极限 $\lim_{n\to\infty}[\xi_{n_k} I_A]$ 存在且有穷. 再由引理 5.8 知, (ξ_{n_k}) 在 $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中弱收敛. (1)⇒(2) 得证.

(2)⇒(1). 我们用反证法. 假定 (1) 不成立, 则存在 $\mathcal{H}$ 中一序列 (ξ_n) , 使得: 或者 $\lim_{n\to\infty} E[|\xi_n|] = \infty$; 或者存在某 $\epsilon > 0$ 和 $\mathcal{F}$ 中的一列集合 $(A_n, n\geq 1)$, 使得 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, 且 $\inf_n \int_{A_n} |\xi_n| \geq \epsilon$. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理知, 该序列不可能有弱收敛子列. (2)⇒(1) 得证.

习题

5.10 设 (ξ_n) 为一致可积随机变量序列, 则有

$$\lim_{n\to\infty} E[\frac{1}{n}\sup_{1\leq k\leq n} |\xi_n|] = 0.$$

5.11 设 $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 若 $\mathcal{H}$ 满足如下条件:

$$A_n\in\mathcal{F}, A_n\downarrow\phi \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP = 0,$$

则对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$A\in\mathcal{F}, P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_A |\xi|dP \leq \epsilon.$$

5.12 设 $\mathcal{H}_1$ 及 $\mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族. 令

$$\mathcal{H} = \{\xi_1+\xi_2:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1, \xi_2\in\mathcal{H}_2\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

§6 本性上确界

6.1 定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间, $\mathcal{H}$ 为随机变量的非空族. 称随机变量 η 为 $\mathcal{H}$ 的本性上确界, 如果 η 满足下列条件:

(i) 对一切 $\xi \in \mathcal{H}$, 有 $\xi \leq \eta$ a.s.;

(ii) 设 η' 为任一随机变量，使得对一切 $\xi \in \mathcal{H}$ 有 $\xi \leq \eta'$ a.s.，则有 $\eta \leq \eta'$ a.s..

容易看出：若 $\mathcal{H}$ 的本性上确界存在，则必唯一 (不计 a.s. 相等的两个随机变量的差别)，我们用 $\operatorname{ess.sup}_{\xi\in\mathcal{H}}\xi$ 或 $\operatorname{ess.sup}\mathcal{H}$ 表示之.

在上述 (i) 及 (ii) 中将不等号反向，就得到本性下确界的定义. $\mathcal{H}$ 的本性下确界记为 $\operatorname{ess.inf}_{\xi\in\mathcal{H}}\xi$ 或 $\operatorname{ess.inf}\mathcal{H}$.

下一定理表明，随机变量的非空族的本性上 (下) 确界总存在.

6.2 定理 令 $\mathcal{H}$ 为随机变量的非空族. 则 $\mathcal{H}$ 的本性上 (下) 确界存在，且有 $\mathcal{H}$ 中的至多可数个元素 (ξ_n), 使得

$$\operatorname{ess.sup}\mathcal{H} = \bigvee_n \xi_n, \ (\operatorname{ess.inf}\mathcal{H} = \bigvee_n \xi_n).$$

若进一步，$\mathcal{H}$ 对取有限上 (下) 端运算封闭 (即：$\xi, \eta \in \mathcal{H} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{H}$, 使得 $f = \xi \vee \eta$, a.s.), 则 (ξ_n) 可取为一 a.s. 单调增 (降) 序列.

证 只考虑本性上确界情形. 第二结论显然. 为证第一结论，不妨设 $\mathcal{H}$ 中的元一致有界，否则可以考虑随机变量族 $\overline{\mathcal{H}} = \{\operatorname{arctg}\xi : \xi \in \mathcal{H}\}$. 此外，显然可以进一步假定 $\mathcal{H}$ 对取有限上端运算封闭. 这时，令 $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$ 为一单调增序列，使得

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi_n] = \sup_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi].$$

令 $\eta = \bigvee_n \xi_n$, 往证 η 为 $\mathcal{H}$ 的本性上确界. 为此只需验证定义 6.1 中的两个条件. 条件 (ii) 显然成立，故只需证条件 (i) 成立. 设 $\xi \in \mathcal{H}$, 令 $\xi_n' = \xi_n \vee \xi$, 则 $(\xi_n') \subset \mathcal{H}$,$(\xi_n')$ 单调增，且 $\lim_{n\to\infty} \xi_n' = \eta \vee \xi$, 我们有

$$E[\eta \vee \xi] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n'] \leq \sup_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi] = E[\eta].$$

由于 $\eta \vee \xi \geq \eta$, 上式表明 $\eta \vee \xi = \eta$ a.s., 此即 $\eta \geq \xi$ a.s.. 条件 (i) 得证. 定理证毕.

注 令 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间. 设 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$, 且 $\mathcal{C}$ 非空. 令

$$\mathcal{H}=\{I_C: C\in\mathcal{C}\},$$

则由定理知，存在 $(C_n)\subset\mathcal{C}$, 使得

$$I_{\cup_n C_n}=\vee I_{C_n}=\text{ess.sup}\,\mathcal{H}.$$

我们称 $\bigcup\limits_n C_n$ 为 $\mathcal{C}$ 的本性上确界，并用 ess.sup$\mathcal{C}$ 记之. 类似定义 $\mathcal{C}$ 的本性下确界.

下一定理称为 **Halmos-Savage 定理**.

6.3 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间， $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的一族 P-绝对连续的概率测度, 且对可列凸组合封闭. 如果对任一 $P(A)>0$ 的 $A\in\mathcal{F}$, 存在 $Q\in\mathcal{M}$, 使得 $Q(A)>0$, 则存在 $Q_0\in\mathcal{M}$, 使得 Q_0 与 P 等价.

证 令 $\mathcal{S}=\left\{\left[\frac{dQ}{dP}>0\right]: Q\in\mathcal{M}\right\}$. 由于 $\mathcal{M}$ 对可列凸组合封闭， $\mathcal{S}$ 对集合可列并运算 a.s. 封闭. 于是存在 $Q_0\in\mathcal{M}$, 使得 $\left[\frac{dQ_0}{dP}>0\right]$=ess.sup$\,\mathcal{S}$, 即有

$$P\Big(\Big[\frac{dQ_0}{dP}>0\Big]\Big)=\sup\Big\{P(S): S\in\mathcal{S}\Big\}.$$

往证 Q_0 与 P 等价. 令 $S_0=[\frac{dQ_0}{dP}>0]$, 只需证 $P(S_0)=1$. 如果 $P(S_0)>1$, 则依假定存在 $Q_1\in\mathcal{M}$, 使 $Q_1(\Omega\setminus S_0)>0$. 于是若令 $Q=\frac{Q_0+A_1)}{2}$, 则 $Q\in\mathcal{M}$, 且 $P\Big(\Big[\frac{dQ}{dP}>0\Big]\Big)>P\Big(\Big[\frac{dQ_0}{dP}>0\Big]\Big)$, 这导致矛盾. 定理证毕.

下一定理在鞅论及金融数学中有重要应用.

6.4 定理 (严加安 [8]) 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间， K 为 L^1 中的一凸集，且 $0\in K$. 则下列三个条件等价：

(1) 对任一 $\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$, 存在 $c>0$, 使 $c\eta\notin\overline{K-(L^\infty)^+}$,

(2) 对任一非不足道 $A\in\mathcal{F}$, 存在 $c>0$, 使 $cI_A\notin\overline{K-((L^\infty)^+}$,

(3) 存在 $\zeta \in L^\infty$ 使得 $\zeta > 0$, a.s. 且 $\sup_{\zeta\in K} E[\zeta\xi] < \infty$.
这里 $\overline{B}$ 表示 B 在 L^1 中的闭包.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然. 往证 (2) $\Rightarrow$ (3). 令 $A \in \mathcal{F}$ 且 $P(A) > 0$. 由假设, 存在 $c > 0$ 使 $cI_A \notin \overline{K - (L^\infty)^+}$. 由于 $K - (L^\infty)^+$ 是 L^1 中的凸集, L^∞ 是 L^1 的对偶空间, 由泛函分析中的 Hahn-Banach 定理知, 存在 $\theta \in L^\infty$ 使

$$\sup_{\xi\in K,\eta\in(L^\infty)^+} E[\theta(\xi - \eta)] < cE[\theta I_A]. \tag{6.1}$$

在 (6.1) 中取 $\xi = 0, \eta = a\theta^-$, 及 $a > 0$ 得到

$$aE[(\theta^-)^2] < cE[\theta I_A]. \tag{6.2}$$

由于 (6.2) 对一切 $a > 0$ 成立, 必有 $\theta^- = 0$, a.s., 即 $\theta \in (L^\infty)^+$. 此外, 显然有 $P(\theta > 0) > 0$. 若以 $\dfrac{\theta}{E[\theta]}$ 代替 θ, 可假定 $E[\theta] = 1$. 于是由 (6.1) 得 $\sup_{\xi\in K} E[\theta\xi] < c$. 令

$$H = \{\theta \in (L^\infty)^+ : E[\theta] = 1, \sup_{\xi\in K} E[\theta\xi] < \infty\}.$$

我们已证 H 非空. 令 $\mathcal{C} = \{[\theta = 0] : \theta \in H\}$. 往证 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭. 设 $(\theta_n) \subset H, c_n = \sup_{\xi\in K} E[\theta_n\xi], d_n = \|\theta_n\|_{L^\infty}$. 取严格正实数列 (b_n), 满足

$$\sum_n b_n = 1, \ \sum_n c_n b_n < \infty, \ \sum_n b_n d_n < \infty.$$

设 $\theta = \sum_n b_n\theta_n$. 显然 $\theta \in H$ 且 $[\theta = 0] = \bigcap_n [\theta_n = 0]$. 这表明 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭. 于是存在 $\zeta \in H$, 使

$$P([\zeta = 0]) = \inf_{\theta\in H} P([\theta = 0]). \tag{6.3}$$

往证 $\zeta > 0$. a.s.. 假定 $P([\zeta = 0]) > 0$. 令 $A = [\zeta = 0]$, 由上所证, 存在 $\theta \in H$ 使 (6.1) 成立. 特别有 $E[\theta I_{[\zeta=0]}] > 0$. 这蕴含

$P([\theta > 0] \cap [\zeta = 0]) > 0$. 从而 $P([\theta = 0] \cap [\zeta = 0]) < P([\zeta = 0])$. 但 $[\theta = 0] \cap [\zeta = 0] \in \mathcal{C}$, 这与 (6.3) 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 (1) 不成立. 则存在 $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}$ 使对所有 $c > 0$ 都有 $c\eta \in \overline{K - (L^\infty)^+}$. 对每个 n 存在 $\xi_n \in K, \eta_n \in (L^\infty)^+$ 及 $\delta_n \in L^1$ 使 $n\eta = \xi_n - \eta_n - \delta_n$, 且 $\|\delta_n\|_{L^1} < \frac{1}{n}$. 我们有 $\xi_n \geq n\eta + \delta_n$, 且对任一严格正的随机变量 ζ 有

$$\sup_{\xi \in K} E[\zeta\xi] \geq \sup_n E[\zeta\xi_n] = +\infty,$$

这表明 (3) 不成立. (3) $\Rightarrow$ (1) 得证.

6.5 系 设 K 是 L^1 中一凸集. 若对 K 中的任一点列 (ξ_n), 有 $\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$ (或者等价地, $\forall \epsilon > 0$, 存在 $c > 0$ 使 $\forall \xi \in K, P(\xi > c) < \epsilon$.), 则存在 $\zeta \in L^\infty$, 使 $\zeta > 0$, a.s. 且 $\sup_{\xi \in K} E[\zeta\xi] < \infty$.

证 只需证明定理 6.4 的条件 (1) 成立. 不妨设 $0 \in K$, 否则任取 $\eta \in K$, 以 $\{x - \eta : x \in K\}$ 代替 K. 从定理 6.4 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明看出, 若 (1) 不成立, 则存在 $\eta \in (L^1)^+ \setminus \{0\}, (\xi_n) \subset K$ 及 $(\delta_n) \subset L^1$, 使得对每个 n, 有 $\|\delta_n\|_{L^1} \leq \frac{1}{n}$ 及 $\frac{\xi_n}{n} \geq \eta + \frac{\delta_n}{n}$. 这与 $\frac{1}{n}\xi_n^+ \xrightarrow{P} 0$ 矛盾. 证毕.

下一定理给出了本性下确界与条件期望可交换的一个充要条件 (见严加安 [9]).

6.6 定理 设 $\mathcal{H} \subset L^1$ 满足 $\inf\{E[\xi] : \xi \in \mathcal{H}\} > -\infty$, 则下列条件等价:

(1) 对任意的 $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ 及 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta_3 \in \mathcal{H}$, 使得

$$E[(\eta_3 - \eta_1 \wedge \eta_2)^+] < \epsilon;$$

(2) $E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}] = \inf\{E[\xi] : \xi \in \mathcal{H}\}$;

(3) $\text{ess.inf}\,\mathcal{H}$ 可积, 且对每个 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数 $\mathcal{G}$, 有

$$E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H} \mid \mathcal{G}] = \text{ess.inf}\{E[\xi \mid \mathcal{G}] : \xi \in \mathcal{H}\}; \tag{6.4}$$

证 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 (1) 成立. 取 $(\xi_n) \subset \mathcal{H}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\xi_n] = \inf_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi] \doteq h$. 对给定 $\epsilon > 0$, 令 $\eta_1 = \xi_1$, 并归纳选取 $\eta_n \in \mathcal{H}$, 使 $E[(\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+] < 1/2^{n-1}$, $n \geq 2$. 令 $\delta_n = (\eta_n - \eta_{n-1} \wedge \xi_n)^+$, $n \geq 2$, $\delta_1 = 0$, 并令

$$\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k, \quad \eta_n' = \eta_n + \gamma_n, \quad n \geq 1.$$

则有

$$\eta_{n+1}' = \eta_{n+1} + \gamma_{n+1} \leq (\eta_n + \delta_{n+1}) + \gamma_{n+1} = \eta_n', \quad n \geq 1.$$

于是 η_n' 单调下降趋于一极限 η'. 由于

$$h \leq E[\eta_n] \leq E[\xi_n] + E[\delta_n], \quad E[\eta_n] + E[\gamma_n],$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} E[\delta_n] = \lim\limits_{n\to\infty} E[\gamma_n] = 0$, 我们有

$$E[\eta'] = \lim_{n\to\infty} E[\eta_n'] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n] = h.$$

现令 $\xi^* = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \xi_n$, 往证 $E[\xi^*] = h$ 及 $\xi^* = \text{ess.inf}\,\mathcal{H}$, 由此推得 (2). 我们有 (注意 $\delta_1 = 0$)

$$\eta_n' = \eta_n + \gamma_n \leq \xi_n + \delta_n + \gamma_n \leq \xi_n + \gamma_1, \quad n \geq 1,$$

从而

$$\eta' = \bigwedge_n \eta_n' \leq \bigwedge_n (\xi_n + \gamma_1) = \xi^* + \gamma_1.$$

因此有

$$E[\xi^*] \geq E[\eta'] - E[\gamma_1] \geq h - \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的, 且 $E[\xi^*] \leq \inf_n E[\xi_n] = h$, 故有 $E[\xi^*] = h$. 另一方面, 对任一 $\xi_0 \in \mathcal{H}$, 考虑序列 $(\xi_n, n \geq 0)$. 由已证结果得

$$E[\xi_0 \wedge \xi^*] = E[\bigwedge_{k=0}^{\infty} \xi_k] = h = E[\xi^*],$$

由此知 $\xi_0 \geq \xi^*$, a.s.. 于是最终有 $\xi^* = \text{ess.inf}\,\mathcal{H}$. (1) $\Rightarrow$ (2) 得证.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 (2) 成立. 令 $\xi^* = \text{ess.inf}\,\mathcal{H}$. 依假定有 $E[\xi^*] = \inf_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi] \doteq h$. 于是对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\xi \in \mathcal{H}$ 使 $E[\xi] \leq h + \epsilon$, 即 $E[\xi - \xi^*] \leq \epsilon$, 这蕴含 (1).

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 (1) 成立. 令 $\mathcal{H}' = \{E[\xi|\mathcal{G}] : \xi \in \mathcal{H}\}$. 对任给 $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathcal{H}$, 由 Jensen 不等式,

$$
\begin{aligned}
(E[\eta_3|\mathcal{G}] - E[\eta_1|\mathcal{G}] \wedge E[\eta_2|\mathcal{G}])^+ &\leq (E[\eta_3 - \eta_1 \wedge \eta_2|\mathcal{G}])^+ \\
&\leq E[(\eta_3 - \eta_1 \wedge \eta_2)^+|\mathcal{G}],
\end{aligned}
$$

从而 $\mathcal{H}'$ 满足条件 (1). 对任给 $A \in \mathcal{H}$, 令

$$
\mathcal{H}_A = \{I_A\xi : \xi \in \mathcal{H}\}, \quad \mathcal{H}'_A = \{I_A\xi : \xi \in \mathcal{H}'\}.
$$

显然 $\mathcal{H}_A$ 及 $\mathcal{H}'_A$ 满足 (1). 因此由 (1) $\Rightarrow$ (2) 有

$$
\begin{aligned}
E[I_A \text{ess.inf}\,\mathcal{H}] &= E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}_A] = \inf_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi I_A] \\
&= \inf_{\xi\in\mathcal{H}} E[E[\xi|\mathcal{G}]I_A] = \inf_{\eta\in\mathcal{H}'_A} E[\eta] \\
&= E[\text{ess.inf}\,\mathcal{H}'_A] \\
&= E[I_A \text{ess.inf}\,\mathcal{H}'],
\end{aligned}
$$

由此推得 (6.4).

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然. 事实上, 在 (6.4) 中令 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ 即得 (2).

习题

6.7 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数, $A \in \mathcal{F}$, 则

$$
[E[I_A|\mathcal{G}] > 0] = \text{ess.inf}\,\{B \in \mathcal{G} : B \supset A\},
$$

$$
[E[I_A|\mathcal{G}] = 1] = \text{ess.sup}\,\{B \in \mathcal{G} : B \subset A\}.
$$

6.8 设 $(\xi, \xi_n, n \geq 1)$ 为一列实值随机变量, 令

$$
s\limsup_n \xi_n = \text{ess.inf}\,\{\eta : \lim_n P(\xi_n > \eta) = 0\},
$$

$$s\liminf_n \xi_n = \text{ess.sup}\{\eta : \lim_n P(\xi_n < \eta) = 0\},$$

则

$$\liminf_n \xi_n \le s\liminf_n \xi_n \le s\limsup_n \xi_n \le \limsup_n \xi_n,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow s\limsup_n \xi_n = s\liminf_n \xi_n.$$

6.9 设定理 6.6 中的三个等价条件之一成立. 令 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$, 使得 $\inf_{\xi\in\mathcal{K}} E[\xi] = \inf_{\xi\in\mathcal{H}} E[\xi]$, 则 $\text{ess.inf}\mathcal{K} = \text{ess.inf}\mathcal{H}$, 且有

$$E[\text{ess.inf}\mathcal{H}|\mathcal{G}] = \text{ess.inf}\{E[\xi|\mathcal{G}] : \xi\in\mathcal{K}\}.$$

§7 解析集与 Choquet 容度

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. 本节主要介绍 $\mathcal{F}$- 解析集的概念和基本性质, 并借助于 Choquet 容度证明 $\mathcal{F}$- 解析集是普遍可测集.

7.1 定义 设 F 为一抽象集合, $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$. 令 A 为 F 的一子集, 如果存在一可距离化紧拓扑空间 E 及 $E\times F$ 的一子集 $B\in(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 A 为 B 在 F 上的投影, 则称 A 为 **$\mathcal{F}$-解析集**. 这里 $\mathcal{K}(E)$ 表示 E 中紧子集全体, $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F} = \{K\times G : K\in\mathcal{K}(E)\}$.

今后用 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$- 解析集全体, 由定义立刻推知如下

7.2 引理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$. 则

(1) $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$;

(2) $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow$ 存在 $B\in\mathcal{F}_\sigma$, 使 $B\supset A$;

(3) $F\in\mathcal{A}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow F\in\mathcal{F}_\sigma$;

(4) 若 $\mathcal{G}$ 为 F 上一集类, 且 $\mathcal{G}\supset\mathcal{F}$, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{G})\supset\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

7.3 定理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并及可列交运算封闭.

证 设 $A_n\in\mathcal{A}(\mathcal{F}), n\ge 1$. 依定义, 对每个 n, 存在一可距离化紧空间 E_n 及 $E_n\times F$ 的一子集 $B_n\in(\mathcal{K}(E_n)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 A_n 为 B_n 在 F 上的投影. 令 E 为乘积拓扑空间 $\prod_n E_n$, 则易知 E 是

可距离化的紧空间. 令 $C_n = E_1 \times \cdots \times E_{n-1} \times B_n \times E_{n+1} \cdots$(下面简记为 $\prod\limits_{m \neq n} E_m \times B_n$), 则有

$$\bigcap_n A_n = \bigcap_n \pi(C_n) = \pi(\bigcap_n C_n), \tag{7.1}$$

这里 π 表示 $E \times F$ 到 F 上的投影, 并将 C_n 视为 $E \times F$ 的子集. 设 $B_n = \bigcap\limits_k B_{n,k}$, 其中 $B_{n,k} \in (K(E_n) \otimes \mathcal{F})_\sigma, k \geq 1$. 由于 $\prod\limits_{m \neq n} E_m \times B_{n,m} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_\sigma$, 故 $C_n \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 从而 $\bigcap\limits_n C_n \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 由 (7.1) 知 $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列交运算封闭.

现令 E 为 (E_n) 的拓扑和 $\sum\limits_n E_n$ 的单点紧化, 则 E 为可距离化紧空间. 我们将 $\sum\limits_n (E_n \times F)$ 与 $(\sum_n E_n) \times F$ 视为同一, 并用 π 表示 $E \times F$ 到 F 上的投影, 则有

$$\pi(\sum_n B_n) = \bigcup_n A_n. \tag{7.2}$$

由于 $\sum\limits_n B_{n,k} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_\sigma$, 且 $\forall n \neq m, B_{n,k} \cap B_{m,j} = \emptyset$, 故有

$$\sum_n B_n = \sum_n \bigcap_k B_{n,k} = \bigcap_k \sum_n B_{n,k} \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}.$$

于是由 (7.2) 知, $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并运算封闭. 定理证毕.

7.4 引理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset \in \mathcal{F}$, 令 E 为一可距离化紧空间. 则 $\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})$,$A$ 到 F 上投影为 $\mathcal{F}$- 解析集.

证 依定义, 存在一可距离化紧空间 G 及 $(\mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 的一元素 A_1, 使得 A 为 A_1 在 $E \times F$ 上的投影. 但 $G \times E$ 为可距离化紧空间, $\mathcal{K}(G) \otimes \mathcal{H}(E) \subset \mathcal{K}(G \times E)$, 且 A_1 在 F 上的投影与

A 在 F 上的投影一致，故 $\pi(A)$ 为 $\mathcal{F}$ - 解析集 (因为依定义 $\pi(A_1)$ 为 $\mathcal{F}$- 解析集). 证毕.

7.5 定理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类，且 $\emptyset \in \mathcal{F}$. 则

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$;

(2) 为要 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 必须且只需： $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

证 (1) 设 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$, 则存在一可距离化紧空间 E 及一 $A' \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))_{\sigma\delta}$, 使得 A 为 A' 在 F 上的投影. 但显然有

$$\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F}),$$

故由定理 7.3 知 $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})$. 因此，由引理 7.4 知 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.(1) 得证.

(2) 只需证充分性. 设 (2) 中条件成立. 令

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) : A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})\},$$

则 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, 并由定理 7.3 知， $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数，故 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 证毕.

7.6 定理 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间， X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间. 则有

(1) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X)), \mathcal{A}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$;

(2) $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F}), A$ 在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$- 解析集.

证 (1) 设 $K \in \mathcal{K}(X)$, 则 K^c 为开集. 令 $\mathcal{U}$ 为 X 的可数基，则对每个 $x \in K^c$, 存在开集 U, 其闭包为紧集, 使得 $x \in U \subset \overline{U} \subset K^c$. 于是存在 $V \in \mathcal{U}$, 使得 $\overline{V}$ 为紧集, 且 $x \in V \subset \overline{V} \subset K^c$. 令 $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{U} : \overline{V}$ 为紧集，且 $\overline{V} \subset K^c\}$, 则 $\mathcal{V}$ 为可数类，且 $K^c = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$, 故 $K^c \in \mathcal{K}(X)_\sigma$, 从而 $K^c \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$. 由于 $\sigma(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{B}(X)$. 故由定理 7.5 知， $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$, 从而有 $\mathcal{A}(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{A}(\mathcal{K}(X))$.

(2) $B \in \mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}$, 则 $B^c \in (\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})$. 又由于 $\sigma(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{F}$, 故 $\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})$(定理 7.5(2)). 因此由定理 7.5(1) 知， $\mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F})$.

(3) 由于 X 是 σ- 紧的 (第五章习题 1.37), 存在 $K_n \in \mathcal{K}(X), n \geq 1$, 使 $X = \bigcup_n K_n$. 对每个 n, 我们有 (见习题 7.12)

$$
\begin{aligned}
&(K_n \times \Omega) \cap \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}) \\
&= \mathcal{A}(K_n \times \Omega) \cap (\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F})) \\
&= \mathcal{A}((K_n \cap \mathcal{K}(X)) \otimes \mathcal{F}).
\end{aligned}
$$

由于 K_n 为可距离化紧空间, 且 $\mathcal{K}(K_n) = K_n \cap \mathcal{K}(X)$, 故对任何 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{F}), (K_n \times \Omega) \cap A$ 在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$- 解析集 (引理 7.4). 但 $A = \bigcup_n [(K_n \times \Omega) \cap A]$, 故 A 在 Ω 上的投影也是 $\mathcal{F}$- 解析集. 证毕.

下面我们定义 Choquet 容度.

7.7 定义 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 它对有限并及有限交运算封闭, 且 $\emptyset \in \mathcal{F}$. 令 $\mathcal{A}(F)$ 表示 F 的所有子集全体, I 为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上的一非负集函数. 称 I 为 F 上的一 **Choquet $\mathcal{F}$-容度**, 如果 I 具有下列性质:

(1) I 单调非降: $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$;

(2) I 从下连续: $A_n \uparrow A \Rightarrow I(A_n) \uparrow I(A)$;

(3) I 沿 $\mathcal{F}$ 从上连续: $A_n \in \mathcal{F}, A_n \downarrow A \Rightarrow I(A_n) \downarrow I(A)$. F 的子集 A 称为 **I-可容的**, 如果

$$
I(A) = \sup\{I(B): B \subset A, B \in \mathcal{F}_\delta\}. \tag{7.3}
$$

7.8 引理 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$- 容度, 则 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 中每个元素都是 I- 可容的.

证 设 $A \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$, 若 $I(A) = -\infty$, 则 $I(\emptyset) = -\infty$. 故 (7.3) 成立. 现设 $I(A) > -\infty$, 令 $A_{n,m} \in \mathcal{F}$, 使得 $A = \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$. 由于 $\mathcal{F}$ 对有限并运算封闭, 故不妨设对固定 $n, (A_{n,m}, m \geq 1)$ 为非降序列. 令 $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}, n \geq 1$. 为证 (7.3), 只需证明: 对任何 $a < I(A)$, 存在 $B \in \mathcal{F}_\delta, B \subset A$, 使 $I(B) \geq a$.

现设 $a < I(A)$, 由 I 的从下连续性，我们有

$$I(A) = I(A \cap A_1) = \lim_{n\to\infty} I(A \cap A_{1,m}).$$

故存在 m_1, 使 $I(A \cap A_{1,m_1}) > a$. 这时有

$$I(A \cap A_{1,m_1}) = I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_2) = \lim_{n\to\infty} I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_{2,m}),$$

于是存在 m_2, 使 $I(A \cap A_{1,m_1} \cap A_{2,m_2}) > a$. 依此类推，我们得到一自然数列 $(m_k)_{k\geq 1}$, 使得对一切 $k \geq 1$, 有

$$I(A \cap A_{1,m_1} \cap \cdots \cap A_{k,m_k}) > a.$$

令 $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_{k,m_k}, B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, 则 $B_n \in \mathcal{F}, B_n \downarrow B \in \mathcal{F}_\delta$. 由于 $I(B_n) > a$, 故由 I 沿 $\mathcal{F}$ 的从上连续性知，$I(B) = \lim_{n\to\infty} I(B_n) \geq a$. 由于 $B_n \subset A_n$, 故称 $B \subset A$. 引理证毕.

下一定理称为 **Choquet** 定理.

7.9 定理 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$- 容度，则一切 $\mathcal{F}$- 解析集都是 I- 可容的.

证 设 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 则存在一可距离化紧空间 E 及一 $B \in (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使得 $A = \pi(B)$. 这里 π 为 $E \times F$ 到 F 上的投影. 令 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}(E) \otimes \mathcal{F})_{\cup f}$($\mathcal{C}_{\cup f}$ 表示用有限并运算封闭 $\mathcal{C}$ 所得集类), 由于 $\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})$ 对有限交运算封闭，故 $\mathcal{H}$ 亦然. 此外有 $\mathcal{H}_{\sigma\delta} = (\mathcal{K}(E) \otimes \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 令

$$J(H) = I(\pi(H)),\ H \supset E \times F,$$

往证 J 为 $E \times F$ 上的 Choquet $\mathcal{H}$- 容度. 显然 J 满足定义 7.7 中的性质 (1) 及 (2). 剩下只需验证性质 (3).

设 $H \in \mathcal{H}, H = \bigcup_{k=1}^{m} (C_k \times D_k)$, 其中 $C_k \in \mathcal{K}(E)$, $D_k \in \mathcal{F}$, 则对 $x \in \pi(H)$, 我们有 $(E \times \{x\}) \cap H = C \times \{x\}$, 其中 $C \neq \emptyset$, 且

$$C = \bigcup_{\{k:x\in D_k\}} C_k \in \mathcal{K}(E).$$

现设 $B_n \in \mathcal{H}, B_n \downarrow$. 令 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi(B_n)$, 则对每个 n, 存在 $C_n \in \mathcal{K}(E)$, 使得

$$(E \times \{x\}) \cap B_n = C_n \times \{x\}.$$

由于 $B_n \downarrow$, 故 $C_n \downarrow$. 又因 C_n 为 E 的非空紧子集, 故 $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$, 于是

$$(E \times \{x\}) \cap \bigcap_n B_n = \bigcap_n C_n \times \{x\} \neq \emptyset,$$

即有 $x \in \pi(\bigcap_n B_n)$. 这表明 $\bigcap_n \pi(B_n) \subset \pi(\bigcap_n B_n)$. 但相反的包含关系恒成立, 故有

$$\bigcap_n \pi(B_n) = \pi(\bigcap_n B_n). \tag{7.4}$$

由于 $\pi(B_n) \in \mathcal{F}, \pi(B_n) \downarrow$, 故由 I 沿 $\mathcal{F}$ 的从上连续性得

$$\begin{aligned} J(\bigcap_n B_n) &= I\big(\pi(\bigcap_n B_n)\big) = I(\bigcap_n \pi(B_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} I(\pi(B_n)) = \lim_{n\to\infty} J(B_n), \end{aligned}$$

这表明 J 沿 $\mathcal{H}$ 从上连续. 因此 J 为 $E \times F$ 上的 Choquet $\mathcal{H}$- 容度.

下面借助于容度 J 证明 A 是 I- 可容的. 由于 $B \in \mathcal{H}_{\sigma\delta}$, 故由引理 7.8,$B$ 为 J- 可容的. 但由 (7.4) 看出: $C \in \mathcal{H}_\delta \Rightarrow \pi(C) \in \mathcal{F}_\delta$, 于是有

$$\begin{aligned} I(A) = I(\pi(B)) = J(B) &= \sup(J(C) : C \subset B, C \in \mathcal{H}_\delta\} \\ &= \sup\{I(\pi(C)) : C \subset B, C \in \mathcal{H}_\delta\} \\ &\le \sup\{I(D) : D \subset A, D \in \mathcal{F}_\delta\}. \end{aligned}$$

但恒有 $I(A) \ge \sup\{I(D) : D \subset A, D \in \mathcal{F}_\delta\}$, 故实际上等号成立. 这表明 A 是 I- 可容的. 定理证毕.

作为 Choquet 定理的一个重要应用, 我们证明可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 中一切 $\mathcal{F}$- 解析集都是普遍可测的.

7.10 定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间, 令 $\widehat{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化 (即 $\widehat{\mathcal{F}}=\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}}\overline{\mathcal{F}}^P$, 其中 $\mathcal{P}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上概率测度全体), 则有 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\widehat{\mathcal{F}}\subset\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})$.

证 设 P 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一概率测度, 令

$$I(A)=\inf\{P(B):\ B\supset A,B\in\mathcal{F}\},\ A\subset\Omega, \tag{7.5}$$

易证 I 是 Ω 上的 Choquet $\mathcal{F}$- 容度. 由定理 7.9 知, 对一切 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 有 (注意 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\delta$)

$$I(A)=\sup\{P(B):\ B\subset A,B\in\mathcal{F}\}. \tag{7.6}$$

由 (7.5) 及 (7.6) 知 $A\in\overline{\mathcal{F}}^P$, 但概率测度 P 是任意的, 故 $A\in\widehat{\mathcal{F}}$. 这表明 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\widehat{\mathcal{F}}$, 进一步有

$$\widehat{\mathcal{F}}\subset\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})\subset(\widehat{\mathcal{F}})^{\widehat{}}=\widehat{\mathcal{F}},$$

从而 $\mathcal{A}(\widehat{\mathcal{F}})=\widehat{\mathcal{F}}$. 证毕.

7.11 注 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可分且可离的可测空间. 若存在 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{B}(R))$ 使 $(\Omega,\mathcal{F})$ 与 $(A,\mathcal{B}(A))$ 同构, 则称 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为 **Souslin 可测空间**. 由定理 7.10 知 Souslin 空间为 Radon 可测空间.

习题

7.12 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上一集类, 且 $\emptyset\in\mathcal{F}$, 设 A 为 F 的一子集, 令 $A\cap\mathcal{F}=\{A\cap B:B\in F\}$, 则有 $\mathcal{A}(A\cap\mathcal{F})=A\cap\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 这里 $A\cap\mathcal{F}$ 考虑为 A 上的集类.

7.13 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}$- 容度, 则 I 为 F 上的 Choquet $\mathcal{F}_\delta$- 容度.

§8 经典鞅论

鞅 (martingale) 这一概念是 J. Ville 于 1939 年首先引进概率论的，他借用了法文 martingale 有 "倍赌策略"(即赌输后加倍赔注) 这一含义. 中译名 "鞅"(马颔缰) 则是该法文词的另一含义. Lévy 最早研究了鞅序列. 1953 年 Doob 在他的《Stochastic Processes》这部历史性专著中首次系统总结了 Lévy 和他自己有关鞅的理论及应用成果，使鞅论成了随机过程理论的一个独立分支.

本节介绍经典鞅论的主要结果 (如 Doob 不等式、上穿不等式、收敛定理和 Doob 停止定理等). 我们只讨论离散时间情形.

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间， $(\mathcal{F}_n,n\geq 0)$ 为一列单调增的 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数. 令 $\mathcal{F}_\infty\doteq\sigma(\cup_n\mathcal{F}_n)$. 随机变量序列 $(X_n,n\geq 0)$ 称为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的，如果每个 X_n 为 $\mathcal{F}_n$- 可测的.

定义 8.1 $(\mathcal{F}_n)$ 适应的随机变量序列 $(X_n,n\geq 0)$ 称为**鞅** (**上鞅**、**下鞅**)，如果每个 X_n 为可积的，且

$$E[X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n]=X_n(\leq X_n,\ \geq X_n)\ \text{ a.s.}\,.$$

定理 8.2 (1) 设 (X_n),(Y_n) 为鞅 (上鞅)，则 (X_n+Y_n) 为鞅 (上鞅)，$(X_n\wedge Y_n)$ 为上鞅.

(2) 设 (X_n) 为鞅 (下鞅). f 为 $\mathbb{R}$ 上一连续 (连续非降) 凸函数. 如果每个 $f(X_n)$ 可积，则 $\big(f(X_n)\big)$ 为下鞅.

证 (1) 显然. (2) 由 Jensen 不等式推得.

定义 8.3 令 $\overline{\mathbb{N}}_0=\{0,1,2,\cdots,\infty\}$. 设 T 为 $\overline{\mathbb{N}}_0$- 值随机变量. 如果对每个 $n\in\mathbb{N}_0,[T=n]\in\mathcal{F}_n$，则称 T 为关于 $(\mathcal{F}_n)$ 的**停时**. 对停时 T，令

$$\mathcal{F}_T=\{A\in\mathcal{F}_\infty\ :\ A\cap[T=n]\in\mathcal{F}_n\,,\,\forall n\geq 0\},$$

称 $\mathcal{F}_T$ 为 T 前事件 σ- 代数.

下一定理列出了有关停时的一些基本结果，其证明都是不足道的，故从略.

定理 8.4 设 S,T 为停时，(S_n) 为停时列.

(1) $\wedge_n S_n, \vee_n S_n$ 为停时；

(2) $A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \cap [S \le T] \in \mathcal{F}_T$, $A \cap [S = T] \in \mathcal{F}_T$;

(3) $S \le T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$;

(4) 设 $A \in \mathcal{F}_S$, 令 $S_A = SI_A + \infty I_{A^c}$，则 S_A 为停时，且 $\mathcal{F}_{S_A} \cap A = \mathcal{F}_S \cap A$. 我们称 S_A 为 S 到 A 上的局限.

定理 8.5 设 (X_n) 为一适应随机序列，T 为停时，则 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$- 可测.

证 设 B 为一 Borel 集，$n \ge 0$, 则

$$[X_T I_{[T<\infty]} \in B] \cap [T = \infty] = \emptyset\ ,$$

$$[X_T I_{[T<\infty]} \in B] \cap [T = n] = [X_n \in B] \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n\ ,$$

这表明 $[X_T I_{[T<\infty]}] \in \mathcal{F}_T$, 即 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_T$ 可测.

下一定理是有界停时的 Doob 停止定理. 它是证明下面的鞅不等式的基础.

定理 8.6 设 (X_n) 为鞅 (上鞅), S,T 为有界停时，且 $S \le T$, 则有

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_S (\le X_S) \text{ a.s.}\ . \tag{8.1}$$

证 只需证上鞅情形. 设 $T \le n$, 由于 $|X_T| \le \sum_{j=1}^n |X_j|$, $|X_S| \le \sum_{j=1}^n |X_j|$, 故 X_S, X_T 可积. 令 $A \in \mathcal{F}_S, j \ge 0$, 则

$$A_j \doteq A \cap [S = j] \cap [T > j] \in \mathcal{F}_j\ .$$

首先假定 $T - S \le 1$. 这时由上鞅性质

$$\int_A (X_S - X_T) dP = \sum_{j=0}^{n} \int_{A_j} (X_j - X_{j+1}) dP \ge 0\ .$$

对一般情形，令 $R_j = T \wedge (S + j), 1 \le j \le n$. 则每个 R_j 为停时，且 $S \le R_1 \le \cdots \le R_n$, $R_1 - S \le 1$, $R_{j+1} - R_j \le 1 (1 \le j \le n-1)$.

令 $A \in \mathcal{F}_S$. 由定理 8.4(3) 知 $A \in \mathcal{F}_{R_j}, 1 \le j \le n$. 故由前面已证结果得

$$\int_A X_S dP \ge \int_A X_{R_1} dP \ge \cdots \ge \int_A X_T dP . \tag{8.2}$$

由于 X_S 为 $\mathcal{F}_S$- 可测 (定理 8.5), 故由 (8.2) 推得 (8.1).

定理 8.7 设 $k \ge 1, (X_n)_{n \le k}$ 为一上鞅. 则对 $\lambda > 0$ 有

$$\lambda P(\sup_{n \le k} X_n \ge \lambda) \le E[X_0] - \int_{[\sup_{n \le k} X_n < \lambda]} X_k dP , \tag{8.3}$$

$$\lambda P(\inf_{n \le k} X_n \le -\lambda) \le \int_{[\inf_{n \le k} X_n \le -\lambda]} (-X_k) dP , \tag{8.4}$$

$$\lambda P(\sup_{n \le k} | X_n | \ge \lambda) \le E[X_0] + 2E[X_k^-] . \tag{8.5}$$

证 令 $T = \inf\{n \ge 0 : X_n \ge \lambda\} \wedge k$, 则 T 为有界停时, 且在 $[\sup_{n \ge k} X_n \ge \lambda]$ 上有 $X_T \ge \lambda$, 在 $[\sup_{n \le k} X_n < \lambda]$ 上有 $T = k$. 于是由定理 8.6 得

$$\begin{aligned} E[X_0] \ge E[X_T] &= \int_{[\sup_{n \le k} X_k \ge \lambda]} X_T dP + \int_{[\sup_{n \le k} X_k < \lambda]} X_T dP \\ &\ge \lambda P(\sup_{n \le k} X_n \ge \lambda) + \int_{[\sup_{n \le k} X_n < \lambda]} X_k dP, \end{aligned}$$

此即 (8.3). 同理可证 (8.4). 由 (8.3) 及 (8.4) 立得 (8.5).

定理 8.8 设 $k \ge 1, (X_n)_{n \le k}$ 为一鞅或非负下鞅, 令 $X_k^* = \sup_{n \le k} |X_n|$.

(1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $p \ge 1$ 有

$$P(X_k^* \ge \lambda) \le \lambda^{-p} E[| X_k |^p] . \tag{8.6}$$

(2) 对任何 $p > 1$ 有

$$\|X_k^*\|_p \le \frac{p}{p-1} \|X_k\|_p . \tag{8.7}$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 为 L^p- 范数.

不等式 (8.6) 及 (8.7) 分别称为 **极大值不等式** 及 **Doob 不等式**.

证 不妨设 $E[|X_k|^p]<\infty$. 由 Jensen 不等式易知 $E[|X_n|^p]<\infty, 0\le n\le k-1$. 故由定理 8.2(2), $(|X_n|^p, n\le k)$ 为下鞅. 对上鞅 $(-|X_n|^p, 0\le n\le k)$ 及 λ^p 应用不等式 (8.4) 即得 (8.6).

往证 (8.7). 设 Φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上一右连续增函数且 $\Phi(0)=0$. 由 Fubini 定理及 (8.4) 得

$$
\begin{aligned}
E[\Phi(X_k^*)] &= \int_\Omega \int_{[0,X_k^*]} d\Phi(\lambda)dP \\
&= \int_{[0,\infty]} P(X_k^*\ge\lambda)d\Phi(\lambda) \\
&\le \int_0^\infty (\lambda^{-1}\int_{[X_k^*\ge\lambda]} |X_k|dP)d\Phi(\lambda) \\
&= E\Big[|X_k|(\int_0^{X_k^*}\lambda^{-1}d\Phi(\lambda))\Big], \qquad (8.8)
\end{aligned}
$$

在 (8.8) 中令 $\Phi(\lambda)=\lambda^p$, $p>1$, 则由 (8.8) 及 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
E[(X_k^*)^p] &\le \frac{p}{p-1}E[|X_k|(X_k^*)^{p-1}] \\
&\le \frac{p}{p-1}\big(E[|X_k|^p]\big)^{\frac{1}{p}}\big(E[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (8.9)
\end{aligned}
$$

由于 $(|X_n|^p, n\le k)$ 为一下鞅, 有

$$
\|X_k^*\|_p \le \|\sum_{n=0}^k |X_n|\|_p \le (k+1)\|X_k\|_p < \infty .
$$

在 (8.9) 两边同乘 $\big(E[(X_k^*)^p]\big)^{\frac{1-p}{p}}$ 即得 (8.7).

下面我们将证明上鞅的**上穿不等式**. 为此, 先交代一些记号.

设 (X_n) 为一 $(\mathcal{F}_n)$ 适应随机序列，$[a,b]$ 为一闭区间. 令

$$T_0=\inf\{n\geq 0: X_n\leq a\}, \qquad T_1=\inf\{n>T_0: X_n\geq b\},$$
$$T_{2j}=\inf\{n>T_{2j-1}: X_n\leq a\}, \; T_{2j+1}=\inf\{n>T_{2j}: X_n\geq b\},$$

则 (T_k) 为一停时上升列. 我们用 $U_a^b[X,k]$ 表示序列 $(X_0,\cdots,X_k)$ 上穿 $[a,b]$ 的次数，则显然有

$$\left[U_a^b[X,k]=j\right]=[T_{2j-1}\leq k<T_{2j+1}]\in\mathcal{F}_k,$$

从而 $U_a^b[X,k]$ 为 $\mathcal{F}_k$ 可测随机变量.

定理 8.9 设 $N\geq 1,(X_n)_{n\leq N}$ 为一上鞅，则

$$EU_a^b[X,N]\leq\frac{1}{b-a}E[(X_N-a)^-]. \tag{8.10}$$

证 由定理 8.6, 对 $k\geq 0$ 有

$$\begin{aligned}0&\geq E[X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N}]\\&=E[(X_{T_{2k+1}\wedge N}-X_{T_{2k}\wedge N})(I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]}+I_{[N\geq T_{2k+1}]})]\\&\geq E[(X_n-a)I_{[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]}+(b-a)I_{[N\geq T_{2k+1}]}].\end{aligned} \tag{8.11}$$

由于 $\left[U_a^b[X,N]\geq k+1\right]\subset[N\geq T_{2k+1}]$ 及 $[T_{2k}\leq N<T_{2k+1}]\subset\left[U_a^b[X,N]=k\right]$, 故由 (8.11) 得

$$P(U_a^b[X,N]\geq k+1)\leq\frac{1}{b-a}E[(X_n-a)^-I_{[U_a^b[X,N]=k]}]. \tag{8.12}$$

在 (8.12) 两边对 k 求和得 (8.10).

下一定理是 Doob 的鞅收敛定理.

定理 8.10 设 (X_n) 为一上鞅. 如果 $\sup_n E[X_n^-]<\infty$(或者等价地，$\sup_n E[|X_n|]<\infty$, 因为 $E[|X_n|]=E[X_n]+2E[X_n^-]$), 则当 $n\to\infty$ 时，X_n a.s. 收敛于一可积随机变量 X_∞. 若 (X_n) 为非负上鞅，则对一切 $n\geq 0$ 有

$$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_n]\leq X_n \quad \text{a.s.}. \tag{8.13}$$

证 令 Q 表示有理数全体. 设 $a,b\in Q, a<b$. 令 $U_a^b(X)$ 为序列 $(X_n)_{n\geq 0}$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数, 即 $U_a^b(X)=\lim_{N\to\infty}U_a^b(X,N)$, 由 (8,7) 我们有

$$E[U_a^b(X)]\leq \frac{1}{b-a}\sup_N E[(X_N-a)^-]\leq \frac{1}{b-a}(a^+\sup_N E[X_N^-])<\infty.$$

于是 $U_a^b(X)<\infty$ a.s.. 令

$$W_{a,b}=[\liminf_{n\to\infty}X_n<a\ ,\ \limsup_{n\to\infty}X_n>b],$$
$$W=\bigcup_{a,b\in Q,a<b}W_{a,b}\ .$$

由于 $W_{a,b}\subset[U_a^b(X)=+\infty]$, 故 $P(W_{a,b})=0$, 从而 $P(W)=0$. 若 $\omega\notin W$, 则 $\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)$ 存在, 记为 $X_\infty(\omega)$; 若 $\omega\in W$, 令 $X_\infty(\omega)=0$. 于是 $X_n\longrightarrow X_\infty$ a.s., 且由 Fatou 引理,

$$E[|X_\infty|]\leq\sup_n E[|X_n|]<\infty\ .$$

另一结论由条件期望的 Fatou 引理推得.

系 8.11 设 (X_n) 为一鞅 (上鞅). 如果 (X_n) 一致可积, 则 X_n a.s. 且 L^1 收敛于 X_∞. 此外, $\forall n\geq 0$

$$E[X_\infty\mid\mathcal{F}_n]=X_n(\leq X_n)\quad \text{a.s.}. \tag{8.14}$$

系 8.12 设 ξ 为一可积随机变量, 令 $\xi_n=E[\xi\mid\mathcal{F}_n]$, $\eta=E[\xi\mid\mathcal{F}_\infty]$, 则 ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于 η.

证 由于 (ξ_n) 一致可积 (定理 5.7), 故由定理 8.10 知, ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于某 ζ. 设 $A\in\bigcup_n\mathcal{F}_n$, 则存在某 n, 使 $A\in\mathcal{F}_n$, 于是有

$$E[\zeta I_A]=E[\xi_n I_A]=E[\xi I_A]=E[\eta I_A].$$

由于 ζ,η 均为 $\mathcal{F}_\infty$- 可测, 故由习题 2.19 知, $\zeta=\eta$, a.s..

现在我们研究"反向上鞅"(即以 $-\mathbb{N}_0=\{\cdots,-2,-1,0\}$ 为参数集的上鞅) 的收敛性.

设 $((\mathcal{F}_n))_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 为一列 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma-$ 域, 对一切 $n\in-\mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}_{n-1}\subset\mathcal{F}_n$, 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 适应的随机序列 $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 称为**鞅**(**上鞅**), 如果对每个 $n\in-\mathbb{N}_0$, X_n 可积, 且有

$$E[X_n\mid\mathcal{F}_{n-1}]=X_{n-1}(\leq X_{n-1})\ \text{ a.s.}\,.$$

定理 8.13 设 $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 为一上鞅, 则极限 $\lim_{n\longrightarrow-\infty}X_n$ a.s. 存在. 如果 $\lim_{n\to-\infty}E[X_n]<+\infty$, 则 (X_n) 一致可积, X_n a.s. 且 L^1 收敛于 $X_{-\infty}$.

证 我们用 $U_a^b[X,-N]$ 表示序列 $(X_{-N},X_{-N+1},\cdots,X_0)$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数, 则由 (8.7) 得

$$EU_a^b[X,-N]\leq\frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-]\,.$$

令 $U_a^b(X)=\lim_{N\to+\infty}U_a^b[X,-N]$, 我们有

$$EU_a^b(X)\leq\frac{1}{b-a}E[(X_0-a)^-]<+\infty\,.$$

由于 $U_a^b(X)$ 为序列 $(-X_0,-X_{-1},-X_{-2},\cdots)$ 上穿 $[-b,-a]$ 的次数, 故由定理 8.10 的证明知 $X_n\to X_{-\infty}$ a.s.(但不必有 $|X|_{-\infty}<\infty$ a.s.).

当 $n\to-\infty$ 时, $E[X_n]\uparrow A>-\infty$. 假定 $A<+\infty$. 往证 $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 一致可积. 由于 $(E[X_0|\mathcal{F}_n])_{n\in-\mathbb{N}_0}$ 一致可积, 只需证 $(X_n-E[X_0|\mathcal{F}_n])$ 一致可积. 于是, 不妨假定 (X_n) 为非负上鞅. 给定 $\epsilon>0$, 取自然数 k 足够大, 使得 $A-E[X_{-k}]<\epsilon/2$. 对 $c>0$ 及 $n<-k$, 由上鞅性, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{[X_n>c]}X_ndP&=E[X_n]-\int_{[X_n\leq c]}X_ndP\\&\leq E[X_n]-\int_{[X_n\leq c]}X_{-k}dP\\&=E[X_n]-E[X_{-k}]+\int_{[X_n>c]}X_{-k}dP\,.\end{aligned}$$

由于 $A \geq E[X_n] \geq E[X_{-k}]$, 故对 $n < -k$, $E[X_n] - E[X_{-k}] < \frac{\epsilon}{2}$. 另一方面，由于 $P(X_n > c) \leq \frac{1}{c}E[X_n] \leq \frac{A}{c}$. 故当 c 足够大时，对一切 $n \in -\mathbb{N}_0$ 有

$$\int_{[X_n > c]} X_{-k} dP < \frac{\epsilon}{2}$$

及

$$\int_{[X_j > \epsilon]} X_j dP < \epsilon,\ j = 0, -1, \cdots, -k.$$

于是当 c 足够大时，有

$$\sup_n \int_{[X_n > c]} X_n dP < \epsilon\ ,$$

这表明 (X_n) 一致可积. 既然 $X_n \to X_{-\infty}$ a.s., 故 (X_n) L^1 收敛于 $X_{-\infty}$.

系 8.14 设 ξ 为一可积随机变量， $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 为一列单调下降的 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma-$ 域. 令 $\xi_n = E[\xi \mid \mathcal{G}_n]$, 则 ξ_n a.s. 且 L^1 收敛于 $E[\xi \mid \bigcap_n \mathcal{G}_n]$.

证 对一切 $n \in -\mathbb{N}_0$, 令 $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_{-n}$, $\eta_n = \xi_{-n}$, 则 $(\eta_n)_{n\in -\mathbb{N}_0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)$ 为一致可积鞅. 故由定理 8.13 推得结论.

定义 8.15 一鞅 (上鞅)$(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ 称为 **可右闭的**, 如果存在一可积随机变量 $X_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, 使得对一切 $n \in \mathbb{N}_0$, $E[X_\infty|\mathcal{F}_n] = X_n(\leq X_n)$ a.s.. 这时 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 称为 **右闭鞅** (**上鞅**), X_∞ 称为 $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ 的 **右闭元**.

下一定理是右闭鞅及右闭上鞅的 Doob 停止定理.

定理 8.16 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅), S, T 为两个停时，且 $S \leq T$. 则 X_S, X_T 可积，并且有

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_S(\leq X_S)\ \text{a.s.}. \tag{8.15}$$

证 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为鞅. 令 $S_n = SI_{[S\leq n]} + (+\infty)I_{[S>n]}$, 由于集合 $\{0, 1, \cdots, n, +\infty\}$ 与集合 $\{0, 1, \cdots, n, n+1\}$ 保序同构，故由定理 8.6,

$$X_{S_n} = E[X_\infty \mid \mathcal{F}_{S_n}]\ \text{a.s.}.$$

令 $n \to \infty$ 得

$$E[X_\infty \mid \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.}\,.$$

特别，这表明 X_S 可积，对停时 T 也有同样等式，故有

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] = E[E[X_\infty \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{a.s.}\,.$$

现在设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0))$ 为上鞅，令 $Y_n = E[X_\infty|\mathcal{F}_n]$, $Z_n = X_n - Y_n$, $Y_\infty = X_\infty$ 及 $Z_\infty = 0$, 则 $(Z_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为非负上鞅，由于 $E[Z_{S_n}] \leq E[Z_0]$(定理 8.3), 故由 Fatou 引理， Z_S 可积，从而 $X_S = Y_S + Z_S$ 可积．令 $T_n = TI_{[T\leq n]} + (+\infty)I_{[T>n]}$, 则由定理 8.6

$$Z_{S_n} \geq E[Z_{T_n} \mid \mathcal{F}_{S_n}] \quad \text{a.s.}\,. \tag{8.16}$$

由于 $Z_{T_n} \uparrow Z_T$, 在 (8.16) 中令 $n \to \infty$ 得

$$Z_S \geq E[Z_T \mid \mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.}\,.$$

但由已证结果， $Y_S = E[Y_T|\mathcal{F}_S]$ a.s., 所以

$$X_S \geq E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \quad \text{a.s.}\,.$$

下一定理称为 Doob 的 **上鞅分解定理**.

8.17 定理 设 $X = (X_n)$ 为一上鞅，则 X 可唯一地分解为

$$X_n = M_n - A_n, \tag{8.17}$$

其中 (M_n) 为一鞅， (A_n) 为一增过程，满足 $A_0 = 0, A_n$ 为 $\mathcal{F}_n$- 可测， $n \geq 1$.

证 设有满足定理要求的分解 (8.17), 则

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n = E[A_{n+1} - A - n \mid \mathcal{F}_n] &= E[X_n - X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= X_n - E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

从而有

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} (X_j - E[X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j]), \quad n \geq 1. \tag{8.18}$$

这表明：满足要求的分解如果存在，则它是唯一的．另一方面，由 (8.18) 定义 (A_n)，再令 $M_n = X_n + A_n$，则易知 (M_n) 为鞅，从而 $X_n = M_n - A_n$ 为满足要求的分解．

习题

8.18 设 $(\xi, \xi_n, n \geq 1) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$\xi_n \to \xi_\infty$，a.s. 且 $|\xi_n| \leq |\xi|$，$\forall n \geq 1$，则 $E[\xi_n \mid \mathcal{F}_n]$ a.s. 且 L^1 收敛于 $E[\xi_\infty \mid \mathcal{F}_\infty]$．

8.19 (1) 设 $(X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0)$ 为一鞅 (上鞅)，S, T 为两个停时，则

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] = X_{T\wedge S} (\leq X_{T\wedge S}) \quad \text{a.s.}.$$

(2) 设 ξ 为一可积随机变量，S, T 为两个有穷停时，则

$$E[E[\xi \mid \mathcal{F}_S] \mid \mathcal{F}_T] = E[\xi \mid \mathcal{F}_{S\wedge T}] \quad \text{a.s.}.$$

参考文献

[1] Cohn, Donald L., Measure Theory, Birkhäuser, 1980.

[2] Diestel, J., Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, 1984.

[3] Kallenberg, O., Random Measure, Academic Press, 1976.

[4] Ma, Z.M. (马志明), Some Results on Regular Conditional Probabilities, Acta Math. Sinica, New Series, **1**(4), 1985, 128–133.

[5] Mukherjes, A., Pothoven, K., Real and Functional Analysis, 2nd Edition, Part A: Real Analysis, Plenum Press, 1984.

[6] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社, 1981.

[7] 严加安，测度与积分，陕西师大出版社, 1988.

[8] Yan, J.A. (严加安), Charactérisation d'une classe d'ensembles convex de L^1 ou $\mathcal{H}^1$, Séminaire de Probabilités XIV, LN in Math. **784** (1980), Springer-Verlag, 220–222.

[9] Yan, J.A. (严加安), On the communitability of essential infimum and conditional expectation operations, Chinese Science Bulletin, **30**(8) (1985), 1013–1018.

[10] Yan, J.A. (严加安), A remark on conditional expectations, Chinese Science Bulletin, **35**(9) (1990), 719–722.

名 词 索 引

一 至 四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九 画

十画以上

其它

第一章 集类与测度

§1 集合运算与集类

1.10 (1) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$,

(2) $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$,

(3) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$.

证明

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= ([AB^c\cup A^cB]\cap C^c)\cup([AB^c\cup A^cB]^c\cap C)\\ &= (AB^cC^c)\cup(A^cBC^c)\cup[(A^cB^c\cup AB)\cap C]\\ &= A(B^cC^c\cup BC)\cup A^c(BC^c\cup B^cC)\\ &= A[(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c)]^c\cup A^c(B\Delta C)\\ &= A[BC^c\cup CB^c]^c\cup A^c(B\Delta C)\\ &= A(B\Delta C)^c\cup A^c(B\Delta C)\\ &= A\Delta(B\Delta C).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= ([AC\cap(BC)^c]\cup[(AC)^c\cap BC]\\ &= [AC\cap(B^c\cup C^c)]\cup[(A^c\cup C^c)\cap BC]\\ &= AB^cC\cup A^cBC\\ &= (AB^c\cup A^cB)\cap C\\ &= (A\Delta B)\Delta C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2) &= [(A_1\cup A_2)\cap(B_1\cup B_2)^c]\cup[(A_1\cup A_2)^c\cap(B_1\cup B_2)]\\ &= A_1B_1^cB_2^c\cup A_2B_1^cB_2^c\cup A_1^cA_2^cB_1\cup A_1^cA_2^cB_2\subset A_1B_1^c\cup A_2B_2^c\cup A_1^cB_1\cup A_2^cB_2\\ &= (A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2).\end{aligned}$$

1.11 $(\liminf\limits_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup\limits_{n\to\infty}B_n)\subset\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)$.

证明

$$\begin{aligned}(\liminf_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup_{n\to\infty}B_n) &\subset (\limsup_{n\to\infty}A_n)\cap(\limsup_{n\to\infty}B_n)\\ &= (\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{k=n}^\infty A_k)\bigcap(\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{k=n}^\infty B_k)\\ &= \bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{k=n}^\infty(A_k\cap B_k)\\ &= \limsup_{n\to\infty}(A_n\cap B_n).\end{aligned}$$

1.12 对可列不交并封闭的代数为 σ- 代数.

证明 设代数 $\mathcal{C}$ 对可列不交并封闭，并设 $\forall n\ge 1,\ A_n\in\mathcal{C}$. 由题设知

$$A_n^c\in\mathcal{C},\quad \bigcup_{n=1}^\infty A_n^c = A_1^c+\sum_{n=2}^\infty(A_n^c-A_{n-1}^c)\in\mathcal{C}$$

又 $\mathcal{C}$ 为代数，故

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}.$$

即 $\mathcal{C}$ 对可列交及取余运算封闭．从而有 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数．

1.13 若 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类或同时为 π- 类和 λ- 类，则 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

证明 (1) 设 $\mathcal{C}$ 同时为代数和单调类.

要证 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数，只需证 $\mathcal{C}$ 对可列交运算封闭．于是设 $\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{C}$. 记 $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, 则 $B_n \downarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 因 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $B_n \in \mathcal{C}$. 又 $\mathcal{C}$ 为单调类，从而有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

(2) 设 $\mathcal{C}$ 同时为 π- 类和 λ- 类.

方法一：一方面，因 $\mathcal{C}$ 为 λ- 类，故 $\mathcal{C}$ 对取余运算封闭．又 $\mathcal{C}$ 为 π- 类，故 $\mathcal{C}$ 对有限交运算封闭，即 $\mathcal{C}$ 为代数．另一方面， $\mathcal{C}$ 是 λ- 类蕴含着 $\mathcal{C}$ 是单调类，从而由 (1) 得 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数.

方法二：要证 $\mathcal{C}$ 为 σ- 代数，只需证 $\mathcal{C}$ 对可列交封闭.

设 $A_n \in \mathcal{C}, n \geq 1$, 则 $A_n^c \in \mathcal{C}$. 记 $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k^c$, 则 $B_n \in \mathcal{C}$(因 $\mathcal{C}$ 为代数), 又 $\mathcal{C}$ 为 λ- 类且 $B_n \uparrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{C}$, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{C}.$$

1.14 设 $\mathcal{C}$ 为半代数，则 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 为代数.

证明 (1) 由 $\mathcal{C}$ 为半代数知 $\mathcal{C}$ 对有限交运算封闭．于是据命题 1.7(2) 有 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 对有限交运算封闭.

(2)$\forall A \in \mathcal{C}_{\sum f}$, 存在 $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{C}, A_iA_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n$ 使得 $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 且由 $\mathcal{C}$ 是半代数知 $\Omega \backslash A_i \in \mathcal{C}_{\sum f}$. 于是

$$A^c = \Omega \backslash \sum_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} (\Omega \backslash A_i) \in \mathcal{C}_{\sum f}.$$

综合 (1),(2) 得 $\mathcal{C}_{\sum f}$ 为代数.

1.15 λ- 类定义中的条件 (i) 和 (ii) 等价于如下二条件:

(i)$'$ $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$;

(ii)$'$ $A, B \in \mathcal{C},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$.

证明 (i),(ii)$\Rightarrow$(i)$'$,(ii)$'$.

首先，由 $\Omega \in \mathcal{C}$ 知 $\forall A \in \mathcal{C}$ 有 $A \subset \Omega$, 故 $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{C}$. 即 (i)$'$ 成立.

其次， $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subset A^c$且$A^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \backslash B \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$, 即 (ii)$'$ 成立.

(i)$'$,(ii)$'$$\Rightarrow$(i),(ii).

首先， $\forall A \in \mathcal{C}$ 有 $A^c \in \mathcal{C},\ A \cap A^c = \emptyset$, 故 $A \cup A^c \in \mathcal{C}$, 即 $\Omega \in \mathcal{C}$, 从而 (i) 成立.

其次，若 $A,B\in\mathcal{C}$, $B\subset A$, 则 $A^c\in\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{C}, A^c\cap B=\emptyset$, 故 $A^c\cup B\in\mathcal{C}$, 于是 $A\cap B^c\in\mathcal{C}$, 即 $A\backslash B\in\mathcal{C}$, 从而 (ii) 成立.

1.16 设 $\mathcal{C}$ 为一集类，且 $\emptyset\in\mathcal{C}$, 令

$$\mathcal{G}=\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j^c\right):n,m\geq 1,A_i,B_j\in\mathcal{C},1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\right\},$$

则 $\mathcal{G}\supset\mathcal{C}$, 且 $\mathcal{G}$ 为半环．特别若 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，则 $\{A\cap B^c\mid A,B\in\mathcal{C}\}$ 为半环.

证明 $\forall A\in\mathcal{C}$, 令 $m=n=1$, $B=\emptyset$, 则由 $\mathcal{G}$ 定义知 $A=A\cap\Omega\in\mathcal{G}$. 故 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$. $\forall A,B\in\mathcal{G}$, 则 $\exists n_0,m_0,n_1,m_1$, 使得

$$A=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right),\quad B=\left(\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right),A_i,A_l,B_j,B_k\in\mathcal{C}.$$

于是

$$A\cap B=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\cap\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\cap\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right),$$

即 $A\cap B\in\mathcal{G}$. 又

$$\begin{aligned}A\backslash B&=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right)\cap\left[\left(\bigcap_{l=1}^{n_1}A_l\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{m_1}B_k^c\right)\right]^c\\&=\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right)\cap\left[(\bigcup_{l=1}^{n_1}A_l^c)\cup(\bigcup_{k=1}^{m_1}B_k)\right]\\&=\bigcup_{l=1}^{n_1}\bigcup_{k=1}^{m_1}(A_l^c\cup B_k)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m_0}B_j^c\right).\end{aligned}$$

且任一可列并都可表示为可列不交并，故 $A\backslash B\in\mathcal{G}_{\sum f}$, 即 $\mathcal{G}$ 为半环.

特别地，记 $\overline{\mathcal{G}}=\{A\cap B^c\mid A,B\in\mathcal{C}\}$. 于是 $\forall A,B\in\overline{\mathcal{G}}$, 存在 $C,D,E,F\in\mathcal{C}$ 使得 $A=C\cap E^c$, $B=D\cap F^c$. 因 $\mathcal{C}$ 对有限并及有限交封闭，故

$$A\cap B=C\cap D\cap E^c\cap F^c=C\cap D\cap(E\cup F)^c\in\overline{\mathcal{G}},$$

$$\begin{aligned}A\backslash B=&C\cap E^c\cap(D\cap F^c)^c=C\cap(D\cup E)^c\cup(C\cap F)\cap E^c\\=&C\cap(D\cup E)^c\cap(C\cap F\cap E^c)^c\cup(C\cap(D\cup E)^c)^c\cap(C\cap F)\cap E^c\\&\cup C\cap D^c\cap E^c\cap C\cap F\cap E^c\\=&C\cap D^c\cap E^c\cap(C^c\cup F^c\cup E)\cup(C^c\cup D\cup E)\cap C\cap F\cap E^c\cup C\cap D^c\cap E^c\cap F\\=&C\cap(D\cup E\cup F)^c\cup D\cap C\cap F\cap E^c\cup C\cap F\cap(D\cup E)^c\in\overline{\mathcal{G}}_{\sum f},\end{aligned}$$

即 $\overline{\mathcal{G}}$ 为半环.

§2 单调类定理 (集合形式)

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一集类，$A\subset\Omega$. 令 $A\cap\mathcal{C}=\{A\cap B:\ B\in\mathcal{C}\}$, (这一记号以后常用到), 并用 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$ 表示 $A\cap\mathcal{C}$(视为 A 上集类) 在 A 上生成的 σ- 代数，则有 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})=A\cap\sigma(\mathcal{C})$. 对 $m(\mathcal{C}),\lambda(\mathcal{C})$ 亦有类似结果.

证明 先证 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\subset A\cap\sigma(\mathcal{C})$.

显然 $A\cap\mathcal{C}\subset A\cap\sigma(\mathcal{C})$. 下证 $A\cap\sigma(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数.

(1) $A\cap\sigma(\mathcal{C})$ 对余运算封闭. $\forall B\in A\cap\sigma(\mathcal{C})$, 则 $\exists C\in\sigma(\mathcal{C}), s.t.\ B=A\cap C$. 于是有 $B_A^c=A\backslash B=A\cap C^c\in A\cap\sigma(\mathcal{C})$, 即 $B^c\in A\cap\sigma(\mathcal{C})$.

(2) $A\cap\sigma(\mathcal{C})$ 对可列交运算封闭. $\forall B_n\in A\cap\sigma(\mathcal{C}),\ n\geq 1$. 则 $\exists C_n\in\sigma(\mathcal{C}), s.t.\ B_n=A\cap C_n$, 于是有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\in\sigma(\mathcal{C})$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap C_n)=A\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\right)\in A\cap\sigma(\mathcal{C})$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in A\cap\sigma(\mathcal{C})$. 故 $A\cap\sigma(\mathcal{C})$ 为 σ- 代数. 由单调类定理得 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\subset A\cap\sigma(\mathcal{C})$.

再证 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\supset A\cap\sigma(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}=\{B\in\sigma(\mathcal{C}):A\cap B\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\}$. 显然有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$. 下证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

(1) $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $B_n\in\mathcal{G},\ n\geq 1$, 则 $A\cap B_n\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C}), B_n\in\sigma(\mathcal{C})$. 于是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\in\sigma(\mathcal{C}),\quad A\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C}).$$

即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\in\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $B\in\mathcal{G}$, 则 $A\cap B\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C}), B\in\sigma(\mathcal{C})$. 于是有 $B^c\in\sigma(\mathcal{C})$, $A\cap B^c\in\sigma_A(A\cap\mathcal{C})$, 即 $B^c\in\mathcal{G}$. 故 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 由单调类定理知 $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})\supset A\cap\sigma(\mathcal{C})$.

2.10 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上的一 σ- 代数，$\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_n\cap A_m=\emptyset,\ n\neq m,\ \sum_n A_n=\Omega$), 则对任何 $B\in\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})$, 存在 $B_n\in\mathcal{F},\ n=1,2,\cdots$, 使得

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_n).$$

证明 令 $\mathcal{G}=\left\{B\in\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C}):\ \exists B_n\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ s.t.\ B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\cap A_n\right\}$.

先证 $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$.

$\forall B\in\mathcal{F}$, 显然 $B=B\cap\Omega=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B\cap A_n$. 即 $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$. 又 $\forall C\in\mathcal{C},\exists n_0\in\mathbf{N},\ s.t.\ C=A_{n_0}$, 于是 $C=A_{n_0}\cap\Omega+\sum\limits_{n=1,n\neq n_0}^{\infty}(A_n\cap\emptyset)$. 即 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$. 从而 $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$.

再证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

(1) $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $M_k\in\mathcal{G},\ k\geq 1$. 则 $\exists B_n^k\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ s.t.\ M_k=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n^k\cap A_n$. 故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}M_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(B_n^k\cap A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_n^k\right)\cap A_n$. 又 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_n^k\in\mathcal{F}$, 故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}M_k\in\mathcal{G}$.

(2) $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $B\in\mathcal{G}$, 则 $\exists B_n\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ s.t.\ B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\cap A_n$. 于是有 $B^c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_n)_{A_n}^c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n^c\cap A_n$, 即 $B^c\in\mathcal{G}$.

由 (1),(2) 得 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 因此 $\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})=\mathcal{G}$, 即对任何 $B\in\sigma(\mathcal{F}\cup\mathcal{C})$, 存在 $B_n\in\mathcal{F},\ n=1,2,\cdots$, 使得 $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A_n)$.

2.11 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 则对任何 $A\in\sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$.

证明 令 $\mathcal{G}=\{A\in\sigma(\mathcal{C}):$ 存在$\mathcal{C}$的可数子类$\mathcal{D}$, 使得$A\in\sigma(\mathcal{D})\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$(事实上, $\forall A\in\mathcal{C}$, 取 $\mathcal{D}=\{A\}$, 则有 $A\in\sigma(\mathcal{D})$).

下证 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.

先证 $\mathcal{G}$ 对可列交运算封闭. 设 $A_n\in\mathcal{G},\ n\geq 1$, 则存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}_n$, 使得 $A_n\in\sigma(\mathcal{D}_n)$. 令 $\mathcal{D}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n$, 则 $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$ 且可数. 于是有 $A_n\in\sigma(\mathcal{D}_n)\subset\sigma(\mathcal{D})$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\sigma(\mathcal{D})$. 故 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

再证 $\mathcal{G}$ 对余运算封闭. 设 $A\in\mathcal{G}$, 则存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$. 显然有 $A^c\in\sigma(\mathcal{D})$. 故 $A^c\in\mathcal{G}$. 由 (1),(2) 得 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数.
从而有 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$. 即 $\forall A\in\sigma(\mathcal{C})$, 存在 $\mathcal{C}$ 的可数子类 $\mathcal{D}$, 使得 $A\in\sigma(\mathcal{D})$.

2.12 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则对任何 $A\in m(\mathcal{C})$, 存在 $B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$.

证明 令 $\mathcal{G}=\{A\in m(\mathcal{C}):\ \exists B\in\mathcal{C}_\sigma,$使得$A\subset B\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}\subset m(\mathcal{C})$. 下证 $\mathcal{G}$ 为单调类.

设 $\forall n\geq 1,\ A_n\in\mathcal{G}$, 则存在 $B_n\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $A_n\subset B_n$.

(1) 若 $A_n\uparrow$, 则有 $A_n\uparrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathcal{C}_\sigma$, 即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

(2) 若 $A_n\downarrow$, 则有 $A_n\downarrow\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 从而有 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset A_1\subset B_1\in\mathcal{C}_\sigma$, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

故 $\mathcal{G}$ 为单调类. 因此 $\mathcal{G}=m(\mathcal{C})$, 即 $\forall A\in m(\mathcal{C}),\exists B\in\mathcal{C}_\sigma$, 使得 $B\supset A$.

2.13 设 $\mathcal{C}$ 为一集类, 则下列二条件等价:

(1)$\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

(2)$A\in\mathcal{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$; $A,B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

证明 (1)⇒(2).

$A\in\mathcal{C}\subset\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow A^c=\Omega\backslash A\in\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$;

$A,B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A,B\in\lambda(\mathcal{C}),A\subset B^c\Rightarrow B^c\backslash A\in\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow B^c\cap A^c\in\lambda(\mathcal{C})\Rightarrow A\cup B\in\lambda(\mathcal{C})=m(\mathcal{C})$.

(2)⇒(1). 显然有 $\lambda(\mathcal{C})\supset m(\mathcal{C})$. 下证 $m(\mathcal{C})$ 为 λ- 类. 由习题 1.15 知只需证

(i)$A\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathcal{C})$;

(ii)$A,B\in m(\mathcal{C}),\ A\cap B=\emptyset\Rightarrow A\cup B\in m(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_1=\{A\in m(\mathcal{C}):\ A^c\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\emptyset,\ A\cup B\in m(\mathcal{C})\}$.

显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_1$. 下证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类.

设 $A_n\in\mathcal{G}_1,\ A_n\uparrow A\in m(\mathcal{C})$, 则有 $A_n^c\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in\mathcal{C},\ A_n\cap B=\emptyset,\ A_n\cup B\in m(\mathcal{C})$. 于是

$$A^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\in m(\mathcal{C}),\quad\forall B\in\mathcal{C},\ A\cap B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)=\emptyset,$$

$$A_n\cup B\uparrow A\cup B=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup B.$$

故 $A\cup B\in m(\mathcal{C})\Rightarrow A\in\mathcal{G}_1$. 同理可证 $A_n\in\mathcal{G}_1,A_n\downarrow A$ 有 $A\in\mathcal{G}_1$, 即 $\mathcal{G}_1$ 为单调类. 于是 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_2=\{A\in m(\mathcal{C}):A\cap B=\emptyset,\ A\cup B\in m(\mathcal{C}),\ \forall B\in m(\mathcal{C})\}$. 由 $\mathcal{G}_1=m(\mathcal{C})$ 得 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_2$. 同上可证得 $\mathcal{G}_2$ 为单调类. 故 $\mathcal{G}_2=m(\mathcal{C})$, 即 $m(\mathcal{C})$ 为 λ 类. 从而有 $m(\mathcal{C})=\lambda(\mathcal{C})$.

2.14 设 $\mathcal{C}$ 为一集类. 如果 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}_{\sum\sigma}$, 则有 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

证明 由定理 2.4(2) 知要证 $\lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$, 只需证 $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \lambda(\mathcal{C})$. 于是只需证 $\mathcal{C}_{\sum\sigma} \subset \lambda(\mathcal{C})$.

$\forall A \in \mathcal{C}_{\sum\sigma}$, 则有 $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, $A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$. 令 $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. 由习题 1.15 知 $B_n \in \lambda(\mathcal{C})$. 而 $B_n \uparrow A$, 故 $A \in \lambda(\mathcal{C})$, 即 $\mathcal{C}_{\sum\sigma} \subset \lambda(\mathcal{C})$.

§3 测度与非负集函数

3.6 设 μ 为半环 $\mathcal{C}$ 上的一有限可加非负函数, 则 μ 有单调性及可减性. 此外, 设 $A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{C}$, 且 $\sum_n A_n \subset A$, 则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.

证明 设 $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$, 则有 $B = A \cup (B \backslash A)$, $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, 由 $\mathcal{C}$ 为半环知 $B \backslash A \in \mathcal{C}_{\sum f}$, 即存在 $A_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $s.t.$ $B \backslash A = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$, 亦即 $B = A + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$. 于是由 μ 的有限可加性有

$$\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

即 $\mu(A) \leq \mu(B)$.

若 $\mu(B) < \infty$, 则上式变形为 $\mu(B \backslash A) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(A_i) = \mu(B) - \mu(A)$.

设 $A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, $A \in \mathcal{C}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$. 则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$. 因 $\mathcal{C}$ 为半环, 故 $A_n \cap A \in \mathcal{C}$ 且 $A_n \cap A = A_n$. 从而有

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) \leq \mu(A).$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{m} \mu(A_n \cap A) = \mu\left(\sum\limits_{n=1}^{m} (A_n \cap A)\right) \leq \mu(A)$. 对上式两边取极限有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

3.7 设 $(I, \prec)$ 为一定向集, $(\mu_i,\ i \in I)$ 为 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 上的一族测度, 满足 $i \prec j \Rightarrow \mu_i \leq \mu_j$. 令 $\mu(A) = \sup\limits_i \mu_i(A)$, $A \in \mathcal{F}$, 则 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

证明 $\mu(\emptyset) = \sup\limits_n \mu_i(\emptyset) = 0$. 设 $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \geq 1$, 且 $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$. 则

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_i \mu_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_i \mu_i(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

往证 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

由 $\mu(A_n) = \sup\limits_i \mu_i(A_n)$ 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists i_n \in I$, $s.t.$ $\mu_{i_n}(A_n) \geq \mu(A_n) - \varepsilon/2^n$. $\forall N \in \mathbf{N}$, 取 $J_N =$

$\max\{i_1, i_2, \cdots, i_N\}$ 有

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \le \sum_{n=1}^{N} \mu_{i_n}(A_n) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} \mu_{J_N}(A_n) + \varepsilon$$
$$= \mu_{J_N}\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) + \varepsilon \le \mu_{J_N}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \varepsilon \le \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \varepsilon.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \varepsilon$. 由 ε 的任意性知， $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. 故 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, 即 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的测度.

3.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间， $\mu(\Omega) < \infty$, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数，则对任何 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\} = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{C}_\sigma,\ B \supset A\}.$$

证明 令 $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} :\ \mu(A) = \sup\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\}\}$.

显然 $\mathcal{C} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. 下证 $\mathcal{G}$ 为单调类.

设 $C_n \in \mathcal{G},\ C_n \uparrow C$. 因 μ 为测度，故 $\mu(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n)$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n \ge N$ 时

$$\mu(C) - \mu(C_n) \le \varepsilon/2. \tag{1}$$

因 $C_n \in \mathcal{G}$, 故 $\exists B_n \in \mathcal{C}_\delta,\ B_n \subset C_n$, 使得

$$\mu(C_n) \le \mu(B_n) + \varepsilon/2. \tag{2}$$

由 (1),(2) 得

$$\mu(C) \le \mu(B_n) + \varepsilon,\ B_n \in \mathcal{C}_\delta,\ B_n \subset C_n \subset C.$$

故 $\mu(C) = \sup\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset C\}$, 即 $C \in \mathcal{G}$.

设 $C_n \in \mathcal{G},\ C_n \downarrow C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. 则 $\forall \varepsilon > 0,\ n \ge 1,\ \exists B_n \in \mathcal{C}_\delta,,\ B_n \subset C_n,\ s.t.\ \mu(C_n) \le \mu(B_n) + \varepsilon/2^n$. 令 $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}_\delta$, 则 $B \subset C$, 且

$$\mu(C) - \mu(B) = \mu(C \backslash B) = \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right)$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n \backslash B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(C_n) - \mu(B_n)) \le \varepsilon.$$

故 $C \in \mathcal{G}$, 即 $\mathcal{G}$ 为单调类. 又 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$.

同理可证得 $\mu(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{C}_\sigma,\ B \supset A\}$.

3.9 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间， $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{F}$ 的一个代数. 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathcal{C}$, 使得 $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$.

证明 由习题 3.8 得， $\forall A \in \mathcal{F}$ 有 $\mu(A) = \sup\{\mu(B) :\ B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A\}$. 由上确界定义知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathcal{C}_\delta,\ B \subset A$, 使得

$$\mu(A) < \mu(B) + \varepsilon/2. \tag{1}$$

又 $B\in\mathcal{C}_\delta$, 故 $\exists B_n\in\mathcal{C},\ n\geq 1$, 使得 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\subset A$. 令 $C_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}B_k$, 则 $C_n\downarrow B$. 因 $\mathcal{C}$ 为代数，故 $C_n\in\mathcal{C}$. 再由 $C_n\downarrow B$ 知， $\exists n_0\in\mathbf{N}$, 当 $n\geq n_0$ 时

$$\mu(C_n)-\mu(B)<\varepsilon/2,\ B\subset C_n,\ B\subset A. \tag{2}$$

由 (1),(2) 得

$$\mu(A\Delta C_n)=\mu(A\backslash C_n)+\mu(C_n\backslash A)\leq\mu(A\backslash B)+\mu(C_n\backslash B)\leq\varepsilon.$$

从而有结论成立.

§4 外测度与测度的扩张

4.9(测度的限制) **设** $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ **为一有限测度空间，** $\Omega_0\subset\Omega$, **且** $\mu^*(\Omega_0)=\mu(\Omega)$. **则** $\forall A\in\mathcal{F}$ **有** $\mu^*(A\cap\Omega_0)=\mu(A)$, **并且** μ^* **限于** $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ **为一测度. 称** μ^* **为** μ **到** $(\Omega_0,\Omega_0\cap\mathcal{F})$ **上的限制**.

证明 1^0 先证 $\forall A\in\mathcal{F}$ 有 $\mu^*(A\cap\Omega_0)=\mu(A)$.

$2^0\mu^*$ 限于 $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 为一测度.

(1)$\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 为 σ- 代数，由习题 2.9 立得.

(2)μ^* 定义的合理性.

设 $A=A_1\cap\Omega_0=A_2\cap\Omega_0\in\Omega_0\cap\mathcal{F}$, 则 $A_1\cap\Omega_0\cap A_2^c=\emptyset$, 即 $\Omega_0\subset(A_1\backslash A_2)^c$. 又 $\mu^*(\Omega_0)=\mu(\Omega)$, 故 $\mu(A_1\backslash A_2)=0$. 同理可得 $\mu(A_2\backslash A_1)=0$, 即 $\mu(A_1\Delta A_2)=0$. 故 $A_1=A_2,\ a.s.$

(3)μ^* 为 $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 上的测度.

显然 $\mu^*(\emptyset)=\mu^*(\emptyset\cap\Omega_0)=\mu(\emptyset)=0$. 设 $A_n\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ A_n\cap A_m=\emptyset,\ n\neq m$, 则有

$$A_n\cap\Omega_0\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ (A_n\cap\Omega_0)\cap(A_m\cap\Omega_0)=\emptyset,\ n\neq m.$$

且

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap\Omega_0)\right)&=\mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\Omega_0\right)\\ &=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n\cap\Omega_0).\end{aligned}$$

故 μ^* 为 $\Omega_0\cap\mathcal{F}$ 上的测度.

4.10 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ **为一有限测度空间，** $\Omega_0\subset\Omega$. **令** $\mathcal{F}_0=\Omega_0\cap\mathcal{F}$,

$$\nu(A)=\inf\{\mu(G):G\in\mathcal{F},\ G\cap\Omega_0=A\},A\in\mathcal{F}_0,$$

则 ν **为** $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ **上一测度，令**

$$\tilde{\mu}(B)=\nu(B\cap\Omega_0),\ \forall B\in\mathcal{F},$$

则 $\tilde{\mu}$ **为** $(\Omega,\mathcal{F})$ **上一测度，且** $\tilde{\mu}\leq\mu$.

证明 显然 $\Omega_0\cap\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$ 为 σ- 代数，且 $\nu(\emptyset)=0$. 于是要证 ν 为 $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ 上一测度，只需证 ν 有 σ- 可加性. 设 $A_n\in\mathcal{F}_0,\ n\geq 1,\ A_n\cap A_m=\emptyset,\ n\neq m$.

1^0 先证 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

$\forall n\geq 1$ 由 $\nu(A_n)=\inf\{\mu(G):G\in\mathcal{F},\ G\cap\Omega_0=A_n\}$ 知， $\forall\varepsilon>0,\ \exists G_n\in\mathcal{F},\ G_n\cap\Omega_0=A_n,\ s.t.$

$$\mu(G_n)\leq\nu(A_n)+\varepsilon/2^n,$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(G_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)+\varepsilon$. 因 μ 为测度, 故 $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)+\varepsilon$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\in\mathcal{F}$, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(G_n\cap\Omega_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 又由 ε 的任意性知, $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

2^0 再证 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$.

由 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\inf\{\mu(G):G\in\mathcal{F},\ G\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}_0$ 知, $\forall\varepsilon>0,\ \exists B\in\mathcal{F},\ B\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n,\ s.t.$

$$\mu(B)\le\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon. \tag{1}$$

设 $A_n=\Omega_0\cap B_n,\ \forall n\ge1,\ B_n\in\mathcal{F}$. 令

$$B_1'=B\cap B_1\cap\left(\bigcup_{i=2}^{\infty}B_i\right)^c\in\mathcal{F},\ B_n'=B\cap B_n\cap\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\in\mathcal{F}.$$

则

$$B_n'\subset B,\ n\ge1,\ B_n'\cap B_m'=\emptyset,\ n\ne m. \tag{2}$$

且

$$B_n'\cap\Omega_0=A_n. \tag{3}$$

事实上, (i)$B_n'\cap\Omega_0\subset B_n\cap\Omega_0=A_n$;

(ii) 因 $B\cap\Omega_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $B_n\cap\Omega_0=A_n$ 以及 $\{A_n\}$ 互不相交, 故 $\{B_n\cap\Omega_0\}$ 互不相交. 从而有 $B_n\cap\Omega_0\subset\left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0$, 即

$$A_n=B_n\cap\Omega_0\subset\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0=B\cap B_n\cap\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}B_i\right)^c\cap\Omega_0=B_n'\cap\Omega_0.$$

由 (1),(2),(3) 式得

$$\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\varepsilon\ge\mu(B)\ge\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n'\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n')\ge\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n).$$

由 ε 的任意性得 $\nu\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)$. 综合上述 1^0,2^0 得 ν 是 $(\Omega_0,\mathcal{F}_0)$ 上的测度.

3^0 往证 $\widetilde{\mu}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度, 且 $\widetilde{\mu}\le\mu$. 显然 $\widetilde{\mu}$ 非负且 $\widetilde{\mu}(\emptyset)=\nu(\emptyset)=0$. 下证 $\widetilde{\mu}$ 有 σ- 可加性.

设 $\{B_n\}\subset\mathcal{F},\ B_n\cap B_m=\emptyset,\ n\ne m$. 则

$$\widetilde{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\nu\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cap\Omega_0\right)=\nu\left(\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cap\Omega_0)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(B_n\cap\Omega_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\nu}(B_n).$$

故 $\widetilde{\mu}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一测度. 由 ν 的定义知, $\widetilde{\mu}(B)=\nu(B\cap\Omega_0)\le\mu(B),\ \forall B\in\mathcal{F}$.

4.11 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间. 令

$$\mathcal{N}=\{N\subset\Omega:\exists A\in\mathcal{F},\ \mu(A)=0,\text{使}A\supset N\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup N:\ A\in\mathcal{F},\ N\in\mathcal{N}\},$$

则 $\overline{\mathcal{F}}$ 为 σ- 代数, μ 可以唯一扩张成为 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的测度 $\overline{\mu}$, 且 $(\Omega,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 的完备化.

第二章 可测映射

§1 定义及基本性质

1.12 设 $(E,\mathcal{E})$ 为一可测空间, $\mathcal{C}$ 为生成 $\mathcal{E}$ 的一集类. 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 到 E 中的一族映射, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数, 则

$$\mathcal{F}=\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}.$$

设 φ 为 $\mathcal{F}$- 可测函数, 则存在 $\mathcal{H}$ 的可数子族 $\mathcal{H}_0=\{f_1,f_2,\cdots\}$, 使得 φ 为 $\mathcal{F}_0$- 可测, 其中 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{H}_0$ 在 Ω 上诱导的 σ- 代数.

证明 (1) 显然有 $\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}\subset\mathcal{F}$. 记 $\mathcal{G}=\left\{A\in\mathcal{E}:\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}\right\}$. 显然 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 事实上

$1^0\forall A\in\mathcal{G}$ 有 $A\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 则 $A^c\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A^c)=\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}\left(f^{-1}(A)\right)^c=\left(\bigcap\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A)\right)^c\subset\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 即 $A^c\in\mathcal{G}$.

$2^0\forall A_n\in\mathcal{G}$, $n\geq1$, 即 $A_n\in\mathcal{E}$, $\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A_n)\in\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$. 于是有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{E}$, 且

$$\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{f\in\mathcal{H}}\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(A_n)\in\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}.$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$. 故 $\mathcal{G}=\sigma(\mathcal{C})$, 即 $\mathcal{F}=\sigma\left\{\bigcup\limits_{f\in\mathcal{H}}f^{-1}(\mathcal{C})\right\}$.

(2)

1.13 设 $(\Omega,\mathcal{F}),(E,\mathcal{E})$ 及 $(G,\mathcal{G})$ 为可测空间, f 为 Ω 到 E 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射, h 为 E 到 G 中的 $\mathcal{E}$- 可测映射. 令 $\varphi=h\circ f$, 则 φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射.

证明 因 $\varphi^{-1}(\mathcal{G})=(h\circ f)^{-1}(\mathcal{G})=f^{-1}\left(h^{-1}(\mathcal{G})\right)\subset f^{-1}(\mathcal{E})\subset\mathcal{F}$. 故 φ 为 Ω 到 G 中的 $\mathcal{F}$- 可测映射.

1.14 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界可测函数, 则存在简单可测函数序列 $(f_n,n\geq1)$, 使得 $|f_n|\leq|f|$, $n\geq1$, 且 f_n 一致收敛于 f.

证明 (1) 设 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一非负有界可测函数，令

$$f_n(\omega)=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\{k/2^n\le f<(k+1)/2^n\}}+nI_{\{f\ge n\}}.$$

显然 $f_n\le f$, 且 f_n 为非负简单可测函数. 由题设知，$C\triangleq\sup\{f(\omega),\omega\in\Omega\}<\infty$. 于是 $\exists n_1\in\mathbf{N}$, 当 $n\ge n_1$ 时， $I_{\{f\ge n\}}=0$. 从而 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{n_1,\ \log_2 1/\varepsilon\}$. 则当 $n\ge N$ 时,

$$|f_n(\omega)-f(\omega)|\le 1/2^n<\varepsilon,$$

即 f_n 一致收敛于 f.
(2) 一般地有 $f=f^+-f^-$. 对于 f^+,f^- 由 (1) 得， $\exists f_n\le f^+$, f_n 一致收敛于 f^+,$g_n\le f^-$, g_n 一致收敛于 f^-. 令 $h_n=f_n-g_n$ 则 $|f-h_n|\le\max\{|f^+-f_n|,\ |f^--g_n|\}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, $s.t.$ 当 $n>N$ 时

$$|f^+-f_n|<\varepsilon,\ \ |f^--g_n|<\varepsilon.$$

从而有 $|f-h_n|<\varepsilon$, 即 h_n 一致收敛于 f, 且 $|h_n|=|f_n-g_n|\le f^++f^-=|f|$. 综合上述 (1),(2) 有结论成立.
1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间， $\mathcal{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 为 Ω 的一个可数划分 (即 $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\ne j,\sum_i A_i=\Omega$). 令 $\mathcal{T}=\sigma\{\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\}$, 则

(1)$\mathcal{T}=\{\sum_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i):\ B_i\in\mathcal{F},\ i\ge1\}$,

(2) 设 g 为 Ω 上一 $\mathcal{T}$- 可测实值函数，则存在一列 $\mathcal{F}$- 可测实函数 $(f_n,n\ge1)$, 使得 $g=\sum_{i=1}^{\infty}f_iI_{A_i}$.

证明 (1) 令 $\mathcal{H}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i),\ B_i\in\mathcal{F},\ i\ge1\right\}$. 显然有 $\mathcal{H}\subset\mathcal{T}$, $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}\subset\mathcal{H}$. 事实上, $\forall A\in\mathcal{F}$, $A\cap\Omega=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iA$; $\forall B\in\mathcal{C}$, $\exists n_0$, $s.t.\ B=A_{n_0}=A_{n_0}\Omega+\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne n_0}}^{\infty}A_i\emptyset$. 由 P_8 习题 2.10 知 $\mathcal{T}\subset\mathcal{H}$, 即 $\mathcal{T}=\mathcal{H}$.

(2) 示性函数 $\to$ 简单函数 $\to$ 非负函数 $\to$ 一般地.
$1^0\forall A\in\mathcal{T}$, 由 (1) 知 $\exists B_i\in\mathcal{F}$, $i\ge1$, $s.t.\ A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\cap B_i)$, 即 $I_A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}I_{A_i\cap B_i}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}I_{A_i}I_{B_i}$. 令 $f_i=I_{B_i}$, 则有 $I_A=\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_iI_{B_i}$, 且 $f_i\in\mathcal{F}$.
2^0 令 $0\le g=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iI_{C_i}$, $C_i\in\mathcal{T}$. 由 (1) 知对于每个 $C_i\in\mathcal{T}$, $\exists B_{ij}\in\mathcal{F}$, $j\ge1$ 使得 $C_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j\cap B_{ij}$. 于是

$$g=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j\cap B_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_iI_{A_j}I_{B_{ij}}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iI_{B_{ij}}\right)I_{A_j}.$$

令 $0\le f_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iI_{B_{ij}}\in\mathcal{F}$, 则有 $g=\sum\limits_{j=1}^{\infty}f_jI_{A_j}$.
3^0g 为非负 $\mathcal{T}$- 可测实值函数. 由定理 1.8 知存在非负简单可测实函数的增序列 g_n, 使得 $g_n\uparrow g$. 对每个 g_n, 由 2^0 知存在一列 $\mathcal{F}$- 可测实函数 $\{f_{nm},\ m\ge1\}$, 使得 $g_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_{nm}I_{A_m}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$, 故 $\exists f_m$, $s.t.\ \lim\limits_{n\to\infty}f_{nm}=f_m$. 于是有 $g=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_mI_{A_m}$, 且 $f_m\in\mathcal{F}$.

4^0 一般地，令 $g=g^+-g^-$. 由 3^0 得 $\exists g_m,h_m\in\mathcal{F}$, $s.t.$ $g^+=\sum\limits_{m=1}^{\infty}h_mI_{A_m}$, $g^-=\sum\limits_{m=1}^{\infty}g_mI_{A_m}$. 设 $f_m=h_m-g_m\in\mathcal{F}$, 则有 $g=g^+-g^-=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(h_m-g_m)I_{A_m}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_mI_{A_m}$.

综合上述 1^0,2^0,3^0,4^0 有结论成立.

1.16 设 Ω 为一距离空间， $\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Borel σ- 代数. 令 $\mathcal{C}_b(\Omega)$ 表示 Ω 上有界连续函数全体，则 $\mathcal{B}(\Omega)=\sigma(f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega))$.

1^0 先证 $\mathcal{B}(\Omega)\subset\sigma(f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega))$.

$\forall F\subset\Omega$ 为闭集，令 $f(x)=e^{-\rho(x,F)}$, $x\in\Omega$, 其中 $\rho(x,F)=\inf\limits_{y\in F}d(x,y)$, d 为 Ω 上的距离. 则有 f 为 Ω 上的连续函数，且 $0\le f(x)\le 1$. 必有 $F=\{x:f(x)=1\}\subset\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}$, 且 $\mathcal{B}(\Omega)$ 可由 Ω 中所有闭集生成. 故 $\mathcal{B}(\Omega)\subset\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}$.

2^0 再证 $\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}\subset\mathcal{B}(\Omega)$.

$\forall O\subset\mathbf{R}$ 为开集， $f\in\mathcal{C}_b(\Omega)$, 则有 $f^{-1}(O)$ 为 Ω 中开集. 故 $f^{-1}(O)\in\mathcal{B}(\Omega)$.
令 $\mathcal{G}=\{A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\Omega)\}$. 则 $O\in\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 事实上，
(1)$\forall A\in\mathcal{G}$ 有， $A\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(\Omega)$. 则有

$$A^c\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),\ f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c\in\mathcal{B}(\Omega),$$

即 $A^c\in\mathcal{G}$; (2)$\forall A_n\in\mathcal{G}$, $n\ge 1$ 有， $A_n\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, $f^{-1}(A_n)\in\mathcal{B}(\Omega)$. 则有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),\ f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)\in\mathcal{B}(\Omega),$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{G}$.

又 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可由 $\mathbf{R}$ 中所有开集生成. 故 $\mathcal{G}=\mathcal{B}(\mathbf{R})$. 从而有

$$\sigma\{f:f\in\mathcal{C}_b(\Omega)\}=\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathcal{C}_b(\Omega)}f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{R}))\right\}\subset\mathcal{B}(\Omega).$$

综合上述 1^0,2^0 有结论成立.

1.17 设 $\{f_i,\ 1\le i\le m\}$ 为 $\mathbf{R}$ 上实值 Borel 函数，则 $(f_1,\cdots,f_m)$ 为 $(\mathbf{R}^m,\mathcal{B}(\mathbf{R}^m))$ 到自身的可测映射.

证明 记 $\mathcal{C}=\left\{\prod\limits_{i=1}^{m}(a_i,b_i]:\ a_i,b_i\in\mathbf{R},\ a_i\le b_i\right\}$, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$. $\forall C\in\mathcal{C}$, 则有 $C=\prod\limits_{i=1}^{m}(a_i,b_i]$. 于是 $f^{-1}(C)=\prod\limits_{i=1}^{m}f_i^{-1}(a_i,b_i]\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$, 即 $f^{-1}(\mathcal{C})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$. 由命题 1.3 及 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)=\sigma(\mathcal{C})$ 得， f 为 $(\mathbf{R}^m,\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ 到自身的可测映射.

1.18 $f:\Omega\to\mathcal{C}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的复值可测函数，当且仅当 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbf{C},\mathcal{B}(\mathbf{C})$ 中的可测映射.

证明 $(\Rightarrow)$ 因 $\mathbf{C}\cong\mathbf{R}^2$, 故令其同构映射为 $g:\mathbf{C}\to\mathbf{R}^2$, 则 $g\circ f(\Omega)=(Ref,Imf)\triangleq\ \overline{g}$. 由习题 1.17 知， $\overline{g}:\Omega\to\mathbf{R}^2$ 上的可测映射. 故由习题 1.13 得 $f=g^{-1}\circ\overline{g}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(\mathbf{C},\mathcal{B}(\mathbf{C}))$ 中的可测映射.

$(\Leftarrow)$ 设 O 为 $\mathbf{R}$ 中的任一开集. $\overline{O} \triangleq \{a+bi: a\in O,\ b\in\mathbf{R}\}\in\mathcal{B}(\mathbf{C})$.

$$f^{-1}(\overline{O}) = \{\omega\in\Omega:\ Ref(\omega)\in O\} = (Ref)^{-1}(O)\in\mathcal{F}.$$

故由命题 1.3 知 Ref 可测. 同理可得 Imf 可测，即 f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的复值可测函数.

§2 单调类定理 (函数形式)

2.9 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族，若 $\mathcal{C}$ 为线性空间，则 $M(\mathcal{C})$ 亦为线性空间.

证明 令 $\mathcal{H}_1=\{f\in M(\mathcal{C}):\ \forall\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha f\in M(\mathcal{C}),\ \forall g\in\mathcal{C},\ f+g\in M(\mathcal{C})\}$. 因 $\mathcal{C}$ 为线性空间，故 $\mathcal{C}\subset\mathcal{H}_1$. 往证 $\mathcal{H}_1$ 为单调类.

设 $f_n\in\mathcal{H}_1,\ n\geq 1$, 且 $f_n\uparrow(\downarrow)f$. 故 $\{f_n\}$ 一致有界，从而有 $f\in M(\mathcal{C}),\ |f|\leq m$.
又 $\alpha f_n\uparrow(\downarrow)\alpha f$ 或 $\alpha f_n\downarrow(\uparrow)f\in M(\mathcal{C})$, 且 $\forall g\in\mathcal{C},\ f_n+g\uparrow(\downarrow)f+g\in M(\mathcal{C})$. 设 $|g|\leq l$, 则 $|f+g|\leq m+l$.
故 $f\in\mathcal{H}_1$, 即 $\mathcal{H}_1$ 为单调类，且 $\mathcal{H}_1=M(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{H}_2=\{f\in M(\mathcal{C}):\ \forall g\in M(\mathcal{C}),\ f+g\in M(\mathcal{C})\}$. 由 $M(\mathcal{C})=\mathcal{H}_1$ 知 $\mathcal{C}\subset\mathcal{H}_2$, 同理可证 $\mathcal{H}_2$ 为单调类，于是有 $\mathcal{H}_2=M(\mathcal{C})$, 即 $M(\mathcal{C})$ 为线性空间.

2.20 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一非负有界函数族，则下列二条件等价：

(1)$M(\mathcal{C})=\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$;

(2)$f,g\in\mathcal{C}\Rightarrow f\wedge g\in M(\mathcal{C});\ f\in\mathcal{C},a\in\mathbf{R}_+\Rightarrow af,a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})$.

证明 $((1)\Rightarrow(2))$ 设 $f,g\in\mathcal{C},a\in\mathbf{R}_+$, 显然有 $f\wedge g,\ af,a-f\wedge a\in\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 即 $f\wedge g,\ af,a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})$.

$((2)\Rightarrow(1))$ 1^0 令
$\mathcal{G}_1=\{f\in M(\mathcal{C});\ \forall g\in\mathcal{C},\ f\wedge g\in M(\mathcal{C}),\ \forall a\in\mathbf{R}_+,\ af\in M(\mathcal{C}),\ a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})\}$.
显然有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_1$. 下证 $\mathcal{G}_1$ 为单调类.

设 $f_n\in\mathcal{G}_1,\ n\geq 1$, 且 $f_n\downarrow(\uparrow)f$, 则有 $\{f_n\}$ 一致有界，即 $\exists m>0,\ |f_n|\leq m$, 且 $\forall n\geq 1,\ f_n\in M(\mathcal{C}),\ \forall g\in\mathcal{C},\ f_n\wedge g\in M(\mathcal{C}),\ \forall a\in\mathbf{R}_+,\ af_n\in M(\mathcal{C}),\ a-f_n\wedge a\in M(\mathcal{C})$. 从而有 $f\in M(\mathcal{C}),\ |f_n\wedge g|\leq m,\ \forall g\in\mathcal{C},\ f_n\wedge g\downarrow(\uparrow)f\wedge g\in M(\mathcal{C}),\ |af_n|\leq am,\ af_n\downarrow(\uparrow)af\in M(\mathcal{C}),\ |a-f_n\wedge a|\leq a,\ a-f_n\wedge a\downarrow(\uparrow)a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})$, 即 $f\in\mathcal{G}_1$, 故有 $\mathcal{G}_1=M(\mathcal{C})$.

令 $\mathcal{G}_2=\{f\in M(\mathcal{C}):\ \forall g\in M(\mathcal{C}),\ f\wedge g\in M(\mathcal{C}),\ \forall a\in\mathbf{R}_+,\ af,a-f\wedge a\in M(\mathcal{C})\}$. 则显然有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}_2$. 同上可证得 $\mathcal{G}_2$ 为单调类，故 $\mathcal{G}_2=M(\mathcal{C})$.

2^0 令 $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega:\ I_A\in M(\mathcal{C})\}$, $\forall f\in\mathcal{C}$ 有 $\frac{1}{n}f\downarrow 0\in M(\mathcal{C})\Rightarrow\emptyset\in\mathcal{F}$. 因 $0\in M(\mathcal{C})$, 故 $1=1-1\wedge 0\in M(\mathcal{C})$, 即 $\Omega\in M(\mathcal{C})$. 显然 $\mathcal{F}$ 为单调类，再证 $\mathcal{F}$ 为代数.

$$\forall A\in\mathcal{F},\ I_{A^c}=1-I_A=1-I_A\wedge 1\in M(\mathcal{C})\Rightarrow A^c\in\mathcal{F};$$

$$\forall A,B\in\mathcal{F},\qquad I_{AB}=I_A\wedge I_B\in M(\mathcal{C})\Rightarrow AB\in\mathcal{F}.$$

故 $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数.

3^0 往证 $\mathcal{C}$ 中的每个元为 $\mathcal{F}$- 可测. $\forall f\in\mathcal{C},\ a\in\mathbf{R}_+$, 令 $f_n=n(a-f\wedge a)\wedge 1$, 则 $f_n\in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n\uparrow I_{[f>a]}$. 故 $I_{[f>a]}\in M(\mathcal{C})$, 即 $[f>a]\in\mathcal{F}$. 这表明 $f\in\mathcal{F}$, 于是有 $\sigma(f: f\in\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

4^0 最后设 $f\in\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 令 $M=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|<\infty,\ f_n=\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\{(kM)/2^n\leq f<((k+1)M)/2^n\}}$. 由 3^0 知 $I_{\{(kM)/2^n\leq f<((k+1)M)/2^n\}}\in M(\mathcal{C})$. 因 $\mathcal{C}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为线性空间，由习题 2.9 知 $M(\mathcal{C})$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为线性空间. 故 $f_n\in M(\mathcal{C})$, 且 $f_n\uparrow f,\ f_n\leq M$, 即 $f\in M(\mathcal{C})$. 从而有 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})\subset M(\mathcal{C})$. 显然有 $M(\mathcal{C})\subset\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})(\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$ 为单调类，且 $\mathcal{C}\subset\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})$, 故 $M(\mathcal{C})\subset\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C}))$. 故 $\mathcal{L}_b^+(\mathcal{C})=M(\mathcal{C})$.

2.11(定理 2.1 的另一种形式) 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的一 π- 类, $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的一非负实值函数族. 如果下列条件被满足:

(1)$1\in\mathcal{H}$;

(2)$f\in\mathcal{H},\ a\in\mathbf{R}_+\Rightarrow af\in\mathcal{H};\ f,g\in\mathcal{H},\ f\geq g\Rightarrow f-g\in\mathcal{H}$;

(3)$f_n\in\mathcal{H},\ n\geq 1,\ 0\leq f_n\uparrow f$, 且 f 有限 (相应地, 有界)$\Rightarrow f\in\mathcal{H}$;

(4)$\forall A\in\mathcal{C},\ I_A\in\mathcal{H}$,

则 $\mathcal{H}$ 包含 Ω 上的所有非负 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (相应地, 有界) 函数.

证明 (1) 令 $\mathcal{F}=\{A\subset\Omega:\ I_A\in\mathcal{H}\}$. 则有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$. 下证 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类.

$1^0 1\in\mathcal{H}\Rightarrow\Omega\in\mathcal{F}$;

$2^0 A,B\in\mathcal{F},\ A\subset B\Rightarrow I_A,I_B\in\mathcal{H},\ I_A\leq I_B\Rightarrow I_B-I_A\in\mathcal{H}\Rightarrow I_{B\backslash A}\in\mathcal{H}\Rightarrow B\backslash A\in\mathcal{F}$;

$3^0 A_n\in\mathcal{F},\ n\geq 1,\ A_n\uparrow A\Rightarrow I_{A_n}\in\mathcal{H},\ I_{A_n}\uparrow I_A$ 有界 $\Rightarrow I_A\in\mathcal{H}\Rightarrow A\in\mathcal{F}$.

由 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上的 π- 类得 $\sigma(\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

(2) 对 $f,g\in\mathcal{H}$, 取常数 $C\geq f+g$. 则 $f+g=C-[C-(F+g)]\in\mathcal{H}$, 即和运算封闭.

(3) 对 Ω 上的任意非负 $\sigma(\mathcal{C})$- 可测实值 (有界) 函数 f. 令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{[k/2^n\leq f<(k+1)/2^n]}+nI_{[f\geq n]}.$$

故 $f_n\in\mathcal{H}$, 且 $f_n\uparrow f$. 由 (3) 得 $f\in\mathcal{H}$.

§3 可测函数序列的几种收敛

3.8 设 (f_n) 为一实值可测函数序列, 则为要 (f_n)a.e.(相应地, 几乎一致或依测度 μ) 收敛于某 f, 必须且只需 (f_n) 为相应的收敛基本列.

证明 只证 a.e. 的情形, 其它类似可证.

($\Rightarrow$) 设 $f_n\xrightarrow{\text{a.e}}f$, 则 $\exists N,\ \mu(N)=0,\ \forall\omega\in N^c$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)$. 于是有 $\forall\varepsilon>0,\ \exists M$, 当 $n>M$ 时, $|f_n(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon/2$. 从而有 $\forall\omega\in N^c,\ n,m>M$

$$|f_n(\omega)-f_m(\omega)|\leq|f_n(\omega)-f(\omega)|+|f_m(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon.$$

这表明 $(f_n-f_m)\xrightarrow{\text{a.e}}0$, 即 (f_n) 为 a.e. 收敛基本列.

($\Leftarrow$) 设 (f_n) 为 a.e. 收敛基本列, 即 $\exists N,\ \mu(N)=0,\ \forall\omega\in N^c$ 有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(f_n(\omega)-f_m(\omega))=0$. 由数列极限的柯西收敛准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)$ 存在, 即 (f_n),a.e. 收敛.

3.9 举例说明: 若 $\mu(\Omega)=\infty$, 则 μ 几乎处处收敛的序列不一定依测度收敛.

证明 取 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}),\mu)$ 其中 μ 为 Lebesgue 测度. 则 $\mu(\mathbf{R})=\infty$. 设

$$f_n(\omega)=\begin{cases}0, & |\omega|\leq n,\\ 1, & |\omega|>n.\end{cases}$$

$f(\omega)=0,\ \forall\omega\in\mathbf{R}$. 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)$, 即 (f_n)a.e. 收敛. 但

$$\mu(|f_n-f|>1/2)=\mu((-\infty,-n])+\mu([n,\infty))=+\infty.$$

3.10 设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$, 则有 $\liminf\limits_{n\to\infty}f_n\leq f\leq\limsup\limits_{n\to\infty}f_n$, a.e..

证明 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 (f_{n_k}) 使得 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 从而有 $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \le \liminf\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f = \limsup\limits_{n\to\infty} f_{n_k} \le \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, a.e.

3.11 设 μ 为有限测度，则

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}.$$

证明 $(\Rightarrow)$ 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则由 3.6 注知对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$, 存在其子列 $(f_{n'_k})$, 使得 $f_{n'_k} \xrightarrow{\mu} f$. 于是要证 $\frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}$. 由 3.6 注知只需证 $f_n \to f \Rightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \to \frac{f}{1+|f|}$. 显然由 $f_n \to f \Rightarrow |f_n| \to |f|$. 从而有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n}{1+|f_n|} - \frac{f}{1+|f|}\right| &= \frac{|f_n - f + f_n|f| - f|f_n|\,|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} \\
&\le \frac{|f_n - f|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} + \frac{|f|\,|f_n - f|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} + \frac{|f|\,|\,|f| - |f_n|\,|}{(1+|f_n|)(1+|f|)} \\
&\le |f_n - f| + |f_n - f| + |\,|f| - |f_n|\,| \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_\Omega \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu$. 由 3.6 注及控制收敛定理有

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty.$$

即 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

第三章 积分

§1 定义及基本性质

1.10 举例说明命题 1.8(2) 中关于 μ 的 σ- 有限性条件不能去掉.

解 令 $\Omega = \mathbf{R}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A = \Omega. \end{cases}$$

μ 不是 Ω 上的 σ- 有限测度，对 $f \equiv 2$, $g \equiv 1$, 有 $\mu(fI_A) \le \mu(gI_A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$. 但 $f > g$, $\forall x \in \Omega$.

1.11 证明系 1.7(3), 即设 f, g 积分存在，且 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义，则 $f + g$ a.e. 有意义.

证明 由积分的线性性知， $\mu(f) + \mu(g) = \mu(f^+ + g^+) - \mu(f^- + g^-)$. 又 $\mu(f) + \mu(g)$ 有意义，故 $\mu(f^+ + g^+) < \infty$, 或 $\mu(f^- + g^-) < \infty$. 由定理 1.6(7) 知， $f^+ + g^+ < \infty$ 或 $f^- + g^- < \infty$, a.e. 从而有 $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ a.e. 有意义.

1.12 设 (f_n) 为一列可测函数. 若 (f_n) a.e. 单调增 (即 $\forall n,\ f_n \le f_{n+1}$ a.e.), 则存在一处处单调增序列 (g_n), 使得 $\forall n,\ f_n = g_n$ a.e. .

证明 由 $\forall n,\ f_n \le f_{n+1}$ a.e. 知， $\exists N,\ \mu(N) = 0,\ \forall \omega \in N^c$ 有 $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$, 取

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \omega \in N^c, \\ 0, & \omega \in N. \end{cases}$$

则有 $g_n(\omega) \le g_{n+1}(\omega)$ 且 $f_n = g_n$ a.e. .

1.13 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一有限测度空间， $A_i \in \mathcal{F},\ 1 \le i \le n$. 令 I 为 $\{1, \cdots, n\}$ 的非空子集，我

们用 $|I|$ 表示 I 中元素的个数，则

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

证明 先证

$$\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k} = \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|I|-1} \bigwedge_{i\in I} I_{A_i}. \qquad (*)$$

当 $n=1$ 时显然成立．假设对 n 成立，下证对 $n+1$ 也成立．

$$\begin{aligned} f &\triangleq \sum_{I\subset\{1,\cdots,n+1\}} (-1)^{|I|-1} \bigwedge_{i\in I} I_{A_i} \\ &= \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|I|-1} \bigwedge_{i\in I} I_{A_i} + I_{A_{n+1}} + \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|I|} \left(\bigwedge_{i\in I} I_{A_i}\right) \bigwedge I_{A_{n+1}} \\ &= \bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k} + I_{A_{n+!}} - \left(\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k}\right) \bigwedge I_{A_{n+1}}. \end{aligned}$$

往证 $f = \bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k}$. 又

$$\Omega = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \backslash A_{n+1} + A_{n+1} \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1} + \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)^c.$$

故 (1)$\omega \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \backslash A_{n+1}$, $f = 1+0-0 = 1$, $\bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k} = 1$;

(2)$\omega \in A_{n+1} \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$, $f = 0+1-0 = 1$, $\bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k} = 1$;

(3)$\omega \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}$, $f = 1+1-1 = 1$, $\bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k} = 1$;

(4)$\omega \in \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)^c$, $f = 0$, $\bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k} = 0$.

从而有 $f = \bigvee_{k=1}^{n+1} I_{A_k}$, 即 $(*)$ 式对 $n+1$ 成立．注意到 $\bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k} = I_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$, $\bigwedge_{i\in I} I_{A_i} = I_{\bigcap_{i\in I} A_i}$, 且 $(*)$ 式两边均可测，故对其求关于 μ 的积分有

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{I\subset\{1,\cdots,n\}} (-1)^{|I|-1}\mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

1.14 设 E 为一距离空间， $\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel σ- 代数， μ 与 ν 为 $(E,\mathcal{B}(E))$ 上的两个有限测度．若对 E 上一切有界连续函数 f 有 $\mu(f)=\nu(f)$, 则 $\mu=\nu$.

证明 证法一：显然 $1\in\mathcal{C}_b(E)$, 故 $\mu(1)=\nu(1)$.

令 $\mathcal{H}=\{f\in\mathcal{B}(E):\ \mu(f)=\nu(f)\}\subset\mathcal{B}(E)$. 由题设有 $\mathcal{C}_b(E)\subset\mathcal{H}$. 由积分的线性性知 $\mathcal{H}$ 为线性空间，且 $1\in\mathcal{H}$. 又 $\mathcal{C}_b(E)$ 对乘积运算封闭．故由第二章定理 2.8 知 $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}_b(E))\subset\mathcal{H}$. 再由 P_{29} 习

题 1.16 $\mathcal{B}(E)=\sigma(f: f\in\mathcal{C}_b(E))$ 知 $\mathcal{B}(E)=\mathcal{H}$, 即 $\mu=\nu$.
证法二：令 $\mathcal{F}=\{A\subset E:\ \mu(A)=\nu(A)\}$.
(1) 由 $1\in\mathcal{C}_b(E)$, 故 $\Omega\in\mathcal{F}$;
(2)$A,B\in\mathcal{F},\ A\subset B\Rightarrow\mu(B\backslash A)=\mu(B)-\mu(A)=\nu(B)-\nu(A)=\nu(B\backslash A)\Rightarrow B\backslash A\in\mathcal{F}$;
(3) 令 $A_n\uparrow A$, 由测度的从下连续性 $\Rightarrow A\in\mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}$ 为 λ- 类.
令 $\mathcal{C}=\{F\subset E:\ F为E中闭集\}$. 则 $\mathcal{C}$ 为 π- 类. $\forall F\in\mathcal{C}$, 令 $f_n(x)=\left(\frac{1}{1+\rho(x,F)}\right)^n\in\mathcal{C}_b(E),\ f_n(x)\to I_F$. 由题设有 $\mu(f_n)=\nu(f_n)$. 再由控制收敛定理有 $\mu(I_F)=\nu(I_F)$. 故 $F\in\mathcal{F}$, 即 $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$. 从而有 $\mathcal{F}\supset\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}(E)$.

1.15 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 及 $(E,\mathcal{E})$ 为两个可测空间， f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 中的可测映射， μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上一测度.

(1) 令 $\mu f^{-1}(A)=\mu(f^{-1}(A)),\ A\in\mathcal{E}$. 则 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度 (通常称为由 f 在 $(E,\mathcal{E})$ 上**导出的测度** 或 f 的 **象测度**).

(2) 设 g 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的可测函数，则为要 g 关于测度 μf^{-1} 的积分存在 (相应地，可积), 必须且只需 $g\circ f$ 关于 μ 的积分存在 (相应地，可积). 此外，这时有

$$\int_\Omega g\circ f d\mu=\int_E gd(uf^{-1}).$$

证明 (1)$\mu f^{-1}(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$, 设 $A_n\in\mathcal{E},\ A_n\cap A_m=\emptyset,\ n\neq m$ 有

$$\begin{aligned}\mu f^{-1}\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)&=\mu\left(f^{-1}\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)\right)\\=&\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f^{-1}(A_n)\right)=\sum_{n=1}^\infty\mu(f^{-1}(A_n))\\=&\sum_{n=1}^\infty\mu f^{-1}(A_n).\end{aligned}$$

故 μf^{-1} 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的测度.

(2) 令 $g=I_A,\ A\in\mathcal{E}$, 则

$$\int_E I_A d(\mu f^{-1})=\mu f^{-1}(A)=\int_\Omega I_{f^{-1}(A)}d\mu=\int_\Omega I_A(f)d\mu=\int_\Omega I_A\circ fd\mu,$$

即

$$\int_\Omega g\circ fd\mu=\int_E gd(uf^{-1}). \tag{$*$}$$

对 I_A 成立. 由积分的线性性质知 $(*)$ 式当 g 为非负 $\mathcal{E}$- 简单函数时成立. 若 g 为非负 $\mathcal{E}$- 可测函数，则存在 $\{g_n:\ n\in\mathbf{N}\}$ 为非负 $\mathcal{E}$- 简单函数序列，且 $0\leq g_n\uparrow g$. 于是 $\{g_n\circ f:\ n\in\mathbf{N}\}$ 为非负 $\mathcal{F}$- 简单函数序列，且 $0\leq g_n\circ f\uparrow g\circ f$, 因此由单调收敛定理知 $(*)$ 式对非负 $\mathcal{E}$- 可测函数成立.

若 g 为实 $\mathcal{E}$- 可测函数，则

$$\int_\Omega g^+\circ fd\mu=\int_E g^+d(\mu f^{-1}), \tag{1}$$

$$\int_\Omega g^- \circ f d\mu = \int_E g^- d(\mu f^{-1}). \tag{2}$$

而 $g^\pm \circ f = (g \circ f)^\pm$, 故 $\int_E g d(\mu f^{-1})$ 存在 (可积) 等价于 (1),(2) 式的右边至少有一有限 (都有限), 因而也等价于 (1),(2) 式的左边至少有一有限 (都有限), 即 $\int_\Omega g \circ f d\mu$ 存在 (可积). 再由 (1),(2) 及积分定义知 $(*)$ 式对实值 $\mathcal{E}$- 可测函数成立. 对于复值 $\mathcal{E}$- 可测函数可对其实部与虚部分别应用 $\mathcal{E}$- 可测函数的结果，即得 $(*)$ 式成立.

§2 积分号下取极限

2.10 设 $f_n, h_n, g_n, f, h, g \in \mathcal{L}, h_n \le f_n \le g_n$,a.e.,$\forall n \ge 1$. 又设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e}} g$ 或 $g_n \xrightarrow{\mu} g$, $h_n \xrightarrow{\text{a.e}} h$ 或 $h_n \xrightarrow{\mu} h$. 如果 h, g, h_n, g_n 都可积，且 $\mu(h_n) \to \mu(h)$, $\mu(g_n) \to \mu(g)$, 则 f 可积，且有 $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$.

证明 不妨设 $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{a.e}} g$, $h_n \xrightarrow{\text{a.e}} h$. 由题设有 $f_n - h_n \ge 0$, $f_n - g_n \le 0$, 且 $f_n - h_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f - h$, $f_n - g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f - g$. 又 g_n, h_n 可积，且 $h_n \le f_n \le g_n$, a.e. ,$\forall n \ge 1$ 则 f_n 可积. 对 $f_n - h_n$ 应用 Fatou 引理有

$$\mu(\liminf_{n\to\infty}(f_n - h_n)) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n - h_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(h),$$

即 $\mu(f - h) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(h)$. 从而有 $\mu(f) \le \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

再对 $f_n - g_n$ 应用 Fatou 引理有 $\limsup_{n\to\infty} \mu(f_n - g_n) \le \mu(\limsup_{n\to\infty}(f_n - g_n))$, 即 $\limsup_{n\to\infty} \mu(f_n) - \mu(g) \le \mu(f) - \mu(g)$. 从而有 $\mu(f) \ge \limsup_{n\to\infty} \mu(f_n)$. 于是 f 可积，且 $\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

若是依测度收敛，则可选子列 a.e. 收敛.

2.11 若在 2.10 中有 $h_n \le 0 \le g_n$, 则 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

证明 由 $h_n \le f_n \le g_n$, a.e. 知 $h \le f \le g$, $h_n - g \le f_n - f \le g_n - h$. 再由 $h_n \le 0 \le g_n$ 知, $|f_n - f| \le g_n - h + g - h_n$. 取 $F_n = g_n - h_n + g - h \ge 0$, $F_n \in \mathcal{L}^+$, 且 $F_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 2g - 2h \ge 0$, a.e. F_n 及 $2g - 2h$ 可积，故 $\mu(F_n) \to 2\mu(g) - 2\mu(h)$. 由定理 2.7 得 $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$.

2.12 设 (f_n) 为一可测函数列. 若 $\sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) < \infty$ 或 $\sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^\infty f_n$, a.e. 有意义， $\sum_{n=1}^\infty f_n$ 的积分存在，且有 $\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n)$.

证明 因 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n = \sum\limits_{n=1}^\infty f_n^+ - \sum\limits_{n=1}^\infty f_n^-$, 由系 2.2 得

$$\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^+\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+), \qquad \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^-\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-).$$

再由 $\sum\limits_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) < \infty$ 或 $\sum\limits_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) < \infty$ 得 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n^+ < \infty$, a.e. 或 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n^- < \infty$, a.e. 故 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ a.e. 有意义，且 $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ 积分存在.

$$\mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^+\right) - \mu\left(\sum_{n=1}^\infty f_n^-\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^+) - \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n^-) = \sum_{n=1}^\infty \mu(f_n).$$

§3 不定积分与符号测度

3.17 设 ν 为一符号测度， f 关于 ν 的积分存在 (见注 3.5(3)). 则对一切 $A\in\mathcal{F}$, fI_A 关于 ν 的积分存在，且 $A\mapsto\nu(fI_A)$ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度.

证明 $\int_\Omega fd\nu=\int_\Omega f^+d\nu-\int_\Omega f^-d\nu=\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^--\int_\Omega f^+d\nu^--\int_\Omega f^-d\nu^+$.
因 f 关于 ν 的积分存在，故有

$$\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^-<\infty,\ \text{或}\ \int_\Omega f^+d\nu^-+\int_\Omega f^-d\nu^+<\infty.$$

又 $\int_\Omega fI_Ad\nu=\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^--\int_\Omega f^+I_Ad\nu^--\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+$, 且

$$\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^-\le\int_\Omega f^+d\nu^++\int_\Omega f^-d\nu^-,$$

$$\int_\Omega f^+I_Ad\nu^-+\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+\le\int_\Omega f^+d\nu^-+\int_\Omega f^-d\nu^+.$$

从而有 $\int_\Omega f^+I_Ad\nu^++\int_\Omega f^-I_Ad\nu^-<\infty$, 或 $\int_\Omega f^+I_Ad\nu^-+\int_\Omega f^-I_Ad\nu^+<\infty$. 故 fI_A 关于 ν 的积分存在. 令 $\varphi:A\mapsto\nu(fI_A)$, 则有

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^\infty A_n\right)=\int_\Omega fI_{\sum\limits_{n=1}^\infty A_n}d\nu=\sum_{n=1}^\infty\int_\Omega fI_{A_n}d\nu=\sum_{n=1}^\infty\varphi(A_n),$$

即 φ 定义了 $\mathcal{F}$ 上的一符号测度.

3.18 设 ν 及 μ 为两个符号测度，f 关于 ν 的积分存在. 若 $\nu\ll\mu$(相应地 $\nu\perp\mu$), 则 $f.\nu\ll\mu$(相应地， $f.\nu\perp\mu$).

证明 (1) 设 $\nu\ll\mu$, 因

$$|f.\nu|(A)=\int_A f^+d\nu^++\int_A f^-d\nu^-+\int_A f^+d\nu^-+\int_A f^-d\nu^+.$$

$$|\mu|(A)=0\Rightarrow|\nu|(A)=0\Rightarrow\nu^+(A)=0,\text{且 }\nu^-(A)=0\Rightarrow|f.\nu|(A)=0\Rightarrow f.\nu\ll\mu.$$

(2) 设 $\nu\perp\mu$, 则 $\exists N\in\mathcal{F}$, 使得

$$|\mu|(N)=0,\quad|\nu|(N^c)=0.$$

$$\begin{aligned}|f.\nu|(N^c)&=f^+.\nu^+(N^c)+f^-.\nu^-(N^c)+f^+.\nu^-(N^c)+f^-.\nu^+(N^c)\\&=f^+.|\nu|(N^c)+f^-.|\nu|(N^c)=0\Rightarrow f.\nu\perp\mu.\end{aligned}$$

3.19 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间， ν 为 $\mathcal{F}$ 上的一有限符号测度. 则下列二断言等价:

(1)$\nu\ll\mu$;

(2)$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得 $A\in\mathcal{F},\mu(A)<\delta\Rightarrow|\nu|(A)<\varepsilon$.

证明 (2)⇒(1) 令 $\mu(A)=0$, $\forall A\in\mathcal{F}$. 由 (2) 得 $\forall\varepsilon>0$, $|\nu|(A)<\varepsilon$.
由 ε 的任意性得 $|\nu|(A)=0$, 即 $\nu\ll\mu$.

(1)⇒(2) 反证法.
$\exists\varepsilon_0>0$, 取 $\delta=1/2^n>0$, $\exists A_n\in\mathcal{F}$, $\mu(A_n)<1/2^n$, 但 $|\nu|(A_n)\geq\varepsilon_0>0$.
取 $A=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 有,

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leq\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k)=\frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n\Rightarrow\mu(A)=0.$$

但 $|\nu|(A)\geq|\nu|(A_n)\geq\varepsilon_0>0$. 这与 $\nu\ll\mu$ 矛盾. 故 (2) 成立.
3.20 举例说明定理 3.11 中 μ 的 σ- 有限性假定不能去掉.

解 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\{A\subset[0,1],\ A$或$A^c$为至多可数集$\}$. 令 $\mu(A)=|A|(|A|$ 为 A 的个数).

$$\nu(A)=\begin{cases}0, & A\text{可数},\\ 1, & A^c\text{可数}.\end{cases}$$

则 $\nu\ll\mu$, 且 μ 不是 σ- 有限测度. 假设存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g, 使得

$$\nu(A)=\int_A gd\mu.$$

取 $A=\{\omega_0\}$, 则有

$$0=\nu(A)=g(\omega_0)\mu(A)=g(\omega_0),$$

即 $g(\omega_0)=0$. 又由 ω_0 的任意性有 $g\equiv0$. 则 $\nu\equiv0$, 这与 ν 的定义矛盾. 故定理 3.11 中 μ 的 σ- 有限性不能去掉.
3.21 设 μ 及 ν 为两个 σ- 有限测度, 则为要 $\nu\sim\mu$, 必须且只需存在可测函数 g:$0<g(\omega)<\infty$, $\forall\omega\in\Omega$, 使得 $\nu=g.\mu$.

证明 (⇒) 由 Radon-Nikodym 定理知, 存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g, 使得 $\nu=g.\mu$. 此外, g 在 μ- 等价意义下是唯一的, 且 g 为 μ-a.e. 有限.

$$\nu([g\leq0])=\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[g\leq\frac{1}{n}]\right)=\lim_{n\to\infty}\nu([g\leq\frac{1}{n}])=\lim_{n\to\infty}\int_{[g\leq\frac{1}{n}]}gd\mu\leq\frac{1}{n}\mu([g\leq\frac{1}{n}])=0.$$

但 $\forall A\in\mathcal{F}$, $\nu(A)=\int_A gd\mu\geq0\Rightarrow g\geq0$, μ-a.e. 故 $\mu([g\leq0])=0$, $\nu([g\leq0])=0$, 即 $0<g(\omega)<\infty$, a.e. (μ 或 ν) , 再在零测集上定义 $g(\omega)=1$, 即得满足条件的 g.
(⇐) 因 $\nu=g.\mu$ 得 $\nu\ll\mu$. 若 $\nu(A)=\int_A gd\mu=0$, 则

$$0=\int_A gd\mu\geq\int_{A\cap[g>1/n]}gd\mu\geq\frac{1}{n}\mu(A\cap[g>1/n]),\ \forall n\geq1,$$

即 $\mu(A)=0$. 故 $\mu\ll\nu$, 即 $\nu\sim\mu$.
3.22 设 μ_1,μ_2 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的有限符号测度, 令

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\quad \mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+,$$

则 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$ 且 $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度 ν; $\mu_1\wedge\mu_2$ 为满足 $\nu\leq\mu_1$ 且 $\nu\leq\mu_2$ 的最大符号测度 ν.

证明 $\forall A\in\mathcal{F}$, 若 $\mu_1(A)\geq\mu_2(A)$, 则 $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)+0=\mu_1(A)\geq\mu_2(A)$;
若 $\mu_2(A)\geq\mu_1(A)$, 则 $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)+\mu_2(A)-\mu_1(A)=\mu_2(A)\geq\mu_1(A)$. 故

$$\mu_1\vee\mu_2\geq\mu_1,\qquad 且\ \mu_1\vee\mu_2\geq\mu_2.$$

假设存在一符号测度 ν, $\nu\geq\mu_1$, $\nu\geq\mu_2$, 但 $\exists A\in\mathcal{F}$, *s.t.* $\nu(A)<\mu_1\vee\mu_2(A)$. 则当 $\mu_1(A)\geq\mu_2(A)(\mu_1(A)\leq\mu_2(A))$ 时, $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)(=\mu_2(A))$. 故 $\nu(A)<\mu_1(A)(\mu_2(A))$ 矛盾, 即 $\mu_1\vee\mu_2$ 为满足 $\nu\geq\mu_1$, $\nu\geq\mu_2$ 的最小符号测度. 对于 $\mu_1\wedge\mu_2$ 同理可证.

3.23 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上符号测度, 则 $\|\nu\|_{\mathsf{var}}\leq 2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$. 若 $\mu(\Omega)=0$, 则 μ 为有限符号测度, 且有 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}=2\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)|$.

证明 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解, 由命题 3.6 得

$$\mu(D)=\sup\{\mu(B):\ B\in\mathcal{F}\},\qquad \mu(D^c)=\inf\{\mu(B):\ B\in\mathcal{F}\}.$$

故

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{\mathsf{var}}=&|\mu|(\Omega)=\mu^+(\Omega)+\mu^-(\Omega)=\mu(D)-\mu(D^c)\\ &=\sup_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)-\inf_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)\leq 2\sup_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|.\end{aligned}$$

若 $\mu(\Omega)=0$, 则有 $\mu^+(\Omega)=\mu^-(\Omega)<\infty$. 所以 $|\mu|(\Omega)<\infty$, 即 μ 为有限符号测度, 且 $0=\mu(D)+\mu(D^c)=\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)+\inf\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)$, 即 $\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|=\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)=-\inf\limits_{B\in\mathcal{F}}\mu(B)$. 故 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}=2\sup\limits_{B\in\mathcal{F}}|\mu(B)|$.

3.24 设 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 Ω 上有界 $\mathcal{F}$- 可测函数全体, $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 表示 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上有限符号测度全体. 对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$,

(1) $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间 (完备赋范线性空间).

(2) 设 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 令 $I_\mu(f)=\mu(f)$, $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 则 μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函, 且有 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$.(提示: 设 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解, 令 $f=I_D-I_{D^c}$, 考虑 $\mu(f)$.)

(3)$\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按范数 $\|\cdot\|_{\mathsf{var}}$ 为一 Bannach 空间.

证明 (1) 易证 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 为线性空间, 且对 $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\|f\|=0\Leftrightarrow f=0;\qquad \forall\alpha\in\mathbf{R},\ \ \|\alpha f\|=|\alpha|\ \|f\|;$$

$$\forall g\in B(\Omega,\mathcal{F}),\ \ \|f+g\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)+g(\omega)|\leq\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|+\sup_{\omega\in\Omega}|g(\omega)|=\|f\|+\|g\|.$$

这表明 $\|\cdot\|$ 是范数.

再证完备性. 设 $\{f_n\}\subset B(\Omega,\mathcal{F})$, 且 $f_n-f_m\xrightarrow{\|\cdot\|}0$, 即 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|f_n(\omega)-f_m(\omega)|\to 0$.
$\forall\varepsilon>0$, $\exists n,m$ 充分大, 使得 $|f_n(\omega)-f_m(\omega)|<\varepsilon$, $\forall\omega\in\Omega$, 即 f_n-f_m 一致收敛于 0. 故由第二章习题 3.8 知, $\exists f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 使得 f_n 一致收敛于 f. 故 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f\in B(\Omega,\mathcal{F})$, 即 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 按 $\|\cdot\|$ 为一 Banach 空间.

(2) 由积分的线性性知, μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一线性泛函. $\forall f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ 满足 $\|f\|\leq 1$ 有

$$|I_\mu(f)|=|\mu(f)|=|\mu^+(f)-\mu^-(f)|\leq\mu^+(|f|)+\mu^-(|f|)\leq\mu^+(\Omega)+\mu^-(\Omega)=\|\mu\|_{\mathsf{var}}.$$

由 μ 为有限符号测度知, $\|\mu\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 故 I_μ 为 $B(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一有界线性泛函. 设 $\Omega=D+D^c$ 为 Ω 的 Hahn 分解. 令 $f=I_D-I_{D^c}$, 则 $\|f\|=1$, 且 $|I_\mu(f)|=\mu^+(D)+\mu^-(D^c)=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$. 故 $\|I_\mu\|\geq\|\mu\|_{\mathsf{var}}$, 即 $\|I_\mu\|=\|\mu\|_{\mathsf{var}}$.

(3) 显然 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 是一线性空间. $\forall\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\|\mu\|_{\mathsf{var}}=0\Leftrightarrow|\mu|(\Omega)=0\Leftrightarrow\mu=0;\qquad\forall\alpha\in\mathbf{R},\ \|\alpha\mu\|_{\mathsf{var}}=|\alpha\mu|(\Omega)=|\alpha|\ \|\mu\|_{\mathsf{var}};$$

设 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 有

$$\begin{aligned}\|\mu_1+\mu_2\|_{\mathsf{var}}=|\mu_1+\mu_2|(\Omega)=(\mu_1+\mu_2)^+(\Omega)+(\mu_1+\mu_2)^-(\Omega)\\ \le\mu_1^+(\Omega)+\mu_2^+(\Omega)+\mu_1^-(\Omega)+\mu_2^-(\Omega)=\|\mu_1\|_{\mathsf{var}}+\|\mu_2\|_{\mathsf{var}}.\end{aligned}$$

再证完备性. 设 $\{\mu_n\}\subset\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$, 且 $\mu_n-\mu_m\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathsf{var}}}0$, 则 $\forall A\in\mathcal{F}$,

$$|\mu_n(A)-\mu_m(A)|\le|\mu_n-\mu_m|(A)\le\|\mu_n-\mu_m\|_{\mathsf{var}}.\tag{$*$}$$

故 $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在且有限. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理知, μ 为一符号测度, $\sup\limits_n\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 若 $\Omega=D\cup D^c$ 为 μ 的 Hahn 分解.

$$\|\mu\|_{\mathsf{var}}=\mu(D)-\mu(D^c)=\lim_{n\to\infty}(\mu_n(D)-\mu_n(D^c)).$$

而 $\forall n$, $|\mu_n(D)-\mu_n(D^c)|\le2\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}$. 故 $\|\mu\|_{\mathsf{var}}\le2\sup\limits_n\|\mu_n\|_{\mathsf{var}}<\infty$. 从而有 $\mu\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$. 由 $(*)$ 得 μ_n 一致收敛于 μ. 又 $\|\mu_n-\mu\|_{\mathsf{var}}=\sup\limits_{A\in\mathcal{F}}(\mu_n-\mu)(A)-\inf\limits_{A\in\mathcal{F}}(\mu_n-\mu)(A)$. 则 $\mu_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathsf{var}}}\mu$. 故 $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{F})$ 按 $\|\cdot\|_{\mathsf{var}}$ 为一 Banach 空间.

§4 空间 L^p 及其对偶

4.19 简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 中稠密.

证明 $\forall f\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, 记 $\|f\|_\infty=a<\infty$. $\forall\varepsilon>0$, 将 $[-a,a]$ 分成长度小于 ε 的有限个小区间:

$$[a_0,a_1],\qquad(a_1,a_2],\qquad\cdots,\qquad(a_{n-1},a_n].$$

令 $f_\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^n a_iI_{A_i}$, 其中 $A_1=f^{-1}([a_0,a_1])$, $A_k=f^{-1}((a_{k-1},a_k])$, $k\ge2$. 则在 $f^{-1}([-a,a])$ 上

$$|f-f_\varepsilon|<\varepsilon,\qquad f_\varepsilon\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu).$$

故 $\mu(|f-f_\varepsilon|>\varepsilon)\le\mu(|f|>\|f\|_\infty)=0$, 即 $\|f-f_\varepsilon\|_\infty\le\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to0$ 得 $\|f-f_\varepsilon\|_\infty\to0$. 故简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 中稠密.

4.20 设 $[a,b]$ 为一闭区间, μ 为 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 测度. 则对任何 p: $1\le p<\infty$, $[a,b]$ 上的阶梯函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 由此进一步证明 $[a,b]$ 上的连续函数全体在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密. 此外证明 $L^\infty([a,b],\mu)$ 不是可分的 Banach 空间.

证明 令 $\mathcal{C}=\{[c,d],\ a\le c<d\le b\}$ 且 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}([a,b])$, $\mathcal{C}$ 为代数. 由 P_{13} 习题 3.9 知 $\forall A\in\mathcal{B}([a,b])$, $\varepsilon>0$, $\exists B\in\mathcal{C}$, $s.t.\ \mu(A\Delta B)<\varepsilon$. 故 $\mu(|I_A-I_B|^p)<\varepsilon^p$.

$\forall f=\sum\limits_{k=1}^n a_kI_{A_k}$, $A_k\in\mathcal{B}([a,b])$, $\forall\varepsilon>0$, 对 A_k, $\exists B_k\in\mathcal{C}$, $s.t.\ \mu(|I_{A_k}-I_{B_k}|^p)<\left(\frac{\varepsilon}{2^k(1+|a_k|)}\right)^p$. 取 $g=\sum\limits_{k=1}^n a_kI_{B_k}$, $B_k\in\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p=&\mu\left(|\sum_{k=1}^n a_kI_{A_k}-\sum_{k=1}^n a_kI_{B_k}|^p\right)^{\frac1p}\le\sum_{k=1}^n\|a_k(I_{A_k}-I_{B_k})\|_p\\ \le&\sum_{k=1}^n|a_k|\ \|I_{A_k}-I_{B_k}\|_p\le\sum_{k=1}^n|a_k|\frac{\varepsilon}{2^k(1+|a_k|)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

又 L^p 中简单函数在 L^p 中稠密，故 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{B_k},\ B_k \in \mathcal{C},\ n \geq 1\}$ 在 L^p 中稠密，即 $[a,b]$ 上阶梯函数在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密．又由于任意连续函数可由简单 (阶梯) 函数逼近，故 $[a,b]$ 上连续函数在 $L^p([a,b],\mu)$ 中稠密．

由 $L^\infty([a,b],\mu)$ 为度量空间及可分度量空间中的任意子集是可分的．
令 $M = \{f_s(\cdot)|\ s \in [a,b]\} \subset L^\infty([a,b],\mu)$, 其中

$$f_s(t) = \begin{cases} 0, & a \leq t \leq s, \\ 1, & s \leq t \leq b. \end{cases}$$

则 $\forall s_1 \neq s_2,\ \|f_{s_1}(\cdot) - f_{s_2}(\cdot)\|_\infty = 1$, 故 M 不可分．从而有 $L^\infty([a,b],\mu)$ 不可分．

4.21 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2}$. 此外, 有 $\|f\|_p \to \|f\|_\infty (p \to \infty)$.

证明 $(1) 1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\varphi(x) \triangleq x^{\frac{p_2}{p_1}} (x > 0)$ 为凸函数．由 Jensen 不等式有 $\varphi(P(|f|^{p_1})) \leq P(\varphi(|f|^{p_1}))$, 即 $(P(|f|^{p_1}))^{\frac{p_1}{p_2}} \leq P(|f|^{p_2})$,

$$\|f\|_{p_1} = [P(|f|^{p_1})]^{\frac{1}{p_1}} \leq [P(|f|^{p_2})]^{\frac{1}{p_2}} = \|f\|_{p_2}.$$

(2) 由 (1) 知 $\{\|f\|_p\}$ 关于 p 为递增序列，故极限存在．于是由 P_{66} 定义 4.12,4.13 知
1^0 取 E_0, $P(E_0) = 0,\ s.t.\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|$. 则

$$\int_\Omega |f(x)|^p dP = \int_{\Omega \setminus E_0} |f(x)|^p dP \leq \|f\|_\infty^p, \quad \forall p \geq 1.$$

故 $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$, 即 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
$2^0 \forall 0 \leq \varepsilon \leq \|f\|_\infty$, $E_\varepsilon \triangleq \{\omega:\ |f(\omega)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ 不为零测集，故

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{E_\varepsilon} |f(x)|^p dP\right)^{\frac{1}{p}} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\,(P(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}}.$$

令 $p \to \infty$ 有 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. 由 ε 的任意性有 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$.

综合上述 1^0,2^0 得 $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

4.22(Hölder 不等式的推广)(1) 设 $1 < p, q, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, 则有 $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

(2) 设 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty$, $m \geq 2$, 且 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. 则有

$$\|f_1 \cdots f_m\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_m\|_{p_m}.$$

证明 (1) 设 $1 < p, q, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ 要证

$$[E(|fg|^r)]^{\frac{1}{r}} \leq [E(|f|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|g|^q)]^{\frac{1}{q}}, \ \forall f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

因 $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, 故 $|ab| \leq \frac{r}{p}|a|^{\frac{p}{r}} + \frac{r}{q}|b|^{\frac{q}{r}}$. 取 $\overline{f} = \frac{|f|^r}{\|f\|_p^r}$, $\overline{g} = \frac{|g|^r}{\|g\|_q^r}$, 则有

$$E(|\overline{f}\overline{g}|) \leq E\left[\frac{r}{p}|\overline{f}|^{\frac{p}{r}} + \frac{r}{q}|\overline{g}|^{\frac{q}{r}}\right] = \frac{r}{p}E(|\overline{f}|^{\frac{p}{r}}) + \frac{r}{q}E(|\overline{g}|^{\frac{q}{r}}) = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

故 $E\left[(|f|^r|g|^r)/(\|f\|_p^r\|g\|_q^r)\right] \le 1$, 即 $\|fg\|_r \le \|f\|_p\|g\|_q$.

(2) 设 $1 < p_1, p_2 < \cdots p_m < \infty$, $m \ge 2$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$, 则由 (1) 得

$$\begin{aligned}\|f_1 \cdots f_m\|_1 \le & \|f_1\|_{p_1}\|f_2 \cdots f_m\|_{\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}} \\ \le & \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\|f_3 \cdots f_m\|_{\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} \\ \le & \cdots \le \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_m\|_{p_m}.\end{aligned}$$

4.23 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $f \in L^1 \cap L^\infty$. 试证: $\forall p \ge 1$, $f \in L^p$, 且 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

证明 (1)$\forall p \ge 1$, 令 $C \triangleq \|f\|_\infty < \infty$, $\|f\|_\infty \le C$, μ-a.e.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p d\mu = & \int_\Omega |f|^{p-1}|f| d\mu = \int_{[|f|>C]} |f|^{p-1}|f| d\mu + \int_{[|f|\le C]} |f|^{p-1}|f| d\mu \\ \le & C^{p-1}\mu(|f|) = C^{p-1}\|f\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

故 $f \in L^p$.

(2) 证法同 4.21(2). 当 $\|f\|_\infty = 0$ 时显然有结论成立. 当 $\|f\|_\infty \ne 0$ 时, 取 $E_0:\ \mu(E_0) = 0,\ s.t.$ $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|$, 由 $f \in L^\infty$ 得 $\mu(\Omega\setminus E_0) < \infty$,

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu = \int_{\Omega\setminus E_0} |f(x)|^p d\mu \le \|f\|_\infty^p\ \mu(\Omega\setminus E_0).$$

故 $\|f\|_p \le \|f\|_\infty[\mu(\Omega\setminus E_0)]^{\frac{1}{p}}$, 即 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$.

另外, $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|f\|_\infty$, $E_\varepsilon = [\omega:\ |f| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon]$ 不是零测集.
$\|f\|_p \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)[\mu(E_\varepsilon)]^{\frac{1}{p}}$. 故 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty$.

从而有 $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

4.24 设 λ 为 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue 测度, $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \lambda)$. 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 令 $f_x(t) = f(t-x)$. 试证: $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, 有 $\lim_{x\to x_0} \|f_x - f_{x_0}\|_p = 0$.

4.25 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, g 为一实值 μ- 可积函数, 在 $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上定义 T_g 如下:

$$T_g(f) = \int_\Omega fg d\mu, \quad f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

试证

$$\|g\|_1 = \sup\{|T_g(f)|:\ \|f\|_\infty \le 1\}.$$

证明 (1)$\forall f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

$$|T_g(f)| \le \int_\Omega |fg| d\mu \le \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

即 $\sup\{|T_g(f)|:\ \|f\|_\infty < 1\} \le \|g\|_1$.

(2) 取 $f = \mathsf{sgn} g$, 则

$$|T_g(f)| = |\int_\Omega g \cdot \mathsf{sgn} g d\mu| = \|g\|_1.$$

故 $\|g\|_1 = \sup\{|T_g(f)|:\ \|f\|_\infty < 1\}$.

§5 Daniell 积分

5.10 设 M 为一个 n 维 Riemann 流形, $\mathcal{U}$ 是 M 的一个坐标领域, $\{x^i\}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的坐标函数, $\{g_{ij}\}$ 为在 $\mathcal{U}$ 中的 Riemann 度量系数, $G = \det[g_{ij}]$($\det$ 表示矩阵的行列式). 令 $C_c(M)$ 表示 M 上具紧支撑的连续泛函全体. 设 $f \in C_c(M)$, 其支撑含于 $\mathcal{U}$, 定义

$$\int_{\mathcal{U}} f = \int_{\mathcal{U}} f\sqrt{G}dx^1 \cdots dx^n.$$

对一般的 $f \in C_c(M)$, 可利用上式及 M 的一个单位分解来定义 $\int_M f$. 试证 $f \mapsto \int_M f$ 为 $C_c(M)$ 上的 Daniell 积分.

§6 Bochner 积分和 Pettis 积分

6.7 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $X : \Omega \to E$ 为一强 μ- 可测函数. 则为要 X 为 Bochner 可积, 必须且只需存在一列简单可测函数 $\{X_n,\ n \geq 1\}$, 使得对 a.e. $\omega \in \Omega$, $\text{s-}\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

证明 由强 μ- 可测定义, 不妨设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为完备测度空间, 且 X 为强可测函数.

($\Rightarrow$) 设 X 为 Bochner 可积, 由定理 6.3, $\exists$Borel 可测简单函数列 $\{X_n\}$, *s.t.*

$$\|X_n\| \leq \|X\|,\ \forall n \geq 1,\ \text{且 s-}\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),\ \forall \omega \in \Omega.$$

故 $\|X_n\|$ 关于 μ- 可积. 从而有 X_n 关于 μ 为 Bochner 可积, $\forall n \geq 1$.
又 $\|X_n - X\| \to 0,\ n \to \infty$. 由 Fatou 引理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu = 0$.
又 $\int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu + \int_\Omega \|X_m - X\| d\mu$, 故 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$.

($\Leftarrow$) 设 X_n 为简单函数列, $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, 且 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X_m\| d\mu = 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu = 0$. 又 X_n 关于 μ 为 Bochner 可积, 且关于 μ- 可积,
故 $\int_\Omega \|X\| d\mu \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu + \int_\Omega \|X_n\| d\mu < +\infty$. 从而有 $\|X\|$ 关于 μ 可积.
由定理 6.4 知 X 关于 μ 为 Bochner 可积.

6.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为一测度空间, $\{X_n\}$ 为一列 Bochner 可积函数, X 为一强 μ- 可测函数. 如果对 a.e.ω, $\text{s-}\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, 且存在一非负 μ- 可积函数 g, 使得 $\|X_n\| \leq g$, a.e. $\forall n \geq 1$, 则 X 为 Bochner 可积, 且有

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\|X_n - X\| \leq \varepsilon$. 故 $\|X\| \leq \|X_n - X\| + \|X_n\| \leq \varepsilon + g$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\|X\| \leq g$. 故 $\|X\|$ 关于 μ 可积, $\int_\Omega X d\mu$ 存在. 又 $\|X_n - X\| \leq 2g$, 由控制收敛定理得

$$\|\int_\Omega X_n d\mu - \int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X_n - X\| d\mu \to 0,\ \ n \to \infty.$$

6.9 设 μ 为 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上的 Lebesgue 测度, E 为 Banach 空间 $L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$. 对 $A \in \mathcal{B}([0,1])$, 令 $\nu(A) = I_A$. 试证:

(1)ν 为关于 μ 绝对连续的 E- 值测度;

(2) 不存在 Bochner 可积函数 $X:[0,1]\to E$, 使得 $\nu(A)=\int_A Xd\mu$, $\forall A\in\mathcal{B}([0,1])$.

证明 (1) 设 $\mu(A)=0$, $A\in\mathcal{B}([0,1])$, $I_A\in L^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mu)$. 则 $\nu(A)$ 为 E- 值集函数. 由示性函数的性质知 ν 为 E- 值测度, 于是 $\forall f\in E^*=L^\infty$ 有

$$f(\nu(A))=f(I_A)=\int_{[0,1]} fI_A d\mu=\int_{[0,1]} f(\omega)I_A(\omega)d\mu=0.$$

由 f 的任意性知 $\nu(A)=0$. 故 ν 关于 μ 为绝对连续的 E- 值测度.

(2)

6.10 证明注 6.5(3), 即设 X 关于 μ 为 Bochner 可积, 则 $\forall A\in\mathcal{F}$, XI_A 仍为 Bochner 可积, 其 Bochner 积分记为 $\int_A Xd\mu$. 令

$$\nu(A)=\int_A Xd\mu,\quad A\in\mathcal{F}, \tag{6.7}$$

则 ν 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的下述意义下的 **E- 值测度**: (i)$\nu(\emptyset)=0$;(ii) 对 $\mathcal{F}$ 中两两不相交集合序列 $\{A_i\}$, 有 $\nu\left(\sum_{i=1}^\infty A_i\right)=\sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$. 我们称 ν 为 X 关于 μ 的 **不定积分**. 显然 ν 关于 μ 在下述意义下是 **绝对连续** 的, 即 $\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$. 此外, 令

$$\|\nu\|_{\mathsf{var}}=\sup\left\{\sum_{i=1}^\infty\|\nu(A_i)\|:\{A_i\}\subset\mathcal{F}\text{ 为}\Omega\text{的可数划分}\right\}, \tag{6.8}$$

称 $\|\nu\|_{\mathsf{var}}$ 为 ν 的 **全变差**, 则有

$$\|\nu\|\text{var}=\int_\Omega\|X\|d\mu. \tag{6.9}$$

6.11 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一测度空间, E 为一自反的 Banach 空间 (即 $E^{**}=E$), $X:\Omega\to E$ 为一弱 μ- 可测函数. 如果 $\forall f\in E^*$, $f(X)$ 为 μ- 可积, 则 X 为 Pettis 可积.

第四章 乘积可测空间上的测度与积分

§1 乘积可测空间

1.5 设 I 为一可数集, $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间. 若每个 $\mathcal{F}_i$ 可分, 则 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 也可分.

证明 由题意可设 $\mathcal{C}_i$ 可数且 $\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i, i\in I$. 于是由习题 1.6 得

$$\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\right).$$

从而由上式及 $\mathcal{C}_i, I$ 可数知, $\bigcup\limits_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ 可数, 故 $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i$ 可分.

1.6 设 $(\Omega_i,\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间, $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{F}_i$ 的子类, $i\in I$. 若对每个 $i\in I,\sigma(\mathcal{C}_i)=\mathcal{F}_i$, 则有 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$.

证明 显然有 $\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))\subset\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. 故要证 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i=\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 只需证 $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i\subset\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 令

$$\mathcal{G}=\left\{A=(A_i):i\in I,A_i\in\Omega_i,\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(A_i)\subset\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\right)\right\}$$

易证 $(\mathcal{C}_i,i\in I)\subset\mathcal{G}$ 且 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数. 从而有 $\sigma((\mathcal{C}_i,i\in I))\subset\sigma(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{C}_i))$. 故结论成立.

§2 乘积测度与 Fubini 定理

2.8 设 $\mathbf{R}$ 为实直线，试证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.

证明 事实上，对一切 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, 有

$$(-\infty,x]=(-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2]\in\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

而 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)=\sigma(\{(-\infty,x]:x\in\mathbf{R}^2\})$, 故 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\subset\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})$. 于是要证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ 只需证 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$. 即

$$A_1\times A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2),A_i\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),i=1,2. \tag{$*$}$$

对任意给定的 $a_2\in\mathbf{R}$, 令

$$\mathcal{G}_1=\{A_1\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):A_1\times(-\infty,a_2]\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\}.$$

易证 $\mathcal{G}_1$ 为 $\mathbf{R}$ 中 σ- 代数，且 $\{(-\infty,a_1]:a_1\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{G}_1$, 故 $\mathcal{G}_1=\mathcal{B}(\mathbf{R})$.

其次，对任给的 $A_1\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$, 令

$$\mathcal{G}_2=\{A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}):A_1\times A_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)\}.$$

易证 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathbf{R}$ 中 σ- 代数，且 $\{(-\infty,a_2]:a_2\in\mathbf{R}\}\subset\mathcal{G}_2$. 所以 $\mathcal{G}_2=\mathcal{B}(\mathbf{R})$, 这就得到了 $(*)$ 式. 又

$$\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\sigma(\{A_1\times A_2:A_i\in\mathcal{B}(\mathbf{R}),i=1,2\})\subset\mathcal{B}(\mathbf{R}^2).$$

故 $\mathcal{B}(\mathbf{R})\times\mathcal{B}(\mathbf{R})=\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$.

2.9 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 及 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 为 σ- 有限测度空间， $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则下列条件等价:

(1)$(\mu\times\nu)(E)=0$;

(2)$\mu(E^y)=0,\nu$-a.e. y;

(3)$\nu(E_x)=0,\mu$-a.e. x.

证明 由定理 2.4 得

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy).$$

而 $\nu(E_x),\mu(E^y)$ 非负，故

$$\begin{aligned}(\mu\times\nu)(E)&\Longleftrightarrow\mu(E^y)=0,\nu\text{-a.e.}y\\&\Longleftrightarrow\nu(E_x)=0,\mu\text{-a.e.}x.\end{aligned}$$

2.10 设 $(X,\mathcal{A})$ 及 $(Y,\mathcal{B})$ 为可测空间， μ_1 及 ν_1 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度， μ_2 及 ν_2 为 $(Y,\mathcal{B})$ 上的 σ- 有限测度. 若 $\nu_1\ll\mu_1$ 且 $\nu_2\ll\mu_2$, 则 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$, 且有

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}(x,y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y),\ \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}.$$

证明 $\forall E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 由习题 2.9 得

$$\begin{aligned}(\mu_1\times\mu_2)(E)=0 &\Longleftrightarrow \mu_1(E^y)=0,\ \mu_2\text{-a.e. } y\\ &\Longleftrightarrow \mu_2(E_x)=0,\ \mu_1\text{-a.e. } x.\end{aligned}$$

再由 $\nu_1\ll\mu_1$ 且 $\nu_2\ll\mu_2$ 及习题 2.9 得

$$\begin{aligned}(\mu_1\times\mu_2)(E)=0 &\Longleftrightarrow \nu_1(E^y)=0,\ \nu_2\text{-a.e. } y\\ &\Longleftrightarrow \nu_2(E_x)=0,\ \nu_1\text{-a.e. } x\\ &\Longleftrightarrow \nu_1\times\nu_2(E)=0,\end{aligned}$$

即 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$.

$\forall E=A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 由 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\int_E\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2}d(\mu_1\times\mu_2)&=\int_A\frac{d\nu_1}{d\mu_1}d\mu_1\int_B\frac{d\nu_2}{d\mu_2}d\mu_2\\ &=\int_A d\nu_1\int_B d\nu_2=\int_E d(\nu_1\times\nu_2)\\ &=\int_E\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}d(\mu_1\times\mu_2).\end{aligned}$$

故由 R-N 定理知 $\forall E=A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$,

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2},\ \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}$$

再由

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\sigma(\{A\times B: A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\})$$

立知

$$\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\frac{d\nu_2}{d\mu_2},\ \mu_1\times\mu_2\text{-a.e.}$$

2.11 设 $\sum_{m,n}a_{m,n}$ 为绝对收敛的双重级数. 试用 Fubini 定理证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}.$$

2.12 试用 Fubini 定理证明 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{x^2}{2})dx=1$.

设 $S_a=[0,a]\times[0,a]$, 显然函数 $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 在 S_a 上可积, 且由 Fubini 定理知

$$F(a)=\iint\limits_{S_a}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\left(\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2.$$

作半径为 a 和 $\sqrt{2}a$ 的 $\frac{1}{4}$ 圆 D_1 和 D_2, 它们分别含于 S_a 和包含 S_a. 由 $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}>0$ 及积分的单调性知

$$\begin{aligned}H(a)=\iint\limits_{D_1}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy&\le\iint\limits_{S_a}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy\\ &\le\iint\limits_{D_2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=G(a).\end{aligned}$$

因为

$$H(a)=\iint_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\frac{\pi}{2}(1-e^{-\frac{a^2}{2}}).$$

同理可得

$$G(a)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a^2}).$$

且有 $\lim_{a\to\infty}H(a)=\lim_{a\to\infty}G(a)=\frac{\pi}{2}$. 从而有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1.$$

2.13 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 为 σ- 有限测度空间， f 为 X 上的一非负 $\mathcal{A}$- 可测函数. 试证

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^\infty \mu([f>y])dy.$$

证明 设 λ 为 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上的 Lebesgue 测度. 令

$$E=\{(x,y)\in X\times\mathbf{R}:0\le y<f(x)\}.$$

则 $\lambda(E_x)=f(x)$. 于是由 Fubini 定理得

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_X\lambda(E_x)\mu(dx)=\int_{\mathbf{R}}\mu(E^y)\lambda(dy)=\int_0^\infty\mu([f>y])dy.$$

2.14 设 $f(t)$ 及 $g(t)$ 为 $[0,\infty]$ 上的两个右连续增函数. 我们用 μ_f 及 μ_g 分别表示它们在 $[0,\infty]$ 上诱导出的测度 (见第一章定理 5.4). 试证：对 $0\le a<b<\infty$, 有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds),$$

其中 $g(s-)=\lim_{t\uparrow\uparrow s}g(t)$(记号 $t\uparrow\uparrow s$ 表示 $t\to s$, 且 $t<s$).

证明 令 $E=(a,b]\times(a,b]$, 则有

$$E=\{(x,y):a<x\le y\le b\}\cup\{(x,y):a<y<x\le b\}\triangleq E_1+E_2.$$

显然 $E_1,E_2\in\mathcal{B}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$. 再由 Fubini 定理得

$$(\mu_f\times\mu_g)(E_1)=\int_{E_1}d(\mu_f\times\mu_g)=\int_a^b\left(\int_X I_{(a,b]}d\mu_f\right)d\mu_g=\int_a^b(f(y)-f(a))d\mu_g.$$

同理可得 $(\mu_f\times\mu_g)(E_2)=\int_a^b(g(x-)-g(a))d\mu_f$. 而

$$(\mu_f\times\mu_g)(E)=\mu_f((a,b])\mu_g((a,b])=(f(b)-f(a))(g(b)-g(a)).$$

又 $(\mu_f\times\mu_g)(E)=(\mu_f\times\mu_g)(E_1)+(\mu_f\times\mu_g)(E_2)$. 故

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)+\int_a^b g(s-)\mu_f(ds).$$

2.15 设 $f\in L^1(\mathbf{R})$, $g\in L^p(\mathbf{R})$, 则有下列结论：

(1)$(x,t)\mapsto f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$- 可测，且 Lebesgue 可积；

(2) 对 a.e. $x, t\mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

定义 f 与 g 的 **卷积** 如下： $\forall x\in\mathbf{R}$, 令

$$f*g(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt, & \text{可积情形},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

则 $f*g\in L^p(\mathbf{R})$, 且有如下的 **Young不等式**： $\|f*g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p$.

(3) 若 g 有界，则 $f*g$ 连续.

证明 (1) 显然 $f(x-t)g(t)^p$ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$ 可测. 由 Fubini 定理及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{\mathbf{R}^2}f(x-t)g(t)^pdxdt\right|&\le\iint\limits_{\mathbf{R}^2}|f(x-t)||g(t)|^pdxdt\\ =\int_{\mathbf{R}}|g(t)|^p\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)|dx\right)dt&=\|f\|_1\|g\|_p^p<\infty,\end{aligned}$$

即 $f(x-t)g(t)^p$ 为 Lebesgue 可积.

(2) 取 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbf{R}}f(x-t)g(t)dt\right|&\le\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)|^{\frac{1}{q}}|f(x-t)|^{\frac{1}{p}}|g(t)|dt\\&\le\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)|dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)||g(t|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\\&\le\|f\|_1^{\frac{1}{q}}\|f\|_1^{\frac{1}{p}}\|g\|_p<\infty.\end{aligned}$$

所以对 a.e. x, $t\mapsto f(x-t)g(t)$ 为 Lebesgue 可积.

往证 Young 不等式.

第一步：令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^1$, $g\in L^p$, $h\in L^q$, 且 $f,g,h\ge0$, 则由 Fubini 定理得

$$\int_{\mathbf{R}}h(x)\left(\int_{\mathbf{R}}f(x-y)g(y)dy\right)dx=\int_{\mathbf{R}}g(y)\left(\int_{\mathbf{R}}f(x-y)h(x)dx\right)dy\le\|g\|_p\|f\|_1\|h\|_q.$$

又因 $(L^q)^*=L^p$, 且 $h\in L^q$ 则有

$$\|f*g\|_p=\sup_{\|h\|_q\le1}\left|\int_{\mathbf{R}}f*g(x)h(x)dx\right|\le\|f\|_1\|g\|_p.$$

第二步：令 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$, $f\in L^p$, $g\in L^q$, $r'=\frac{r}{r-1}$, 则 $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=1$, $r\ge1$. 所以对任意 $h\in L^r(r\ge1)\Rightarrow h\in L^1\cap L^r$. 故由 Fubini 定理得

$$\int_{\mathbf{R}}h(x)\left(\int_{\mathbf{R}}f(x-y)g(y)dy\right)dx=\int_{\mathbf{R}}g(y)\left(\int_{\mathbf{R}}f(x-y)h(x)dx\right)dy\le\|g\|_q\|\widetilde{f}*h\|_{q'}.$$

其中 $\widetilde{f}$ 为 f 的 Fourier 变换 $\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{-ixy}f(y)dy$, 且

$$\|\widetilde{f}*h\|_{q'}\le\|\widetilde{f}\|_p\|h\|_{r'},\ \int_{\mathbf{R}}h(x)(f*g)(x)dx\le\|g\|_q\|\widetilde{f}\|_p\|h\|_{r'}.$$

但 $\|\widetilde{f}\|_p=\|f\|_p$. 由 h 的任意性得

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}.$$

综上所述有结论成立.

(3) 设 $|g(t)|\le M$, 则第三章习题 4.24 得

$$\begin{aligned}|f*g(x)-f*g(x_0)|&=\left|\int_{\mathbf{R}}(f(x-t)-f(x_0-t))g(t)dt\right|\\&\le\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)-f(x_0-t)||g(t)|dt\\&\le M\int_{\mathbf{R}}|f(x-t)-f(x_0-t)|dt\\&\le M\|f_x-f_{x_0}\|\to 0,\end{aligned}$$

即 $f*g$ 为连续函数.

2.16(**Steinhaus引理**) 设 E 为 $\mathbf{R}$ 的一 Borel 子集, 令 $D(E)=\{x-y:x,y\in E\}$, 若 E 的 Lebesgue 测度 $\lambda(E)>0$, 则 $D(E)$ 包含一含原点的开区间.

证明 因 λ 为 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 上 σ- 有限测度, 故可设 $0<\lambda(E)<\infty$. 令

$$x+E\triangleq\{x+y:y\in E\},\qquad -E\triangleq\{-x:x\in E\}.$$

$$F(x)\triangleq\lambda(E\cap(x+E))=\int_{E\cap(x+E)}dy=\int_{\mathbf{R}}I_{-E}(x-y)I_E(y)dy=I_{-E}*I_E(x).$$

上面第三个等式用到这样一个事实: $y\in E\cap(x+E)\iff y\in E$且 $x-y\in -E$. 由习题 2.15(3) 知 $F(x)$ 连续, 且 $F(0)=\lambda(E)>0$. 则存在 $\delta>0$, s.t. $FI_{(-\delta,\delta)}>0$. 从而有 $\forall x\in(-\delta,\delta)$, $\lambda(E\cap(x+E))>0$. 故 $E\cap(x+E)\ne\emptyset$, $x\in D(E)$, 即 $(-\delta,\delta)\subset D(E)$.

2.17(Steinhaus 引理的推广) 设 A,B 为 $\mathbf{R}$ 的两个 Borel 子集, 令 $D(A,B)=\{y-z:y\in A,z\in B\}$, 若 $\lambda(A)>0$, 且 $\lambda(B)>0$, 则 $D(A,B)$ 包含一非空开区间.

证明 与习题 2.16 同理, 设 $0<\lambda(A)<\infty$, $0<\lambda(B)<\infty$. 令 $F(x)=\lambda(A\cap(x+B))$. 因 $y\in A\cap(x+B)\iff y\in A,$且$x-y\in -B$. 故

$$F(x)=\int_{A\cap(x+B)}dy=I_{-B}*I_A(x).$$

由 Fubini 定理得 $\int_{\mathbf{R}}F(x)dx=\lambda(A)\lambda(B)>0$, 即 $\exists x_0\in\mathbf{R}$, s.t. $F(x_0)>0$. 再由习题 2.15(3) 知 $F(x)$ 连续, 故 $\exists\delta>0$, s.t. $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset D(A,B)$.

2.18 设 $f(x,y)$ 为定义于 $V=(a,b)\times(c,d)$ 上的一实值连续函数. 如果 f 满足下列条件:

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 V 上存在且连续;

(2) 对某个 $x_0\in(a,b)$, $\frac{d}{dy}[f(x_0,y)]$ 对一切 $y\in(c,d)$ 存在;

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在 V 上存在且连续,

则 $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在 V 上存在, 且有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

证明 任意固定 $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$, 由 Fubini 定理得

$$f(\overline{x},\overline{y})-f(x_0,\overline{y})-f(\overline{x},y_0)+f(x_0,y_0)=\int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy.$$

故有

$$\frac{f(\overline{x},\overline{y})-f(\overline{x},y_0)}{\overline{y}-y_0}=\frac{f(x_0,\overline{y})-f(x_0,y_0)}{\overline{y}-y_0}+\frac{\int_{y_0}^{\overline{y}}\int_{x_0}^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dxdy}{\overline{y}-y_0}.$$

令 $\overline{y}\to y_0$, 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},y_0)=\frac{d}{dy}f(x_0,y_0)+\int_{X_0}^{\overline{x}}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y_0)dx. \qquad (*)$$

由 y_0, x 的任意性得 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 V 上存在. 再由 $(*)$ 式得

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_0)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y_0)dx.$$

从而有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y_0).$$

§3 由 σ- 有限核产生的测度

3.5(Fubini 定理的推广形式) 设 K 为从 $(X,\mathcal{A})$ 到 $(Y,\mathcal{B})$ 的一个 σ- 有限核, μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ- 有限测度, μK 为 (3.2) 定义的测度. 若 f 为 $X\times Y$ 上一 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$- 可测函数, 它关于 μK 可积 (相应地, 积分存在), 则有下列结论:

(1) 对 μ-a.e. x, f_x 关于 $K(x,\cdot)$ 可积 (相应地, 积分存在) ;

(2) $\forall x\in X$, 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x(y)K(x,dy), & \text{可积 (相应地, 积分存在) 情形},\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}$$

则 I_f 为 μ- 可积 (相应地, 积分存在), 且有

$$\int_{X\times Y}fd(\mu K)=\int_X I_f(x)\mu(dx).$$

3.6 设 $(X_j,\mathcal{A}_j)$, $j=1,\cdots,n$ 为可测空间, μ_1 为 $(X_1,\mathcal{A}_1)$ 上的一 σ- 有限测度. 对每个 $2\le i\le n$, 设 $K(x_1,\cdots,x_{i-1},dx_i)$ 为从 $(\prod_{j=1}^{i-1}X_j,\prod_{j=1}^{i-1}\mathcal{A}_i)$ 到 $(X_i,\mathcal{A}_i)$ 的一个 σ- 有限核.

(1) 在 $(\prod_{j=1}^{n}X_j,\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j)$ 上存在唯一的测度 μ, 使得对一切可测矩形 $\prod_{j=1}^{n}A_j\in\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}_j$ 有

$$\mu(\prod_{j=1}^{n}A_j)=\int_{A_1}\mu_1(dx_1)\cdots\int_{A_n}K(x_1,\cdots,x_{n-1},dx_n).$$

此外， μ 是 σ- 有限测度.

(2) 设 f 为 $(\prod_{j=1}^n X_j, \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j)$ 上的非负可测函数，则有

$$\int f d\mu = \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} K(x_1, dx_2) \cdots \int_{X_{n-1}} K(x_1, \cdots, x_{n-2}, dx_{n-1})$$
$$\int_{X_n} f(x_1, \cdots, x_n) K(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

3.7 设 K_1, K_2 为从 $(X, \mathcal{A})$ 到 $(Y, \mathcal{B})$ 的 σ- 有限核， μ_1, μ_2 为 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度．为要 $\mu_1 K_1$ 关于 $\mu_2 K_2$ 绝对连续，必须且只需 μ_1 关于 μ_2 绝对连续，且对 μ_1-a.e. $x \in X$, $K_1(x, \cdot)$ 关于 $K_2(x, \cdot)$ 绝对连续．此外，这时有

$$\frac{d(\mu_1 K_1)}{d(\mu_2 K_2)}(x, y) = \frac{dK_1(x, \cdot)}{dK_2(x, \cdot)}(y) \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x).$$

§4 无穷乘积空间上的概率测度

4.3 设 $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i), i \in I\}$ 为一族概率空间，令 $\mathcal{P}_0(I)$ 表示 I 的非空有限子集全体，则在 $(\prod_{i\in I} \Omega_i, \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i)$ 上存在唯一的概率测度 P, 使得对任何 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, 有

$$P\left(\prod_{i\in S} A_i \times \prod_{i \in I\setminus S} \Omega_i\right) = \prod_{i \in S} P_i(A_i),\ A_i \in \mathcal{F}_i,\ i \in S.$$

证明 当 I 为有限或可数集时，由系 4.2 Kolmogrov 定理可证得结论成立．下面只考虑 I 为不可数情形．

对一切 $A \in \prod\limits_{i\in I} \mathcal{F}_i$, 由 $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcup\limits_{\substack{I_c \subset I \\ I_c\text{可数}}} \mathcal{F}_{I_c} \times \Omega_{I \setminus I_c}$ 得：存在 $I_c \setminus \subset I$ 可数集，使得

$$A = A_{I_c} \times \Omega_{I\setminus I_c},\ \ A_{I_c} \in \mathcal{F}_{I_c}.$$

再由 Kolmogrov 定理知在 $(\Omega_{I_c}, \mathcal{F}_{I_c})$ 上存在唯一的无穷乘积概率测度 P_{I_c}. 定义

$$P_I(A) = P_{I_c}(A_{I_c}).$$

易证 $P_I(A)$ 的值与 A 的无关， P_I 具有 σ- 可加性，由测度扩张定理知是唯一的.

4.4 试将定理 4.1 推广到任意无穷多个可测空间乘积情形.

内容 设 $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)_{j\in I}$ 为一族可测空间， $\Omega = \prod\limits_{j \in I} \Omega_j$, $\mathcal{F} = \prod\limits_{j\in I} \mathcal{F}_j$. 固定 $j_0 \in I, P_{j_0}$ 为 $(\Omega_{j_0}, \mathcal{F}_{j_0})$ 上的概率测度．令 $S \in I \setminus \{j_0\}$ 且 $S \in \mathcal{P}_0(I)$, $|s| = t$, $P(\omega_{j_0}, \omega_{j_1}, \cdots, \omega_{j_{t-1}}, d\omega_{j_t})$ 为从 $(\Omega_{j_0} \times \prod\limits_{j \in S\setminus\{j_0\}} \Omega_j, \mathcal{F}_{j_0} \times \prod\limits_{j\in S\setminus\{j_0\}} \mathcal{F}_j)$ 到 $(\Omega_{j_0}, \mathcal{F}_{j_0})$ 的一个概率核，则存在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的唯一概率测度 P, s.t. 对一切 $S \in \mathcal{P}_0(I)$ 有

$$P(B^S \times \prod_{i \in I\setminus S} \Omega_i) = P_S(B^S).$$

其中 P_S 为 $\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i$ 上如下定义的概率测度：

$$P_S(B^S)=\int_{\Omega_{j_0}}P_{j_0}(d\omega_{j_0})\int_{\Omega_{j_1}}P(\omega_{j_0},d\omega_{j_1})\cdots\int_{\Omega_{j_{t-1}}}P(\omega_{j_0},\cdots,d\omega_{j_{t-1}})$$
$$\int_{\Omega_{j_t}}I_{B^S}(\omega_{j_0},\cdots,\omega_{j_t})P(\omega_{j_0},\cdots,\omega_{j_{t-1}},d\omega_t).$$

$S\triangleq\{j_0,\cdots,j_t\}\subset\mathcal{P}_0(I)$.

证明 第一步：设 $S_1\subset S_2$ 且 $S_i\in\mathcal{P}_0(I)$, $i=1,2$ 有

$$P_{S_2}\left(B^{S_1}\times\prod_{i\in S_2\setminus S_1}\Omega_i\right)=P_{S_1}(B^{S_1}),$$

即 P 在 $\mathcal{C}\triangleq\left\{B^S\times\prod\limits_{i\in I\setminus S}\Omega_i:S\in\mathcal{P}_0(I)\right\}$ 上是唯一确定的.

第二步：令 $\mathcal{F}^S\triangleq\left\{B^S\times\prod\limits_{i\in I\setminus S}\Omega_i:B^S\in\prod\limits_{i\in S}\mathcal{F}_i\right\}$, 则 $\mathcal{F}^{S_1}\subset\mathcal{F}^{S_2}(S_1\subset S_2)$, 且 $\bigcup\limits_{S\subset I}\mathcal{F}^S=\mathcal{C},\mathcal{C}$ 为代数， P 在 $\mathcal{F}^S$ 上为概率测度. 则通过插入 Ω_j 的形式知 P 在 $\mathcal{C}$ 上是有限可加的.

第三步：按本书中证明 $\forall|S_n|=t_n,A_n=B^{S_n}\times\prod\limits_{i\in I\setminus S_n}\Omega_i$, $A_n\downarrow\emptyset$. 若 $S_n\in\mathcal{P}_0(I)$, $S_n\uparrow$, 则总存在 $(\overline{\omega}_{j_1},\cdots,\overline{\omega}_{j_{t_n}})\in B^{S_n}$. 令 $\omega=(\omega_i)_{i\in I}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset(i=j_i,\omega_i=\overline{\omega}_{j_i})$, 进而得到 P 为 $\mathcal{C}$ 上的概率测度.

由测度扩张定理得结论成立.

第七章 概率论基础选讲

§1 事件和随机变量的独立性

1.10 设 $(X_n,n\geq1)$ 为独立随机变量序列，则

(1)$\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 与 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 为退化随机变量 (即 a.s. 等于某一常数)；

(2) 为要 $P(X_n\to0)=1$, 必须且只需对任何 $C>0$, 有 $\sum\limits_n P(|X_n|>C)<\infty$.

证明 因为

$$\liminf_{m\to\infty}X_m=\lim_{m\to\infty}\inf_{k\geq m}X_k=\lim_{m\to\infty}\inf_{k\geq m}X_{n+k}=\liminf_{m\to\infty}X_{n+m},\ n=1,2,\cdots.$$

而 $\liminf\limits_{m\to\infty}X_{n+m}$ 是关于 $\sigma(X_j,j>n)$ 的可测函数，因而 $\liminf\limits_{m\to\infty}X_m$ 是 $X_1,X_2,\cdots$ 的尾事件.

又 $(X_n,n\geq1)$ 独立，故由定理 1.9 知 $\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 为退化随机变量.

同理可证得 $\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 亦为退化随机变量.

(2) 根据 a.s. 收敛的判别条件,

$$X_n\xrightarrow{a.s.}0\Leftrightarrow\forall C>0,P(|X_n|>C,\ \text{i.o.})=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k|>C\}\right)=0.$$

由题设知 $\{|X_n|>C\}, n=1,2,\cdots$ 为独立事件,所以据 Borel-Cantelli 引理,当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>C)<\infty$.

1.11 设 $(X_n,\ 1\le i\le n)$ 为独立随机变量序列．若每个 X_i 非负或每个 X_i 可积，则有 $E[\prod_{i=1}^n X_i]=\prod_{i=1}^n E[X_i]$.

证明 只需证 $n=2$ 的情形.

(1) 设 X_1 及 X_2 都是非负简单函数的情形：

$$X_1=\sum_i x_i I_{A_i},\quad X_2=\sum_k y_k I_{B_k},\quad A_i,B_k\in\mathcal{F},\ i,k=1,2,\cdots.$$

因为 $A_i=\{X_1=x_i\},\ B_k=\{X_2=y_k\}$, 且由 X_1 与 X_2 独立知 $P(A_iB_k)=P(A_i)P(B_k)$. 故

$$E(X_1X_2)=\sum_{i,k}x_iy_kP(A_iB_k)=\sum_{i,k}x_iy_kP(A_i)P(B_k)=E(X_1)E(X_2).$$

(2) 当 X_1,X_2 为非负可积随机变量时，考虑简单函数

$$X_n=\sum_{j=1}^{n2^n}\frac{j-1}{2^n}I_{\{\frac{j-1}{2^n}\le X_1<\frac{j}{2^n}\}}+nI_{\{n\le X_1\}},$$

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}I_{\{\frac{k-1}{2^n}\le X_2<\frac{k}{2^n}\}}+nI_{\{n\le X_2\}}.$$

因为 X_1 与 X_2 独立，由定义知 X_n 和 Y_n 独立．故由 (1) 得，必有 $E(X_nY_n)=E(X_n)E(Y_n)$. 但 $0\le X_n\uparrow X_1,\ 0\le Y_n\uparrow X_2$, 故 $0\le X_nY_n\uparrow X_1X_2$. 令 $n\to\infty$, 用单调收敛定理于 $E(X_nY_n)=E(X_n)E(Y_n)$ 得 $E(X_1Y_1)=E(X_1)E(Y_1)$.

(3) 对于一般情形．由 X_1 与 X_2 的独立知 X_1^+ 或 X_1^- 或 $|X_1|$ 与 X_2^+ 或 X_2^- 或 $|X_2|$ 相互独立．而它们都是非负可积随机变量，从而由 (2) 得 $E|X_1X_2|=E|X_1|E|X_2|$, 所以 X_1X_2 可积．此外

$$\begin{aligned}E(X_1X_2)=&E(X_1^+-X_1^-)(X_2^+-X_2^-)\\=&E(X_1^+X_2^+)-E(X_1^+X_2^-)-E(X_1^-X_2^+)+E(X_1^-X_2^-)\\=&E(X_1)E(X_2).\end{aligned}$$

1.12 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为独立实值随机变量序列， $(g_n,n\ge 1)$ 为一列 Borel 可测函数，则 $(g_n(X_n),n\ge 1)$ 为独立随机变量序列.

证明 (1) 首先证 $n=2$ 的情形．对任何 $B=B_1\times B_2\in\mathcal{B}^2$, 由 X_1,X_2 的独立性知

$$\begin{aligned}P(g_1(X_1)\in B_1,\ g_2(X_2)\in B_2)=&P(X_1\in g_1^{-1}(B_1),X_2\in g_2^{-1}(B_2))\\=&P(X_1\in g_1^{-1}(B_1))P(X_2\in g_2^{-1}(B_2))\\=&P(g_1(X_1)\in B_1)P(g_2(X_2)\in B_2),\end{aligned}$$

即 $g_1(X_1)$ 与 $g(X_2)$ 独立.

(2) 由 (1) 可证得对任意有限的 n, 均有 $(g_k(X_k),1\le k\le n)$ 为独立随机变量序列.

(3) 利用数学归纳法易证得 $(g_n(X_n),n\ge 1)$ 为独立随机变量序列.

1.15 设 $(X_n,n\ge 1)$ 为独立同分布 (i.i.d.) 随机变量序列，每个 X_n 服从参数为 1 的指数分布 (即 $P(X_n>x)=e^{-x},x\ge 0$). 证明：

(1) $P(X_n > \alpha \log n,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & 若\alpha > 1, \\ 1, & 若\alpha \leq 1; \end{cases}$

(2) 令 $L = \limsup\limits_{n\to\infty}(X_n/\log n)$, 则 $P(L=1)=1$.

证明 由题设得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \alpha \log n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

从而由级数收敛的判别准则知

(i) 当 $\alpha > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$;

(ii) 当 $\alpha \leq 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$;

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > \alpha \log n) \begin{cases} < \infty, & \alpha \geq 1, \\ = \infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

再由 Borel 0-1 律知

$$P(X_n > \alpha \log n,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & \alpha \geq 1, \\ 1, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知

$$P(X_n/\log n > \alpha,\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & \alpha \geq 1, \\ 1, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

于是有

$$P(L > 1) = 0,\ \ 且\ P(L > \alpha) = 1,\ \alpha \leq 1.$$

而

$$P(L \geq 1) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{L > 1 - \frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(L > 1 - \frac{1}{n}) = 1.$$

故 $P(L=1) = P(L\geq 1) - P(L>1) = 1$.

1.16 设 $(X_n, n\geq 1)$ 为 i.i.d. 标准正态随机变量序列. 证明：

(1) $P(X_n > \alpha\sqrt{2\log n},\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 0, & 若\ \alpha > 1, \\ 1, & 若\ \alpha \leq 1; \end{cases}$

(2) 令 $L = \limsup\limits_{n\to\infty}(X_n/\sqrt{2\log n})$, 则 $P(L=1)=1$.

§2 条件数学期望与条件独立性

2.19 设 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数， $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. 为要 $Y = E[X|\mathcal{G}]$, 必须且只需 $EX = EY$ 且对生成 $\mathcal{G}$ 的某 π- 类 $\mathcal{C}$ 中的所有集合 A 有 $E[XI_A] = E[YI_A]$.

证明 必要性：设 $Y = E[X|\mathcal{G}]$, 显然有 $EX = EY$, 且由条件数学期望的定义有 $E[XI_A] = E[YI_A]$, $\forall A \in \mathcal{G}$. 更有 $E[XI_A] = E[YI_A]$, $\forall A \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$.

充分性：令

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{G} : E[XI_A] = E[YI_A]\}.$$

由题设有 $\mathcal{C}\subset\mathcal{M}$. 再由 $EX=EY$ 易证 $\mathcal{M}$ 为 λ 类. 又 $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{G}$, 且 $\mathcal{C}$ 为 π- 类，故有

$$E[XI_A]=E[YI_A],\ \ \forall A\in\mathcal{G},$$

即 $Y=E[X|\mathcal{G}]$.

2.20 设 $X,Y\in L^1(\Omega,\mathcal{B},P)$. 若 $E[X|Y]=Y$, a.s. $E[Y|X]=X$, a.s., 则 $X=Y$, a.s..

2.21 设 $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数，则

$$E(E[X|\mathcal{G}]-X)^2=\inf\{E(Y-X)^2:Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P)\}.$$

证明 注意到

$$\begin{aligned}E(Y-X)^2=&E(Y-E(X|\mathcal{G})+E(X|\mathcal{G})-X)^2\\=&E(X-E(X|\mathcal{G}))^2+E(Y-E(X|\mathcal{G}))^2+2E[(E(X|\mathcal{G})-X)(Y-E(X|\mathcal{G}))]\\\geq&E(X-E(X|\mathcal{G}))^2.\ \ (\text{利用}Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)).\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $Y=E(X|\mathcal{G})$. 再由下确界的定义即知结论成立.

2.22 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数， $g(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上非负或有界 Borel 可测函数. 若 X 为 $\mathcal{G}$- 可测的，则

$$E[g(X,Y)|\mathcal{G}]=\xi(X),\ \text{a.s.}$$

其中 $\xi(X)=E[g(x,Y)|\mathcal{G}]$.

2.23 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量， $f(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的非负或有界 Borel 可测函数，令 $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 X 与 $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2$ 独立， Y 关于 $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2$ 可测，则有

$$E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1]=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_2]=E[f(X,Y)|\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2],\ \text{a.s.}.$$

2.24 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的实值随机变量， $\mathcal{G}_1$ 及 $\mathcal{G}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 X 与 Y 及 $\mathcal{G}_2$ 独立， Y 与 $\mathcal{G}_1$ 独立，则有

$$E[XY|\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2]=E[X|\mathcal{G}_1]E[Y|\mathcal{G}_2].$$

证明 利用乘积之间的构造及二元可测函数的构造和函数形式的单调类定理即得结论对非负或有界 Borel 可测函数成立，且对任意非负可测函数 f, 由

$$f=\lim_{n\to\infty}f\wedge n$$

即得结论成立. 再由

$$f=f^+-f^-$$

即得对任意 Borel 可测函数成立.

2.25 设 ξ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一实值随机变量， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一子 σ- 代数， $A\in\mathcal{G}$. 令 $\mathcal{H}=\sigma(A\cap\mathcal{G})$. 如果 ξI_A 关于 $\mathcal{G}$ σ- 可积，则 ξI_A 关于 $\mathcal{H}$ σ- 可积，且有

$$E[\xi I_A|\mathcal{G}]=E[\xi I_A|\mathcal{H}],\ \text{a.s.}.$$

证明 因 ξI_A 关于 $\mathcal{G}$ σ- 可积，故存在 $\Omega_n\in\mathcal{G}$, $\Omega_n\uparrow\Omega$, 使得 $\xi I_A I_{\Omega_n}$ 可积. 此时令

$$\overline{\Omega}_n=\Omega_n\cap A.$$

则 $\overline{\Omega}_n\in\mathcal{H}$, $\overline{\Omega}_n\uparrow A$, 且 $\xi I_A I_{\overline{\Omega}_n}=\xi I_A I_{\Omega_n}$ 可积. 从而 ξI_A 关于 $\mathcal{H}$ σ- 可积. $\forall B\in\mathcal{G}$, 由条件期望的定义得

$$\int_B E(\xi I_A|\mathcal{G})dP=\int_B \xi I_A dP=\int_{A\cap B}\xi I_A dP=\int_{A\cap B}E[\xi I_A|\mathcal{H}]dP.$$

再由 R-N 定理得

$$E[\xi I_A|\mathcal{G}]=E[\xi I_A|\mathcal{H}],\ \text{a.s.}.$$

§5 随机变量族的一致可积性

5.10 设 (ξ_n) 为一致可积随机变量序列，则有

$$\lim_{n\to\infty}E[\frac{1}{n}\sup_{1\le k\le n}|\xi_k|\ ]=0.$$

5.11 设 $\mathcal{H}\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, 若 $\mathcal{H}$ 满足如下条件:

$$A_n\in\mathcal{F},A_n\downarrow\emptyset\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP=0,$$

则对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$A\in\mathcal{F},P(A)<\delta\Rightarrow\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_A|\xi|dP\le\epsilon.$$

证明 (反证法) 假设存在 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$A_n\in\mathcal{F},P(A_n)<\frac{1}{2^n},\ \text{但}\ \sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP>\epsilon_0.$$

记 $A=\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$, 则

$$P(A)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathcal{H}}\int_{A_n}|\xi|dP\ge\varepsilon_0$$

与题设矛盾，故结论成立.

5.12 设 $\mathcal{H}_1$ 及 $\mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族. 令

$$\mathcal{H}=\{\xi_1+\xi_2:\xi_1\in\mathcal{H}_1,\ \xi_2\in\mathcal{H}_2\},$$

则 $\mathcal{H}$ 为一致可积族.

证明 (利用一致可积性准则定理 5.2)

由于 $\xi_i\in\mathcal{H}_i,i=1,2$ 及 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 为一致可积随机变量族，则有

(i) $a_i=\sup\{E|\xi_i|:\xi_i\in\mathcal{H}_i\}<\infty,\ i=1,2;$

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对 $P(A)<\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$ 有

$$\sup_{\xi_i\in\mathcal{H}_i}\int_A|\xi_i|dP<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2.$$

此时有

$$\begin{aligned}a=&\sup\{E|\xi_1+\xi_2|:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}\\ \le&\sup\{E|\xi_1|+E|\xi_2|:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}\\ \le&\sup\{E|\xi_1|:\xi_1\in\mathcal{H}_1\}+\sup\{E|\xi_2|:\xi_2\in\mathcal{H}_2\}<\infty.\end{aligned}$$

且对上述 $\varepsilon>0,\delta>0$, 满足 $P(A)<\delta$ 的 $A\in\mathcal{F}$ 有

$$\sup_{\substack{\xi_1\in\mathcal{H}_1\\ \xi_2\in\mathcal{H}_2}}\int_A|\xi_1+\xi_2|dP\le\sup_{\substack{\xi_1\in\mathcal{H}_1\\ \xi_2\in\mathcal{H}_2}}\int_A(|\xi_1|+|\xi_2|)dP\le\sup_{\xi_1\in\mathcal{H}_1}\int_A|\xi_1|dP+\sup_{\xi_2\in\mathcal{H}_2}\int_A|\xi_2|dP<\varepsilon.$$

于是由一致可积性准则知

$$\mathcal{H}=\{\xi_1+\xi_2:\ \xi_1\in\mathcal{H}_1,\xi_2\in\mathcal{H}_2\}$$

为一致可积族.

33. 设 $\{X_n,\mathcal{F}_n\}$ 为鞅， $EX_n^2<\infty,T$ 为有限停时，且

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|dP=0(\text{或}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|^2dP<\infty)$$

则 $(X_0=0)$

$$EX_T^2=E\sum_{n=1}^{T}(X_n-X_{n-1})^2.$$

证明：令 $Z_n=X_n^2-\sum_{k=1}^n E((X_k-X_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1})$, ($\mathcal{F}_0$ 为平方 σ 域), 则 $\{Z_n,\mathcal{F}_n\}$ 为鞅， $Z_1=0$. 由

$$EZ_{T\wedge n}=EZ_1=0$$

$$EX_{T\wedge n}^2=E\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k-X_{k-1})^2$$

$$EX_T^2\le\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}^2=E\sum_{k=1}^{T}(X_k-X_{k-1})^2$$

$EX_T^2=\infty$ 时等式即成立, 因此可设 $EX_T^2<\infty$. 这时由第 30 题 (注意, 用 $Cauchy-Schwarz$ 不等式, 由 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}X_n^2dP<\infty$ 可控制 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{T>n\}}|X_n|dP=0$), X_T 右闭鞅 $\{X_{T\wedge n},\mathcal{F}_n\}$ 从而

$$E(X_T^2|\mathcal{F}_n)\ge X_{T\wedge n}^2,EX_T^2\ge EX_{T\wedge n}^2,$$

总之

$$EX_T^2=\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}^2==E\sum_{k=1}^{T}(X_k-X_{k-1})^2.$$

34. 设为上鞅或鞅为停时则为右闭上鞅或右闭鞅的充要条件为

证明充分性只要证一致可积

CDJF

CEDU YU JIFEN

测度与积分

严加安 著



陕西师范大学出版社

测度与积分

严加安 著

陕西师范大学出版社

测 度 与 积 分

严加安 编著

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大 120 信箱）

陕西省新华书店经销

西安电子科技大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.125 插页 2 字数 173 千字

1988 年 7 月第 1 版 1988 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN7-5613-0094-8

G·101 定价：1.70 元

前　言

本书是中国科学院应用数学研究所为概率论专业的研究生编写的一部测度论教材。近几年来，作者在对研究生讲授测度论的过程中，发现如果选材和处理得当，测度论是很容易被学生掌握的，这使作者产生了编写测度论教材的想法。在编写过程中，作者进一步发现：某些经典结果可以被改进，或证明可以被简化。此外，作者还对测度论的某些问题进行了研究，获得了一些结果(如：单调类定理的一般形式，*Riesz* 表现定理的推广和新版本，条件期望的最一般定义)，这些结果也收进了本教材。

本书内容大致可分为三部分：(1) 一至四章讨论抽象可测空间中的测度与积分。这一部分内容可作大学数学专业测度论选修课教材；(2) 第五章系统而完整地介绍了 Hausdorff空间中的测度和积分。这一部分主要参考了 *Cohn*的"Measure Theory"．我们对 Riesz 表现定理的证明作了适当改进(利用 Daniell-Stone定理)，这一改进允许我们将该定理推广到一般 Hausdorff 空间情形和给出它的一个新版本；(3) 第六章介绍了测度的收敛(包括弱收敛和淡收敛)，第七章介绍了与测度论有关的一些重要的概率论基础问题，如条件期望，正则条件概率，一致可积性及解析集等。这一部分内容对概率论专业的研究生尤为重要。

本书每一节都附有一定数量的习题，其中许多习题是对正文的必要补充，有些还被后面的章节引用。

作者衷心感谢陕西师范大学出版社对本书的写作和出版给予的大力支持和鼓励，感谢编辑张炜同志为本书能尽快和读者见面所付出的辛勤劳动。

在本书写作期间作者得到了中国科学院科研基金的资助，特此鸣谢。

严加安

1988年元月于北京

内 容 简 介

本书系统介绍了抽象测度和积分理论，*Hausdorff*空间上的测度与积分以及测度的弱收敛和淡收敛。此外，书中还介绍了与测度论有关的概率论基础问题，如正则条件概率，一致可积性及解析集等。本书可作为概率论专业研究生教材。部分章节对概率论研究工作者也颇有参考价值。

目　录

第一章　集类与测度

§1　集合运算与集类

集合的概念是现代数学的最基本的概念，它是众所周知的。一般说来，任何一组彼此可以区别的事物便构成一个**集合**。在测度论中，我们通常在某一(或某些)给定的集合(称为**空间**)中讨论问题。

1.1　令 Ω 为一给定的非空集合，其元素以 ω 记之。设 A 为 Ω 的**子集**，我们用 $\omega\in A$ 或 $\omega\notin A$ 分别表示 ω 属于 A 或不属于 A。不含任何元素的集称为**空集**，以 ϕ 记之。设 B 是 A 的子集，则用 $A\supset B$ 或 $B\subset A$ 表示。我们分别用

$$A\cap B,\ A\cup B,\ A\backslash B,\ A\triangle B$$

表示 A 与 B 的**交**、**并**、**差**和**对称差**，即

$$A\cap B=\{\omega:\ \omega\in A\text{ 且 }\omega\in B\},\ A\cup B=\{\omega:\ \omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\},$$

$$A\backslash B=\{\omega:\ \omega\in A\text{ 且 }\omega\notin B\},\ A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

我们用 A^c 表示 $\Omega\backslash A$，并称 A^c 为 A(在 Ω 中)的**余集**。于是有 $A\backslash B=A\cap B^c$。有时也用 AB 表示 $A\cap B$。若 $A\cap B=\phi$，称 A 与 B **互不相交**，这时也用 $A+B$ 表示 $A\cup B$。显然有 $A\cap A^c=\phi$，$A+A^c=\Omega$。

1.2　集合运算交和并显然满足如下的**交换律**、**分配律**及**结合律**：

$$A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A;$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

此外，它们关于余集运算有如下的 ***De Morgan*** **公式**

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$，$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A^C)^C=A$。

1.3 以Ω的某些子集为元素的集合称为(Ω上的)**集类**。今后，如无特别说明，总假定集类是非空的，即至少含一个元素(可以是空集)。设$\{A_i, i\in I\}$为一集类，其中I为**指标集**，它用以给集类元素“编号”，则我们可以定义集类中元素的交及并：

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{\omega: \omega\in A_i, \text{对一切 } i\in I\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{\omega: \omega\in A_i, \text{对某一 } i\in I\}.$$

读者可以自行写出相应的交换律、分配律、结合律及De Morgan公式。

1.4 设$\{A_n, n\geqslant 1\}$为一集合序列。若对每个n，有$A_n\subset A_{n+1}$(相应地，$A_n\supset A_{n+1}$)，则称(A_n)为**单调增**(相应地，**单调降**)。二者统称为**单调序列**。对单调增或单调降序列(A_n)，我们分别令$A=\bigcup_n A_n$或$A=\bigcap_n A_n$，并称A为(A_n)的**极限**。通常记为$A_n\uparrow A$或$A_n\downarrow A$。一般地，对任一集列(A_n)，令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

分别称其为(A_n)的**上极限**和**下极限**。显然有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{\omega: \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{\omega: \omega \text{ 至多不属于有限多个 } A_n\},$$

从而总有$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$。若$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，称$(A_n)$的极限

存在，并用$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$表示$(A_n)$的**极限**(即令$\lim A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$
$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$)。

1.5 设$\{A_n, n\geqslant 1\}$为一集列。若(A_n)两两不相交(即$n\neq m$ $\Rightarrow A_n\cap A_m=\varnothing$)，则常用$\sum\limits_n A_n$表示$\bigcup\limits_n A_n$。对任一集列$(A_n)$，令

$$B_1=A_1,\ B_n=A_nA_1^c\cdots A_{n-1}^c,\ n\geqslant 2,$$

则$\{B_n, n\geqslant 1\}$中集合两两不相交，且有

$$\sum_n B_n=\bigcup_n A_n.$$

这一将可列并表为可列不交并的技巧是很有用的。若有$\sum\limits_n A_n$ $=\Omega$，称$\{A_n, n\geqslant 1\}$为Ω的一个**划分**。

1.6 设$\mathscr{C}$为一集类(约定是非空的)。如果$A, B\in\mathscr{C}\Rightarrow A$ $\cap B\in\mathscr{C}$(从而$A_1, A_2, \cdots A_n\in\mathscr{C}\Rightarrow A_1A_2, \cdots A_n\in\mathscr{C}$)，称$\mathscr{C}$**对有限交封闭**。如果$A_n\in\mathscr{C}, n\geqslant 1\Rightarrow\bigcap\limits_n A_n\in\mathscr{C}$，称$\mathscr{C}$**对可列交封闭**。类似可定义"对有限并(或可列并)封闭"及"对单调极限封闭"等概念。此外，令

$$\mathscr{C}_{\cap f}=\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i;\ n\geqslant 1,\ A_i\in\mathscr{C},\ i=1, \cdots, n\right\}$$

则$\mathscr{C}_{\cap f}$对有限交封闭，我们称$\mathscr{C}_{\cap f}$为用有限交运算封闭$\mathscr{C}$所得的集类。类似地，我们用

$$\mathscr{C}_{\cup f},\ \mathscr{C}_{\Sigma f},\ \mathscr{C}_{\delta},\ \mathscr{C}_{\sigma},\ \mathscr{C}_{\Sigma\sigma}$$

分别表示用有限并、有限不交并、可列交、可列并及可列不交并

封闭$\mathscr{C}$所得的集类。此外，我们用$\mathscr{C}_{\cap f, \cap f}$表示$(\mathscr{C}_{\cap f})_{\cap f}$，用$\mathscr{C}_{\sigma\delta}$表示$(\mathscr{C}_{\sigma})_{\delta}$。这些记号对今后极为方便，读者从现在起就应熟悉并牢记它。

1.7 命题 设$\mathscr{C}$为一集类，则有如下结论：

(1) $\mathscr{C}_{\cap f, \cup f}=\mathscr{C}_{\cup f, \cap f}$；

(2) 若$\mathscr{C}$对有限交封闭，则$\mathscr{C}_{\cup f}$，$\mathscr{C}_{\Sigma f}$，$\mathscr{C}_{\sigma}$及$\mathscr{C}_{\Sigma\sigma}$亦然；

(3) 若$\mathscr{C}$对有限并封闭，则$\mathscr{C}_{\cap f}$及$\mathscr{C}_{\delta}$亦然。

证 直接从交和并的分配律推得。

现在我们可以用对集合运算的封闭性来划分不同类型的集类。下面是测度论中常用的一些集类的定义。

1.8 定义 设$\mathscr{C}$为一集类。

(1) 称$\mathscr{C}$为**π-类**，如果它对有限交封闭。

(2) 称$\mathscr{C}$为**半环**，如果$\phi\in\mathscr{C}$，且有

$$A, B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C},\ A\backslash B\in\mathscr{C}_{\Sigma f}.$$

(3) 称$\mathscr{C}$为**半代数**，如果它是半环，且$\Omega\in\mathscr{C}$。

(4) 称$\mathscr{C}$为**代数(或域)**，如果它对有限交及取余集运算封闭(由此推知$\Omega=(A\cap A^c)^c\in\mathscr{C}$，$\phi\in\mathscr{C}$，且$\mathscr{C}$对有限并及差运算封闭)。

(5) 称$\mathscr{C}$为**σ-代数**，如果它对可列交及取余集运算封闭(由此推知$\mathscr{C}$对可列并及差运算封闭，且$\Omega\in\mathscr{C}$，$\phi\in\mathscr{C}$)。

(6) 称$\mathscr{C}$为**单调类**，如果它对单调序列极限封闭(即$A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，$A_n\uparrow A$或$A_n\downarrow A\Rightarrow A\in\mathscr{C}$)。

(7) 称$\mathscr{C}$为**λ-类**，如果下列条件被满足：

(i) $\Omega\in\mathscr{C}$；

(ii) $A, B\in\mathscr{C}$，$B\subset A\Rightarrow A\backslash B\in\mathscr{C}$；

(iii) $A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，$A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathscr{C}$。

易知：σ代数为λ-类，λ-类为单调类。

1.9 例子 设R为实直线(即$R=(-\infty, \infty)$)，令

$$\mathscr{C}_1=\{(-\infty,\ a]:\ a\in R\},\ \mathscr{C}_2=\{(a,\ \infty):\ a\in R\},$$
$$\mathscr{C}_3=\{(a,\ b]:\ a\leqslant b,\ a,\ b\in R\}.$$

则$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$及$\mathscr{C}_3$为π-类，$\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3$为半环，$\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2\cup\mathscr{C}_3\cup\{R\}$为半代数。

习题

1.10 $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$,

$(A\triangle B)\cap C=(A\cap C)\triangle(B\cap C)$,

$(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2)$

1.11 $(\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n)\cap(\overline{\lim}_{n\to\infty}B_n)\subset\overline{\lim}_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)$

1.12 对可列不交并封闭的代数为σ-代数。

1.13 若$\mathscr{C}$同时为代数和单调类或同时为π-类和λ-类，则$\mathscr{C}$为σ-代数。

1.14 设$\mathscr{C}$为半代数，则$\mathscr{C}_{\Sigma f}$为代数。

1.15 λ-类定义中的条件(i)及(ii)等价于如下二条件：

(i)′ $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^C\in\mathscr{C}$;

(ii)′ $A,\ B\in\mathscr{C},\ A\cap B=\phi\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{C}$.

1.16 设$\mathscr{C}$为一集类，且$\phi\in\mathscr{C}$，令

$$\mathscr{G}=\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cap\left(\bigcap_{j=1}^{m}B_j^c\right):\ n,\ m\geqslant 1,\ A_i,\ B_j\in\mathscr{C},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\right\}$$

则$\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$，且$\mathscr{G}$为半环。特别若$\mathscr{C}$对有限并及有限交封闭，则$\{A\cap B^C:\ A,\ B\in\mathscr{C}\}$为半环。

§2 单调类定理(集形式)

设$\{\mathscr{C}_i,\ i\in I\}$为$\Omega$上的一族集类。若每个集类$\mathscr{C}_i$对某种集合运算封闭，则其交$\bigcap_i\mathscr{C}_i$亦然。于是，对$\Omega$上的任一非空集

类$\mathscr{C}$，存在包含$\mathscr{C}$的最小σ–代数、最小λ–类和最小单调类，我们分别称之为由$\mathscr{C}$**生成的σ–代数**、**λ–类**和**单调类**，并分别用$\sigma(\mathscr{C})$，$\lambda(\mathscr{C})$和$m(\mathscr{C})$记之。一般说来，恒有$m(\mathscr{C})\subset\lambda(\mathscr{C})\subset\sigma(\mathscr{C})$。本节主要研究在什么条件下成立$m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$或$\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$。所得结果推广了经典的单调类定理，这一推广有时是有用的(例如见定理6.3)。

2.1 定理 设$\mathscr{C}$为一集类。

(1) 若$\mathscr{C}$为代数，则$m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$。

(2) 若$\mathscr{C}$为π–类，则$\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$。

证(1) 令

$\mathscr{G}_1=\{A\in m(\mathscr{C}):\ A^c\in m(\mathscr{C});\ A\cap B\in m(\mathscr{C}),\ \forall B\in\mathscr{C}\}$，

则$\mathscr{C}\subset\mathscr{G}_1$，且$\mathscr{G}_1$为单调类，故$\mathscr{G}_1=m(\mathscr{C})$。令

$$\mathscr{G}_2=\{A\in m(\mathscr{C}):\ A\cap B\in m(\mathscr{C}),\ \forall B\in m(\mathscr{C})\},$$

则由上所证$\mathscr{G}_1=m(\mathscr{C})$知，$\mathscr{C}\subset\mathscr{G}_2$。但$\mathscr{G}_2$为单调类，故$\mathscr{G}_2=m(\mathscr{C})$。综上所证，我们有

$A\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$；$A,\ B\in m(\mathscr{C})\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C})$

即$m(\mathscr{C})$为一代数。从而$m(\mathscr{C})$为σ–代数(习题1.13)。因此有$m(\mathscr{C})\supset\sigma(\mathscr{C})$.但相反包含关系恒成立,故最终有$m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$。

(2) 的证明类似，请读者自行完成。

此定理称为**单调类定理**，作为该定理的一个简单推论，我们有如下更有用的形式。

2.2 定理 设$\mathscr{C}$，$\mathscr{F}$为两个集类，且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$。

(1) 若$\mathscr{C}$为代数且$\mathscr{F}$为单调类，则$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$。

(2) 若$\mathscr{C}$为π–类且$\mathscr{F}$为λ–类，则$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$。

应该强调指出：单调类定理是一个十分有用的定理。读者将在第四节发现它的一个典型的应用(引理4.6)。

现在我们着手推广定理2.1，即寻找使$m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$或$\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$的充要条件。细心的读者可能已经看出：在定理

2.1.(1)的证明中，只要下列条件被满足

$$A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C}),\ A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C}),$$

则定理结论仍成立。于是我们得到定理 2.1 的下述推广。

2.3 定理 设$\mathscr{C}$为一集类。

(1) 为要 $m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$，当且仅当下列条件被满足：

$$A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C});\ A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in m(\mathscr{C}).$$

(2) 为要 $\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$，当且仅当下列条件被满足：

$$A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\lambda(\mathscr{C}).$$

由此定理，我们还可推得如下的

2.4 定理 设$\mathscr{C}$为一集类。

(1) 为要 $m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$，当且仅当下述条件被满足：

$$A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C});\ A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cup B\in m(\mathscr{C})$$

(2) 为要 $\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$，当且仅当下述条件被满足：

$$A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cup B\in\lambda(\mathscr{C}).$$

证 令$\mathscr{D}=\{A^c;\ A\in\mathscr{C}\}$。则由定理 2.3，分别在(1)及(2)的条件下推得 $m(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{D})$ 及 $\lambda(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{D})$。我们分别有 $m(\mathscr{D})\subset m(\mathscr{C})$（因$\mathscr{D}\subset m(\mathscr{C})$）及 $\lambda(\mathscr{D})=\lambda(\mathscr{C})$（请读者自行验证），故定理中条件的充分性得证。条件的必要性是显然的。

上述两个定理条件过于一般，实际上难于应用。但它们的下述推论对今后是有用的（见定理 6.3）。

2.5 定理 设$\mathscr{C}$为一集类。若下列条件之一被满足，则有 $m(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$：

(1) $A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C},\ A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in\mathscr{C}_\delta$；

(2) $A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{C},\ A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in\mathscr{C}_\sigma$。

（关于记号$\mathscr{C}_\delta$及$\mathscr{C}_\sigma$见 1.6）

证 若$\mathscr{C}$对有限交封闭，则$\mathscr{C}_\delta\subset m(\mathscr{C})$；若$\mathscr{C}$对有限并封闭，则$\mathscr{C}_\delta\subset m(\mathscr{C})$。因此条件(1)及(2)分别蕴含定理 2.3 及 2.4 的(1)中条件，定理得证。

2.6 设X为一距离空间，$\mathscr{F}$表示X中闭集全体，$\mathscr{G}$表示X中开集全体。显然有$\sigma(\mathscr{F})=\sigma(\mathscr{G})$，我们称它为$X$的**Borel σ-代数**，记为$\mathscr{B}(X)$。显然$\mathscr{G}$及$\mathscr{F}$分别满足定理2.5的条件(1)及(2)，于是我们有$m(\mathscr{F})=m(\mathscr{G})=\mathscr{B}(X)$。但这一结果并不能从定理2.1推得。由此可见，我们将经典的单调类定理进行推广是有意义的。

应该指出：如果不首先建立比较抽象的定理2.3及2.4，那么是很难发现定理2.5的。

关于单调类定理的应用，以后将陆续给出。本节所附习题并不涉及单调类定理，它们是对正文的必要补充(如可分σ-代数及原子概念)。

习题

2.7 设$\mathscr{C}$为Ω上的一集类，$A\subset\Omega$。令

$$A\cap\mathscr{C}=\{A\cap B:\ B\in\mathscr{C}\}$$

(这一记号以后常用到)，并用$\sigma_A(A\cap\mathscr{C})$表示$A\cap\mathscr{C}$(视为$A$上集类)在$A$上生成的$\sigma$-代数。则有

$$\sigma_A(A\cap\mathscr{C})=A\cap\sigma(\mathscr{C})。$$

对$m(\mathscr{C})$、$\lambda(\mathscr{C})$亦有类似结果。

2.8 设$\mathscr{F}$为Ω上的一σ-代数，$\mathscr{C}=\{A_1, A_2, \cdots\}$为$\Omega$的一个可数划分(即$A_n\cap A_m=\phi$, $n\neq m$, $\Sigma A_n=\Omega$)。则对任何$B\in\sigma(\mathscr{F}\cup\mathscr{C})$，存在$B_n\in\mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，使得

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cap A_n。$$

2.9 设$\mathscr{C}$为一集类。则对任何$A\in\sigma(\mathscr{C})$，存在$\mathscr{C}$的可数子类$\mathscr{D}$，使得$A\in\sigma(\mathscr{D})$。

2.10 设$\mathscr{C}$为一集类。则对任何$A\in m(\mathscr{C})$，存在$B\in\mathscr{C}_\sigma$，使得$B\supset A$(提示：令$\mathscr{G}$表示具有所说性质的集合A全体，证明$\mathscr{G}$

为单调类)。

2.11 设$\mathscr{C}$为一集类，则下列二条件等价：

(1) $\lambda(\mathscr{C})=m(\mathscr{C})$;

(2) $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in m(\mathscr{C})$; $A,B\in\mathscr{C}$, $A\cap B=\phi\Rightarrow A\cup B\in m(\mathscr{C})$。

2.12 设$\mathscr{C}$为一集类. 如果

$$A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C}_{\Sigma\sigma},$$

则有$\lambda(\mathscr{C})=\sigma(\mathscr{C})$(提示：利用1.14)

2.13 设$\mathscr{F}$为一σ-代数。称$\mathscr{F}$为**可分的**(或**可数生成的**)，如果存在$\mathscr{F}$的一可数子类$\mathscr{C}$，使得$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$。(注意：可分$\sigma$-代数的元素未必是可数多个)。试证：若$\mathscr{F}$可分，则存在一代数$\mathscr{C}$，其元素个数至多可数，且使$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$。(提示：利用1.15及1.13)

2.14 设$\mathscr{F}$为Ω上的一σ-代数。对任一$\omega\in\Omega$，令

$$\mathscr{F}_\omega=\{B\in\mathscr{F}:\ \omega\in B\},\ A(\omega)=\bigcap_{B\in\mathscr{F}_\omega}B,$$

称$A(\omega)$为含ω的**原子**。试证

(1) 设ω, $\omega'\in\Omega$，则或者$A(\omega)=A(\omega')$，或者$A(\omega)\cap A(\omega')=\phi$;

(2) 若$\mathscr{F}$可分，令$\mathscr{C}$为生成$\mathscr{F}$的可数代数(见2.13)。对任何$\omega\in\Omega$，令$\mathscr{C}_\omega=\{B\in\mathscr{C}:\ \omega\in B\}$，则有

$$A(\omega)=\bigcup_{B\in\mathscr{C}_\omega}B.$$

特别每个原子$A(\omega)$属于$\mathscr{F}$。

§3 测度与非负集函数

学过实分析的人都知道：Lebesgue测度是线段长度概念的延伸(或更一般地，是欧氏空间中面积或体积概念的延伸)。下面

我们将要引入的测度概念则是 Lebesgue 测度的抽象化。

3.1 定义 设$\mathscr{F}$为Ω上的一σ-代数，称$(\Omega, \mathscr{F})$为一**可测空间**。$\mathscr{F}$中的元称为$\mathscr{F}$-**可测集**。设μ为定义于$\mathscr{F}$取值于$\overline{R}_+=[0, \infty]$的函数，称$\mu$为$\Omega$上的(或$(\Omega, \mathscr{F})$上的)一**测度**。如果$\mu$有**可数可加性**(或简称为$\sigma$**可加性**)，即

$$A_n \in \mathscr{F}, \ n \geqslant 1, \ A_n \cap A_m = \phi, \ n \neq m \Rightarrow \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(由此定义推知，$\mu(\phi)=0$)若把可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$及测度μ合并一起来考虑，则称之为**测度空间**，记为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$。

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间。若$\mu(\Omega)<\infty$，则称$\mu$为**有限测度**。若存在$A_n \in \mathscr{F}$，$n \geqslant 1$，使得$\bigcup_n A_n = \Omega$，且使$\mu(A_n)<\infty$对一切$n \geqslant 1$成立(由 1.5 知，可取$(A_n)$为$\Omega$的一个划分)，则称$\mu$为$\sigma$-**有限测度**。若$\mu(\Omega)=1$，则称$\mu$为**概率测度**。

为了下一节研究测度的扩张的需要，我们引进一般的非负集函数的概念，设$\mathscr{C}$为任一集类，定义$\mathscr{C}$取值于$\overline{R}_+$的函数就称为$\mathscr{C}$上的非负集函数。在下面的定义叙述中，我们总约定$\phi \in \mathscr{C}$，且非负集函数μ满足：$\mu(\phi)=0$，及**单调性**：

$$A, \ B \in \mathscr{C}, \ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B).$$

此外，“Σ”表示不交集的并。

3.2 定义 设μ为$\mathscr{C}$上非负集函数。

(1) 称μ为**有限可加的**，如果对一切$n \geqslant 2$，

$$A_i \in \mathscr{C}, \ i=1, \ 2, \ \cdots n, \ \sum_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i).$$

(2) 称 μ 为**σ-可加的**，如果

$$A_i\in\mathscr{C},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ \sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{C}\Rightarrow\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(3) 称 μ 为**半σ-可加的**，如果

$$A\in\mathscr{C};\ A_i\in\mathscr{C},\ i=1,\ 2,\ \text{且}\ A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\mu(A)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

(4) 称 μ **从下连续**，如果
$$A_n\in\mathscr{C},\ A_n\uparrow A\in\mathscr{C}\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(5) 称 μ **从上连续**，如果
$$A_n\in\mathscr{C},\ A_n\downarrow A\in\mathscr{C}\ \text{且}\ \mu(A_1)<\infty\Rightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

(6) 称 μ **在 $\varnothing$ 处连续**，如果
$$A_n\in\mathscr{C},\ A_n\downarrow\phi,\ \text{且}\ \mu(A_1)<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0.$$

(7) 称 μ **在$\mathscr{C}$上有限**，如果对一切 $A\in\mathscr{C}$，有 $\mu(A)<\infty$。

(8) 称 μ **在$\mathscr{C}$上σ-有限**，如果对任一 $A\in\mathscr{C}$，存在 $A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，使得 $A\subset\bigcup_n A_n$，且 $\mu(A_n)<\infty$对一切 n 成立。

这些概念都是可以"顾名思义"的，读者很容易记住它们。下一定理概括了测度的最基本性质。

3.3 定理 设 μ 为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上一测度．则 μ 有从下连续性及从上连续性(从而也在 ϕ 处连续)．此外，μ 有单调性及如下的**可减性**：

$A, B \in \mathscr{F}, A \subset B$, 且 $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

证 单调性及可减性是显然的．由可减性及从下连续性立刻推得从上连续性．只需证 μ 的从下连续性．设 $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geq 1$, $A_n \uparrow A$. 要证$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(A)$，为此不妨设对一切 $n \geq 1$有 $\mu(A_n) < \infty$，则有

$$\mu(A_{n+1} \setminus A_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n).$$

由于 $A = \bigcup\limits_n A_n = A_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_{n+1} \setminus A_n)$，故有

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{n=1}^{\infty}[\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)] = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n.)$$

定理证毕．

下一定理推广了定理 3.3 的结论．

3.4 定理 设$\mathscr{C}$为一代数，μ 为 $\mathscr{C}$ 上的一有限可加非负集函数．则 μ 有单调性及可减性．此外，μ 为 σ-可加$\Leftrightarrow \mu$ 从下连续$\Rightarrow \mu$ 从上连续$\Rightarrow \mu$ 在 ϕ 处连续．若进一步 $\mu(\Omega) < \infty$，则上述诸条件等价．

证 设 μ 从下连续，往证 μ 为 σ-可加的．令$A_n \in \mathscr{C}$, $n \geq 1$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n \in \mathscr{C}$. 则$B_m = \sum\limits_{n=1}^{m}A_n \in \mathscr{C}$，且 $B_m \uparrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 于是由 μ 的有限可加性及从下连续性得

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty}\mu\left(\sum_{n=1}^{m} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

这表明 μ 有 σ-可加性．其余结论显然(参见上一定理的证明)．

下一引理将使我们在许多场合把与σ-有限测度有关的问题归结为与概率测度有关的问题.

3.6 引理 设μ为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的一σ-有限测度。若$\mu(\Omega)>0$,令$\{A_n,n\geqslant 1\}$为Ω的一个可数划分，使得$\forall n,A_n\in\mathscr{F}$，且$0<\mu(A_n)<\infty$，置

$$\nu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(A\cap A_n)}{2^n\mu(A_n)},\quad A\in\mathscr{F},\tag{3.1}$$

则ν为$(\Omega,\mathscr{F})$上的一概率测度. 此外有$\nu(A)=0\Leftrightarrow\mu(A)=0$，并且对任何$A\in\mathscr{F}$，有

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\nu(A\cap A_n)\mu(A_n).\tag{3.2}$$

证 只需证(3.2),其余结论显然. 在(3.1)中令$A\cap A_m$代替A，得

$$\nu(A\cap A_m)=\frac{\mu(A\cap A_m)}{2^m\mu(A_m)}.$$

由此立得(3.2),证毕.

习题

3.7 设μ为半环$\mathscr{C}$上的一有限可加非负集函数，则μ有单调性及可减性.此外，设$A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant 1$，$A\in\mathscr{C}$，且$\sum_n A_n\subset A$，

则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(A)$.

3.8 设$(\mu_i,\ i\in I)$为σ-代数$\mathscr{F}$上的一族测度。令

$$\mu(A)=\sup_i\mu_i(A),\qquad A\in\mathscr{F}.$$

则μ为$\mathscr{F}$上的测度.

3.9 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间，$\mu(\Omega)<\infty$，$\mathscr{C}$为生成$\mathscr{F}$

的一个代数。则对任何 $A\in\mathscr{F}$，我们有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B):B\in\mathscr{C}_{\delta},\ B\subset A\}=\inf\{\mu(B):B\in\mathscr{C}_{\sigma},\ B\supset A\}.$$

（提示：令 $\mathscr{G}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中使上式成立的集 A 全体，证明 $\mathscr{G}$ 为单调类，再利用单调类定理）

3.10 设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 为一测度空间，$\mu(\Omega)<\infty$，$\mathscr{C}$ 为生成 $\mathscr{F}$ 的一个代数。若 $A\in\mathscr{G}$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $B\in\mathscr{C}$，使得 $\mu(A\triangle B)<\varepsilon$。（提示：利用 3.9）

§4　外测度与测度的扩张

本节研究如何把一半环 $\mathscr{C}$ 上的一 σ-可加非负集函数扩张成为 σ-代数 $\sigma(\mathscr{C})$ 上的测度，通常采用的方法是外测度方法。

4.1　定义　令 $\mathscr{A}(\Omega)$ 表示 Ω 的所有子集（包括空集）所构成的集类，设 μ 为 $\mathscr{A}(\Omega)$ 上的一非负集函数（约定 $\mu(\phi)=0$）。如果 μ 满足如下的**次 σ-可加性**：

$$A_n\subset\Omega,n\geqslant1\Rightarrow\mu(\bigcup_n A_n)\leqslant\sum_n\mu(A_n)$$

则称 μ 为 Ω 上的一**外测度**。

下一定理是测度扩张的基础。

4.2　定理　设 μ 为 Ω 上的一外测度。令

$$\mathscr{U}=\{A\subset\Omega:\ \forall D\subset\Omega,\ 有\ \mu(D)=\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D)\}\tag{4.1}$$

则 $\mathscr{U}$ 为 Ω 上的一 σ-代数，且 μ 限于 $\mathscr{U}$ 为一测度。我们称 $\mathscr{U}$ 中的元素为 **μ-可测集**。

证　首先注意：为要 $A\in\mathscr{U}$，当且仅当 $\forall D\subset\Omega$

$$\mu(D)\geqslant\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D).\tag{4.1}$$

设 $A,\ B\in\mathscr{U}$，则由(4.1)及 μ 的次可加性知：$\forall D\subset\Omega$，

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\mu(A\cap D)+\mu(A^c\cap D)\\&=\mu(A\cap D)+\mu(B\cap A^c\cap D)+\mu(B^c\cap A^cD)\\&\geqslant\mu((A\cup B)\cap D)+\mu((A\cup B)^c\cap D).\end{aligned}$$

这表明 $A\cup B\in\mathscr{U}$.此外，由(4.1)知，$A\in\mathscr{U}\Rightarrow A^c\in\mathscr{U}$,故$\mathscr{U}$为一代数。

下面证明$\mathscr{U}$为σ-代数，且μ限于$\mathscr{U}$为一测度。为此，设$A_n\in\mathscr{U}$，$n\geqslant1$，且$A_n\cap A_m=\phi$，$n\neq m$，则对任何$D\subset\Omega$，我们有（注意$A_k\cap A_{k-1}^c\cap\cdots\cap A_1^c=A_k$）

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\mu(A_1\cap D)+\mu(A_1^c\cap D)\\&=\mu(A_1\cap D)+\mu(A_2\cap D)+\mu(A_2^c\cap A_1^c\cap D)=\cdots\\&=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\cap D)+\mu\left(\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)^c\cap D\right)\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k\cap D)+\mu\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\cap D\right).\end{aligned}$$

在上式中令$n\to\infty$，并由μ的次σ-可加性立得

$$\begin{aligned}\mu(D)&\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\cap D)+\mu\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)^c\cap D\right)\\&=\mu\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_K\right)\cap D\right)+\mu\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_K\right)^c\cap D\right).\end{aligned}$$

这表明$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathscr{U}$。此外，在上式中令$D=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$得

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

因此，$\mathscr{U}$为一σ-代数，且μ限于$\mathscr{U}$为一测度。证毕。

下一命题的证明是不足道的，故从略。

4.3 命题 设$\mathscr{C}$为Ω上一集类，且$\phi\in\mathscr{C}$。又设μ为$\mathscr{C}$上的

一半σ-可加非负集函数，且$\mu(\phi)=0$。令

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n): A_n\in\mathscr{C}, A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\},\quad A\subset\Omega \tag{4.2}$$

(这里及今后，约定$\inf\phi=+\infty$)，则μ^*为Ω上的外测度，且μ^*限于$\mathscr{C}$与μ一致。我们称μ^*为μ**引出的外测度**。

4.4 命题 设μ为半环$\mathscr{C}$上的一非负集函数(约定$\mu(\phi)=0$)。则为要μ σ-可加的，必须且只需μ为有限可加且半σ-可加的。

证 必要性 设μ为σ-可加，显然μ为有限可加. 令$A\in\mathscr{C}$

$A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，且$A\subset\bigcup_n A_n$。往证$\mu(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$，令

$$B_1=A_1,\quad B_n=A_nA_1^c\cdots A_{n-1}^c,\quad n\geqslant2$$

则由半环的定义知$B_n\in\mathscr{C}_{\Sigma f}$(记号见1.6)。我们有$\bigcup_n A_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n$，从而$A=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)$。由于$B_n\cap A\in\mathscr{C}_{\Sigma f}$，故存在$C_{n,m}\in\mathscr{C}$，$1\leqslant m\leqslant k(n)$，使得

$$B_n\cap A=\sum_{m=1}^{k(n)}C_{n,m},\quad n\geqslant1.$$

由μ的σ-可加性推知

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k(n)}\mu(C_{n,m}).$$

但由于$A_n\supset\sum_m C_{n,m}$，$A_n\setminus\sum_m C_{n,m}=A_n\cap\left(\bigcap_m C_{n,m}^c\right)\in\mathscr{C}_{\Sigma f}$，故由$\mu$的有限可加性易知

$$\mu(A_n)\geqslant\sum_{m=1}^{k(n)}\mu(C_{n,m}).$$

因此有 $\mu(A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$。此即 μ 的半 σ-可加性

充分性 现设 μ 有限可加且半 σ-可加。设 $A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，$\sum_n A_n=A\in\mathscr{C}$，要证 $\mu(A)=\sum_n\mu(A_n)$。由于对一切 $k\geqslant1$，$A\setminus\sum_{n=1}^{k}A_n\in\mathscr{C}_{\Sigma f}$，故由 μ 的有限可加性易知 $\mu(A)\geqslant\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$。但 k 是任意的，故 $\mu(A)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$。再由 μ 的半 σ-可加性知 $\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$。证毕。

现设 μ^* 为由(4.2)定义的外测度。下一引理给出了 μ^* 可测集的一个简单刻画。

4.5 引理 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一集类，且 $\phi\in\mathscr{C}$。又设 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的一半 σ-可加非负集函数，且 $\mu(\phi)=0$，μ^* 为 μ 引出的外测度。则为要 A 为 μ^*-可测集，必须且只需对一切 $C\in\mathscr{C}$，有

$$\mu(C)\geqslant\mu^*(C\cap A)+\mu^*(C\cap A^c)\text{（或者，等价地，等号成立）。}\tag{4.3}$$

证 只需证充分性。设 $A\subset\Omega$，且对一切 $C\in\mathscr{C}$，(4.3)成立。任取 $D\subset\Omega$。若 $\mu^*(D)=\infty$，显然(4.1)′成立（μ^* 代替 μ）。若 $\mu^*(D)<\infty$，则由 μ^* 的定义，对任给 $\varepsilon>0$，可取 $A_n\in\mathscr{C}$，$n\geqslant1$，使得 $\bigcup_n A_n\supset D$，且 $\mu^*(D)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)-\varepsilon$。于是由(4.3)及 μ^* 的次 σ-可加性有

$$\mu^*(D)\geqslant\sum_n[\mu^*(A_n\cap A)+\mu^*(A_n\cap A^c)]-\varepsilon$$

$$\geqslant \mu^*\left(\left(\bigcup_n A_n\right)\cap A\right)+\mu^*\left(\left(\bigcup_n A_n\right)\cap A^c\right)-\varepsilon$$

$$\geqslant \mu^*(D\cap A)+\mu^*(D\cap A^c)-\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有(4.1)′成立(以 μ^* 代替 μ)。这表明 A 为 μ^*-可测集。证毕。

下一引理是应用单调类定理的一个典型例子，我们在讨论测度扩张的唯一性时将用到它。

4.6 引理 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一 π- 类，μ_1 及 μ_2 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 上的两个有限测度。若 $\Omega\in\mathscr{C}$，且 μ_1 与 μ_2 限于 $\mathscr{C}$ 一致，则 μ_1 与 μ_2 在 $\sigma(\mathscr{C})$ 上一致。

证 令 $\mathscr{G}=\{A\in\sigma(\mathscr{C}):\mu_1(A)=\mu_2(A)\}$，则由定理 3.3知 $\mathscr{G}$ 为 λ 类。但依假定，有 $\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$，故由单调类定理知 $\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})$，从而 $\mathscr{G}=\sigma(\mathscr{C})$. 证毕。

下一定理称为 Caradéodory **测度扩张定理**。

4.7 定理 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一半环，μ 为 $\mathscr{C}$ 上的一 σ- 可加非负集函数，则 μ 可以扩张成为 $\sigma(\mathscr{C})$ 上的一测度。若进一步 μ 在 $\mathscr{C}$ 上为 σ- 有限，且 $\Omega\in\mathscr{C}_\sigma$，则这一扩张是唯一的，并且扩张所得的测度在 $\sigma(\mathscr{C})$ 上也是 σ- 有限的。

证 由命题 4.4，μ 在 $\mathscr{C}$ 上有半 σ- 可加性. 令 μ^* 为 μ 按(4.2)引出的外测度，令 $\mathscr{U}$ 为 μ^*-可测集全体. 现设 $A\in\mathscr{C}$，往证 $A\in\mathscr{U}$.

对任何 $C\in\mathscr{C}$，我们有 $C\cap A^c=\sum_{j=1}^n B_j$，其中 $B_1,\cdots B_n\in\mathscr{C}$，$B_i\cap B_j=\phi$，$i\neq j$. 于是有

$$\mu^*(C\cap A^c)\leqslant\sum_{i=1}^n\mu(B_i).$$

但我们有 $C=C\cap A+\sum_{i=1}^n B_i$，故由 μ 的有限可加性得

$$\mu(C)=\mu(C\cap A)+\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)$$

$$\geqslant\mu^*(C\cap A)+\mu^*(C\cap A^c)$$

由引理4.5便知$A\in\mathscr{U}$. 最终我们有$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{U}$. 令$\widetilde{\mu}$为$\mu^*$在$\sigma(\mathscr{C})$上的限制，则$\widetilde{\mu}$为$\sigma(\mathscr{C})$上的测度. 显然$\widetilde{\mu}$与$\mu$在$\mathscr{C}$上一致，即$\widetilde{\mu}$为$\mu$到$\sigma(\mathscr{C})$上的扩张.

现假定μ在$\mathscr{C}$上σ-有限，且$\Omega\in\mathscr{C}_\sigma$。由于$\mathscr{C}$是半环，不难证明存在$\Omega$的一个可数划分$(A_n)$，使得$A_n\in\mathscr{C}$，$\mu(A_n)<\infty$，$n\geqslant1$，

且$\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$。设$\mu_1$与$\mu_2$为$\mu$到$\sigma(\mathscr{C})$上的两个测度扩张，则由于$A_n\cap\mathscr{C}$为$\pi$-类，且$A_n\cap\mathscr{C}\subset\mathscr{C}$，故由引理4.6知，$\mu_1$与$\mu_2$在$A_n\cap\sigma(\mathscr{C})$上一致。因此，$\mu_1$与$\mu_2$在$\sigma(\mathscr{C})$上一致。

习题

4.8 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间。令

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu(B):B\supset A,\ B\in\mathscr{F}\},\ A\subset\Omega.$$

则μ^*为Ω上的外测度。

4.9（测度的限制） 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间，且$\mu(\Omega)<\infty$。设$\Omega_0\subset\Omega$，且$\mu^*(\Omega_0)=\mu(\Omega)$。则$\forall A\in\mathscr{F}$有

$$\mu^*(A\cap\Omega_0)=\mu(A),$$

并且μ^*限于$\Omega_0\cap\mathscr{F}$为一测度。称μ^*为μ到$(\Omega_0,\ \Omega_0\cap\mathscr{F})$上的限制。

4.10 设$\mathscr{C}$为Ω上的一集类，且$\phi\in\mathscr{C}$。又设μ为$\mathscr{C}$上的一σ-可加非负集函数。如果

$$A,\ B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cap B^c\in\mathscr{C}_{\Sigma\sigma},$$

则定理4.7的结论仍成立（提示：令$\mathscr{D}=\mathscr{C}_{\Sigma\sigma}$，证明$\mathscr{D}$为一半环）。

4.11（测度空间的完备化） 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间。若$A\in\mathscr{F}$，且$\mu(A)=0$，称$A$为**$\mu$-零测集**。如果任何$\mu$-零测集

的子集皆属于$\mathscr{F}$，称$\mathscr{F}$关于μ是**完备的**，$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为**完备测度空间**．设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间，$\mu^*$为4.8中定义的外测度，$\mathscr{U}$为$\mu^*$–可测集全体．试证$(\Omega, \mathscr{U}, \mu^*)$为完备测度空间.（我们称$(\Omega, \mathscr{U}, \mu^*)$为$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$的**完备化**）

4.12 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间．令

$$\mathscr{N}=\{N\subset\Omega: \exists A\in\mathscr{F},\ \mu(A)=0,\ 使\ A\supset N\},$$

$$\overline{\mathscr{F}}=\{A\cup N: A\in\mathscr{F},\ N\in\mathscr{N}\}.$$

试证：$\overline{\mathscr{F}}$为σ–代数，μ可以唯一扩张成为$\overline{\mathscr{F}}$上的测度$\overline{\mu}$，且$(\Omega, \overline{\mathscr{F}}, \overline{\mu})$为完备测度空间.此外有$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})=(\Omega,\mathscr{U},\mu^*)$.

§5 欧氏空间中的Lebesgue-Stieltjes测度

本节将利用上节的结果来建立R^n上的Lebesgue测度及Lebesgue-Stieltjes测度．为此，我们先引进若干记号．

设$a=(a_1, a_2, \cdots a_n)$与$b=(b_1, \cdots, b_n)$为R^n中的两个点．若对一切i有$a_i\leqslant b_i$（相应地，$a_i<b_i$），则记为$a\leqslant b$（相应地，$a<b$）.设$a\leqslant b$,我们令

$$(a, b]=\{x\in R^n: a<x\leqslant b\}$$

类似可定义$[a, b)$，(a, b)及$[a, b]$.此外令

$$\mathscr{C}=\{(a, b]: a\leqslant b,\ a,\ b\in R^n\},$$

$$\mu((a,b])=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

5.1 引理 $\mathscr{C}$为R^n上的半环，且μ为$\mathscr{C}$上的σ–可加非负集函数．

证 $\mathscr{C}$显然为半环．由归纳法易证μ在$\mathscr{C}$上是有限可加的（直观上看,体积具有有限可加性）.为证μ在$\mathscr{C}$上为σ–可加的，只需证μ为半σ–可加的（命题4.4）．为此，设

$$I=(a, b];\ I_i\in(a^i, b^i]$$

其中$a<b$，$a^{(i)}<b^{(i)}$，且$I\subset\bigcup\limits_i I_i$。对任给$\varepsilon>0$，存在$\bar{a}$：$a<\bar{a}<b$及$\bar{b}^{(i)}>b^{(i)}$，$i\geq 1$，使得

$$\mu((\bar{a},b])\geq\mu((a,b])-\varepsilon$$

$$\mu((a^{(i)},\bar{b}^{(i)}])\leq\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+2^{-i}\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,$$

由有限覆盖定理，存在自然数$N\geq 1$，使得

$$[\bar{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^{N}(a^{(i)},\bar{b}^{(i)})$$

从而有

$$[\bar{a},b]\subset\bigcup_{i=1}^{N}(a^{(i)},\bar{b}^{(i)}]$$

故有

$$\mu((a,b])-\varepsilon\leq\mu((\bar{a},b])\leq\sum_{i=1}^{N}\mu((a^{(i)},\bar{b}^{(i)}])$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a^{(i)},b^{(i)}])+\varepsilon.$$

令$\varepsilon\downarrow 0$得$\mu(I)\leq\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(I_i)$，$\mu$的半$\sigma$-可加性得证。证毕。

令$\mathscr{B}(R^n)$有R^n上的Borel σ-代数。易知：$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}(R^n)$。于是由测度扩张定理立刻得到如下的定理。

5.2 定理 μ可以唯一地扩张成为$\mathscr{B}(R^n)$上的一σ-有限测度。通常称之为Lebesgue测度。

令$\overline{\mathscr{B}(R^n)}$为$\mathscr{B}(R^n)$按$\mu$的完备化，称$\overline{\mathscr{B}(R^n)}$中的元为Lebesgue可测集，而$\mathscr{B}(R^n)$中的元称为Borel可测集。

设μ为$\mathscr{B}(R^n)$上的一σ-有限测度。称μ为Lebesgue-Stieltjes测度，如果对任何$C\in\mathscr{C}$，有$\mu(C)<\infty$（即μ在$\mathscr{C}$上有

限）。下面我们将证明：R^n 上的 L-S 测度与 R^n 上的右连续增函数之间有某种对应关系。

5.3 定义 设 F 为 R^n 上的一右连续实值函数，对 $a,b\in R^n$，$a<b$，令

$$\Delta_{b,a}F=\Delta^{(n)}_{b_n,a_n}\Delta^{(n-1)}_{b_{n-1},a_{n-1}}\cdots\Delta^{(1)}_{b_1,a_1}F,$$

其中

$$\Delta^{(i)}_{b_i,a_i}G(x)=G(x_1,\cdots x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots x_n)$$
$$-G(x_1,\cdots x_{i-1},a_i x_{i+1},\cdots x_n).$$

如果对一切 $a<b$，有 $\Delta_{b,a}F\geqslant 0$，称 F 为**增函数**

5.4 定理 设 F 为 R^n 上的一右连续增函数。令

$$\mu_F(\phi)=0,\ \mu_F((a,b])=\Delta_{a,b}F,\ a<b,\ a,b\in R^n,$$

则 μ_F 可以唯一地扩张成为 R^n 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度。反之，设 μ 为 R^n 上的一 L-S 测度，则存在 R^n 上的一右连续增函数 F(但不唯一)，使得 μ 为 μ_F 从$\mathscr{C}$到$\mathscr{B}(R^n)$上的唯一扩张。

证 设 F 为右连续增函数。与引理 5.1 类似可证：μ_F为$\mathscr{C}$上的一σ-可加集函数，从而可以唯一地扩张成为$\mathscr{B}(R^n)$上的测度。定理后半部分证明比较复杂，我们就省略了(如果 μ 比较特殊，满足 $\mu((-\infty,\ x])<\infty$，$\forall x\in R^n$，则令 $F(x)=\mu((-\infty,x])$ 即得所要的增函数。这至少对概率论说来是够用了)。

§6 测度的逼近

设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间。本节研究在什么条件下，$\mathscr{F}$ 可测集的测度可以通过$\mathscr{F}$的一子类$\mathscr{C}$中元素的测度来逼近。这一问题在研究拓扑空间上测度的正则性时很重要。

6.1 引理 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间，$\mathscr{C}$为$\mathscr{F}$的一子类。令

$$\mathscr{H}=\{A\in\mathscr{F}:\ \mu(A)=\sup[\mu(B):\ B\in\mathscr{C}_\delta,B\subset A]\},$$

则$\mathscr{H}\supset\mathscr{C}_\delta$，且$\mathscr{H}$有如下性质：

(1) $A_n\in\mathscr{H}$，$n\geqslant 1$，$A_n\uparrow A\Rightarrow A\in\mathscr{H}$；

(2) $A_n\in\mathscr{H}$，$\mu(A_n)<\infty$，$n\geqslant 1\Rightarrow\bigcap_n A_n\in\mathscr{H}$.

特别，若μ为有限测度，则$\mathscr{H}$为单调类，且对可列交封闭。

证 (1)设$A_n\in\mathscr{H}$，$n\geqslant 1$，$A_n\uparrow A$。若$\mu(A)=\infty$，则$\mu(A_n)\uparrow\infty$，于是易从$\mathscr{H}$的定义知$A\in\mathscr{H}$.现设$\mu(A)<\infty$.对任给$\varepsilon>0$，先取n_0，使得$\mu(A_{n_0})\geqslant\mu(A)-\dfrac{\varepsilon}{2}$。再取$B\in\mathscr{C}_\delta$，$B\subset A_{n_0}$，使得$\mu(B)\geqslant\mu(A_{n_0})-\dfrac{\varepsilon}{2}$。则有$B\subset A$，且$\mu(B)\geqslant\mu(A)-\varepsilon$，这表明$A\in\mathscr{H}$。

(2) 设$A_n\in\mathscr{H}$，$\mu(A_n)<\infty$，$n\geqslant 1$。对每个$n\geqslant 1$，令$B_n\in\mathscr{C}_\delta$，$B_n\subset A_n$，使得$\mu(B_n)\geqslant\mu(A_n)-2^{-n}\varepsilon$。令$B=\bigcap B_n$，则$B\in\mathscr{C}_\delta$，$B\subset\bigcap_n A_n$，且有

$$\mu\Big(\bigcap_n A_n\Big)-\mu(B)=\mu\Big(\bigcap_n A_n\setminus\bigcap_n B_n\Big)\leqslant\mu\Big(\bigcap_n(A_n\setminus B_n)\Big)$$

$$\leqslant\sum_n[\mu(A_n)-\mu(B_n)]\leqslant\varepsilon,$$

这表明$\bigcap_n A_n\in\mathscr{H}$。

6.2 引理 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间，且$\mu(\Omega)<\infty$。设$\mathscr{D}$为$\mathscr{F}$的一子类，令

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{F}:\mu(A)=\inf[\mu(B):B\in\mathscr{D}_\sigma,\ B\supset A]\},$$

则$\mathscr{G}\supset\mathscr{D}_\sigma$，$\mathscr{G}$为单调类，且对可列并封闭。

证 令$\mathscr{C}=\{D^c:D\in\mathscr{D}\}$，并如引理6.1中定义$\mathscr{H}$，则易见$A\in\mathscr{G}\Leftrightarrow A^c\in\mathscr{H}$。故由引理6.1立得本引理结论。

下一定理是测度逼近定理，它的证明依赖于推广了的单类调定理(定理2.5)。

6.3 定理 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间，$\mathscr{C}$为$\mathscr{F}$的子类，且$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$。此外设$\mathscr{C}$满足如下条件：

(1) $A, B\in\mathscr{C}\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{C}$；

(2) $A\in\mathscr{C}\Rightarrow A^c\in(\mathscr{C}_\delta)_\sigma$。

若$A\in\mathscr{F}$，且μ在A上为σ-有限，则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B): B\subset A, B\in\mathscr{C}_\delta\}。\tag{6.1}$$

证 首先假定$\mu(A)<\infty$，令

$$\nu(B)=\mu(A\cap B), \quad B\in\mathscr{F}。$$

则ν为$(\Omega, \mathscr{F})$上的有限测度。令

$$\mathscr{H}=\{C\in\mathscr{F}: \nu(C)=\sup[\nu(B): B\subset C, B\in\mathscr{C}_\delta]\}。$$

则由引理 6.1 知，$\mathscr{H}$为单调类，且$\mathscr{H}\supset\mathscr{C}_\delta$。由$\mathscr{C}$的性质(1)及(2)，我们有

$$A, B\in\mathscr{C}_\delta\Rightarrow A\cup B\in\mathscr{C}_\delta; \quad A\in\mathscr{C}_\delta\Rightarrow A^c\in(\mathscr{C}_\delta)_\sigma。$$

于是由定理 2.5 知$\mathscr{H}\supset m(\mathscr{C}_\delta)=\sigma(\mathscr{C}_\delta)=\mathscr{F}$，特别有$A\in\mathscr{F}$，即有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(B): B\subset A, B\in\mathscr{C}_\delta\}$$

此即(6.1)。

现设$\mu(A)=\infty$，且存在$A_n\in\mathscr{F}$，$\mu(A_n)<\infty$，$n\geqslant 1$，使得$A_n\uparrow A$。则由上所证，我们有

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(B): B\subset A, B\in\mathscr{C}_\delta\}&\geqslant\sup\{\mu(B): B\subset A_n, B\in\mathscr{C}_\delta\}\\&=\mu(A_n)\end{aligned}$$

但$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\infty$，故(6.1)成立。定理证毕。

作为定理的推论，我们有如下命题，它推广了习题 3.9。

6.4 命题 在定理 6.3 条件下，假定μ为有限测度，则对一切$A\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\sup\{\mu(B): B\subset A, B\in\mathscr{C}_\delta\}\\&=\inf\{\mu(C): C\supset A, C\in\mathscr{D}_\sigma\},\end{aligned}$$

其中$\mathscr{D}=\{C^c: C\in\mathscr{C}\}$。

第二章 可测映射与函数

§1 定义及基本性质

1.1 定义 设$(\Omega,\mathscr{F})$及$(E,\mathscr{E})$为两个可测空间，f为Ω到E中的映射(简记为$f:\Omega\longrightarrow E$)。如果对一切$A\in\mathscr{E}$，有$f^{-1}(A)\in\mathscr{F}$，则称$f$为**可测映射**。

今后，我们用$f^{-1}(\mathscr{E})$表示集类$\{f^{-1}(A):A\in\mathscr{E}\}$。于是，$f$为可测映射$\Leftrightarrow f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}$。

通常，可测空间$(E,\mathscr{E})$及空间Ω是给定的，Ω上的σ-代数$\mathscr{F}$有某种任意性。为了明确起见，通常称满足$f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}$的映射为**$\mathscr{F}$-可测映射**。

1.2 定义 设R为实直线，$\overline{R}$为数直线，即$\overline{R}=R\cup\{-\infty,\infty\}$。我们分别用$\mathscr{B}(R)$及$\mathscr{B}(\overline{R})$表示$R$及$\overline{R}$上的Borel$\sigma$-代数。令$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，$f$为$\Omega$到$\overline{R}$中的映射。如果$f^{-1}(\mathscr{B}(\overline{R}))\subset\mathscr{F}$，称$f$为Borel**可测函数**，简称可测函数。若进一步f只取实值，则称f为**实值可测函数**。

容易看出：f为$(\Omega,\mathscr{F})$上的实值可测函数，当且仅当f为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(R,\mathscr{B}(R))$中的可测映射。

下一命题给出了可测映射的一个有用的刻画。

1.3 命题 设$(\Omega,\mathscr{F})$及$(E,\mathscr{E})$为两个可测空间，$\mathscr{C}$为生成σ-代数$\mathscr{E}$的一集类。如果f为Ω到E中的一映射，使得$f^{-1}(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$，则$f$为可测映射。

证 令$\mathscr{G}=\{A\subset E:f^{-1}(A)\in\mathscr{F}\}$，则$\mathscr{G}$为$E$上的一$\sigma$-代数。由假定，$\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$，从而$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{E}$，这表明$f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}$，即$f$为可测映射。

1.4 系 设 f 为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的一数值函数（即取值于$\overline{R}$），则下列条件等价：

(1) f 为可测函数；

(2) $\forall a\in R$, $[f<a]\in\mathscr{F}$；

(3) $\forall a\in R$, $[f\leqslant a]\in\mathscr{F}$；

(4) $\forall a\in R$, $[f>a]\in\mathscr{F}$；

(5) $\forall a\in R$, $[f\geqslant a]\in\mathscr{F}$。

这里及今后，$[f<a]$表示集合$\{\omega: f(\omega)<a\}$.

证 令 $\mathscr{C}_1=\{[-\infty, a): a\in R\}$，则易知 $\sigma(\mathscr{C}_1)=\mathscr{B}(\overline{R})$ 故由命题1.3知，(2)⇔(1)。类似可证(3)⇔(1)，(4)⇔(1)及(5)⇔(1).证毕

由于可测函数可以取$+\infty$和$-\infty$，我们在研究可测函数的算术运算(即加、减、乘、除)时，作如下约定：

(1) $(\pm\infty)+x=x+(\pm\infty)=x-(\mp\infty)=\pm\infty$, $|x|<\infty$

(2) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$

(3) $x/\pm\infty=0$, $\quad |x|<\infty$

(4) $x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0\\ 0, & x=0\\ \mp\infty, & x<0\end{cases}$

(5) 下列运算无意义：$(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$(\pm\infty)+(\mp\infty)$，$\pm\infty/\pm\infty$，$\pm\infty/\mp\infty$，$x/0$。

1.5 命题 $(\Omega, \mathscr{F})$上实值可测函数全体构成一线性空间。

证 令 Q 表示 R 中有理数全体。设 f、g 为实值可测函数，则 $\forall a\in R$，有

$$[f+g<a]=\bigcup_{r\in Q}([f<r]\cap[g<a-r])$$

从而 $f+g$ 为实值可测函数。此外，对任何 $a\in R$，af 显然为实值可测函数。证毕。

1.6 命题 设f，g，$\{f_n, n\geqslant 1\}$都为$(\Omega,\mathscr{F})$上的可测函数。

(1) fg为可测函数；

(2) 若$f+g$处处有意义，则$f+g$为可测函数；

(3) 若f/g处处有意义，则f/g为可测函数；

(4) $\inf\limits_n f_n$，$\sup\limits_n f_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$及$\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$均为可测函数；

(5) $[f=g]$及$[f\leqslant g]$为可测集。

证 (1)首先假定f及g为非负可测函数，则$\forall a\in R$，$a>0$有

$$[fg<a]=[f=0]\cup[g=0]\cup\left(\bigcup_{r\in Q+}[f<r]\right)\cap\left[g<\frac{a}{r}\right]\in\mathscr{F}$$

故fg为可测函数。对一般的可测函数f及g，令

$$f^+=f\vee 0,\qquad f^-=(-f)\vee 0$$

显然f^+及f^-为可测函数。于是fg的可测性由下式及(2)推得

$$fg=(f^+-f^-)(g^+-g^-)=(f^+g^++f^-g^-)-(f^+g^-+f^-g^+)$$

(2) 由命题1.5的证明看出。

(3) 设$|g|>0$处处成立，则易知$\dfrac{1}{g}$为可测函数。若f/g处处有意义，则$\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$，故$f/g$为可测函数。

(4) $\forall a\in R$，我们有

$$[\inf_n f_n<a]=\bigcup_n[f_n<a],[\sup_n f_n\leqslant a]=\bigcap_n[f_n\leqslant a]$$

从而$\inf\limits_n f_n$及$\sup\limits_n f_n$可测。由此推知$\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$及$\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$可测。

(5) 令$f_n=(f\wedge n)\vee(-n)$，$g_n=(g\wedge n)\vee(-n)$，则

$$[f=g]=\bigcap_n[f_n=g_n],\qquad [f\leqslant g]=\bigcap_n[f_n\leqslant g_n].$$

由于 $[f_n=g_n]=[f_n-g_n=0]$，$[f_n\leqslant g_n]=[f_n-g_n\leqslant 0]$，从而

$[f=g]$及$[f\leqslant g]$为可测集。

下面我们研究可测函数的构造。

1.7 定义 设$A\subset\Omega$，令

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$$

称I_A为集A的**示性函数**。设f为Ω上的一实值函数，若f只取有限多个值，称f为**简单函数**。

设f为简单函数，其值域为$\{a_1,\cdots,a_n\}$。令$A_i=f^{-1}(\{a_i\})$，$i=1,\cdots,n$，则$f=\sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$，这时，设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，则$f$为可测的，当且仅当每个$A_i$为$\mathscr{F}$-可测集。

1.8 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，f为一可测函数。

(1) 存在一简单可测函数序列$(f_n, n\geqslant 1)$，使得$|f_n|\leqslant|f|$，$\forall n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。

(2) 若f非负，则存在非负简单可测函数的增序列(f_n)，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。

证 将f表为f^+-f^-，易知(1)是(2)的推论。往证(2)。对$n\geqslant 1$，令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\right]}+nI_{[f\geqslant n]},$$

则f_n为非负简单可测函数，且$f_n\uparrow f$。

下一定理是上一定理的简单推论，它在今后常被引用。

1.9 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，$\mathscr{C}$为生成$\mathscr{F}$的一个代数。令$\mathscr{H}$为Ω上的一族非负实值函数。如果它满足下列条件：

(1) $f, g\in\mathscr{H}$，$\alpha, \beta\geqslant 0\Rightarrow\alpha f+\beta g\in\mathscr{H}$；

(2) $f_n\in\mathscr{H}$，$n\geqslant 1$，$f_n\uparrow f$且f有限(相应地，有界)或$f_n\downarrow f$

$\Rightarrow f \in \mathscr{H}$；

(3) $\forall A \in \mathscr{C}$，$I_A \in \mathscr{H}$；

则$\mathscr{C}$包含Ω上的所有非负实值(相应地，有界)$\mathscr{F}$-可测函数。

证 令$\mathscr{I}=\{A \in \mathscr{F}: I_A \in \mathscr{H}\}$，则由(3)知$\mathscr{I} \supset \mathscr{C}$，且由(2)知$\mathscr{I}$为单调类，故由单调类定理知$\mathscr{I}=\mathscr{F}$。于是由(1)、(2)及定理1.8推得定理的结论。

1.10 定义 设$(E, \mathscr{E})$为一可测空间，$\mathscr{H}$为Ω到E中的一族映射。令

$$\mathscr{F}=\sigma\left\{\bigcup_{f \in \mathscr{H}} f^{-1}(\mathscr{E})\right\},$$

则$\mathscr{F}$为使$\mathscr{H}$中所有元素为可测的最小σ-代数。我们称$\mathscr{F}$为函数族$\mathscr{H}$在Ω上**诱导的σ-代数**。特别，若$(E,\mathscr{E})=(\overline{R},\mathscr{B}(\overline{R}))$，我们常用$\sigma\{f: f \in \mathscr{H}\}$表示这一$\sigma$-代数$\mathscr{F}$。

下一定理给出了$\sigma(f)$-可测函数的一个刻画。

1.11 定理 设f为Ω到一可测空间$(E, \mathscr{E})$中的映射，$\sigma(f)$为f在Ω上诱导的σ-代数(即$\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{E})$)，则为要$\Omega$上的一数值函数$\varphi$为$\sigma(f)$-可测，必须且只需存在$E$上的一$\mathscr{E}$可测函数$h$，使得$\varphi=h \circ f$(这里$h \circ f$表示$h$与$f$的复合，即$h \circ f(\omega)=h(f(\omega))$，$\omega \in \Omega$)。如果$\varphi$为实值(相应地，有界)$\sigma(f)$-可测，则$h$可取为实值(相应地，有界)函数。

证 充分性显然(见下面的习题1.13)。下证必要性。设$A \in \sigma(f)$，则存在$B \in \mathscr{E}$，使$A=f^{-1}(B)$，即有$I_A=I_B \circ f$，于是对任一$\sigma(f)$-可测简单函数φ，存在E上$\mathscr{E}$-可测函数h，使得$\varphi=h \circ f$。现设φ为一$\sigma(f)$-可测函数，由定理1.8，存在一列$\sigma(f)$-可测简单函数φ_n，使$\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n=\varphi$。由上所证，存在一列$E$上$\mathscr{E}$-可测实值函数$h_n$，使$\varphi_n=h_n \circ f$。令$h=\varlimsup\limits_{n \to \infty} h_n$，则$\varphi=h \circ f$。若进一步$\varphi$为实值(相应地，存在一常数$c>0$，使得$|\varphi| \leqslant c$)，令$h'=hI[|h|<\infty]$(相应地，令$h'=h^+ \wedge c-h^- \wedge c$)，则$\varphi=h' \circ f$。

定理证毕。

习题

1.12 设$(E,\mathscr{E})$为一可测空间，$\mathscr{C}$为生成$\mathscr{E}$的一集类。设$\mathscr{H}$为Ω到E中的一族映射，$\mathscr{F}$为$\mathscr{H}$在Ω上诱导的σ-代数，则

$$\mathscr{F}=\sigma\left\{\bigcup_{f\in\mathscr{H}}f^{-1}(\mathscr{C})\right\}.$$

此外，设φ为$\mathscr{F}$-可测函数，则存在$\mathscr{H}$的可数子族$\mathscr{H}_0=\{f_1, f_2,\cdots\}$，使得$\varphi$为$\mathscr{F}_0$可测，其中$\mathscr{F}_0$为$\mathscr{H}_0$在$\Omega$上诱导的$\sigma$-代数.

1.13 设$(\Omega,\ \mathscr{F})$，$(E,\mathscr{E})$及$(G,\ \mathscr{G})$为可测空间，f为Ω到E中的$\mathscr{F}$-可测映射，h为E到G中的$\mathscr{E}$-可测映射。令$\varphi=h\circ f$，则φ为Ω到G中的$\mathscr{F}$-可测映射。

11.4 设f为$(\Omega,\ \mathscr{F})$上的一有界可测函数，则存在简单可测函数序列$(f_n,\ n\geqslant1)$，使得$|f_n|\leqslant|f|$，$n\geqslant1$，且f_n一致收敛于f。

1.15 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，$\mathscr{C}=\{A_1,A_2,\cdots\}$为$\Omega$的一个可数划分（即$A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，$\sum_i A_i=\Omega$）。令$\mathscr{I}=\sigma\{\mathscr{F}\cup\mathscr{C}\}$，则

(1) $\mathscr{I}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cap B_i:\ B_i\in\mathscr{F},\ i\geqslant1\right\}$

(2) 设g为Ω上一$\mathscr{I}$-可测实值函数，则存在一列$\mathscr{F}$-可测实值函数$(f_n,n\geqslant1)$，使得$g=\sum_{i=1}^{\infty}f_iI_{A_i}$.

1.16 设Ω为一距离空间，$\mathscr{B}(\Omega)$为Ω上的Borel σ-代数。令$\mathscr{C}_b(\Omega)$表示Ω上的有界连续函数全体。试证$\mathscr{B}(\Omega)=\sigma\{f:f\in\mathscr{C}_b(\Omega)\}$。

1.17 设$f_1,\cdots f_m$为R上的实值Borel函数。试证$(f_1,\cdots f_m)$

为$(R^m, \mathscr{B}(R^m))$到$(R^m, \mathscr{B}(R^m))$中的可测映射（提示：利用命题1.3）。

§2 单调类定理（函数形式）

设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间。有时我们只知道有一类$\mathscr{F}$-可测函数满足某一性质，而希望证明所有$\mathscr{F}$-可测函数满足该性质。这时我们就要用到函数形式的单调类定理。

下一定理是与第一章定理2.2(2)相应的函数形式。对大多数情形，这一定理已够用了。

2.1 定理 设$\mathscr{C}$为Ω上的一π类，$\mathscr{H}$为由Ω上的一些实值函数构成的线性空间。如果下列条件被满足：

(1) $1\in\mathscr{H}$

(2) $f_n\in\mathscr{H}$，$n\geqslant1$，$0\leqslant f_n\uparrow f$，且f有限（相应地，有界）$\Rightarrow f\in\mathscr{H}$；

(3) $\forall A\in\mathscr{C}$，$I_A\in\mathscr{H}$，

则$\mathscr{H}$包含Ω上的所有$\sigma(\mathscr{C})$-可测实值（相应地，有界）函数。

证 令$\mathscr{F}=\{A\subset\Omega: I_A\in\mathscr{H}\}$，则易知$\mathscr{F}$为$\lambda$-类，且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$。于是由第一章定理2.2.(2)知$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$。设$f$为$\sigma(\mathscr{C})$-可测实值（相应地，有界）函数，令

$$g_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f^+<\frac{k+1}{2^n}\right]}+nI_{[f^+\geqslant n]},$$

则$g_n\in\mathscr{H}$，$g_n\uparrow f^+$，从而由(2)知$f^+\in\mathscr{H}$。同理$f^-\in\mathscr{H}$，故$f=f^+-f^-\in\mathscr{H}$，定理证毕。

下面我们着手推广定理2.1。为此，首先引进λ-族概念，它是λ-类概念在函数情形下的类似物。

2.2 定义 设$\mathscr{H}$为Ω上的一族非负有界函数，称$\mathscr{H}$为**λ-族**。如果它满足下列条件：

(1) $1\in\mathscr{H}$;

(2) $f\in\mathscr{H}$, $a\in R_+\Rightarrow af\in\mathscr{H}$;

(3) $f,g\in\mathscr{H}$, $f\geqslant g\Rightarrow f-g\in\mathscr{H}$;

(4) $f_n\in\mathscr{H}$, $n\geqslant1$, $f_n\uparrow f$, 且f有界$\Rightarrow f\in\mathscr{H}$.

设$\mathscr{C}$为Ω上的一族非负有界函数，我们用$\bigwedge(\mathscr{C})$表示包含$\mathscr{C}$的最小λ-族，并称$\bigwedge(\mathscr{C})$为由$\mathscr{C}$生成的λ-族。

2.3 注 设$\mathscr{H}$为λ-族，则$\mathscr{H}$有如下性质：

(5) $f,g\in\mathscr{H}\Rightarrow f+g\in\mathscr{H}$.

事实上，设C为一常数，使得$f+g\leqslant C$，则由(3)知

$$f+g=C-[(C-f)-g]\in\mathscr{H}.$$

下一定理是与第一章定理2.4.(2)相应的函数形式。

2.4 定理 设$\mathscr{C}$为Ω上的一族非负有界函数。我们用$\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$表示非负有界$\sigma(f: f\in\mathscr{C})$-可测函数全体。则下列二断言等价：

(1) $\bigwedge(\mathscr{C})=\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$;

(2) $f,\ g\in\mathscr{C}\Rightarrow fg\in\bigwedge(\mathscr{C})$.

特别，若$\mathscr{C}$为λ-族，且对乘积运算封闭，则$\mathscr{C}=\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$.

证 只需证(2)$\Rightarrow$(1)。设(2)成立，令

$$\mathscr{G}_1=\{f\in\bigwedge(\mathscr{C}): \forall g\in\mathscr{C},\ fg\in\bigwedge(\mathscr{C})\}$$

则易见$\mathscr{G}_1$为λ-族，且$\mathscr{G}_1\supset\mathscr{C}$，故有$\mathscr{G}_1=\bigwedge(\mathscr{C})$。再令

$$\mathscr{G}_2=\{f\in\bigwedge(\mathscr{C}): \forall g\in\bigwedge(\mathscr{C}),\ fg\in\bigwedge(\mathscr{C})\},$$

则$\mathscr{G}_2$为λ-族，且$\mathscr{G}_2\supset\mathscr{C}$(因有$\mathscr{G}_1=\bigwedge(\mathscr{C})$)，故有$\mathscr{G}_2=\bigwedge(\mathscr{C})$.

这表明$\bigwedge(\mathscr{C})$对乘积运算封闭。令

$$\mathscr{F}=\{A\subset\Omega: I_A\in\bigwedge(\mathscr{C})\},$$

则$\mathscr{F}$既为λ-类又为π-类，故$\mathscr{F}$为一σ-代数。

往证$\bigwedge(\mathscr{C})$对取有限下端运算封闭。设$f,g\in\bigwedge(\mathscr{C})$，为证$f\wedge g\in\bigwedge(\mathscr{C})$，不妨假定$f\leqslant1$，$g\leqslant1$。于是有$|f-g|\leqslant1$，且有

$$(f-g)=f^2+g^2-2fg\in\bigwedge(\mathscr{C}).$$

我们将用到如下事实(请读者自行证明)：设 $|x|\leqslant 1$，令 $P_0(x)=0$，

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}(x^2-P_n(x)^2),\quad n\geqslant 0,$$

则 $P_n(x)\uparrow|x|$。于是，由于

$$P_1(f-g)=\frac{1}{2}(f-g)^2\in\bigwedge(\mathscr{C}),$$

故由归纳法知 $P_n(f-g)\in\bigwedge(\mathscr{C})$，$n\geqslant 1$. 从而由 λ-族的性质(4)知 $|f-g|\in\bigwedge(\mathscr{C})$。最终我们有

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)\in\bigwedge(\mathscr{C}).$$

现设 $f\in\mathscr{C}$，$\alpha>0$ 为一实数。则由上所证，$\frac{f}{\alpha}\wedge 1=\frac{1}{\alpha}(f\wedge\alpha)\in\bigwedge(\mathscr{C})$，故 $1-\left(\frac{f}{\alpha}\wedge 1\right)^n\in\bigwedge(\mathscr{C})$。从而有

$$1-\left(\frac{f}{\alpha}\wedge 1\right)^n\uparrow I_{[f<\alpha]}\in\bigwedge(\mathscr{C}).$$

这表明 $[f<\alpha]\in\mathscr{F}$。因此 f 为 $\mathscr{F}$-可测。由定义 1.10 知 $\sigma(f:f\in\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$。

最后，设 $f\in\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$，令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\right]}+nI_{[f\geqslant n]},$$

则由于 $I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\right]}\in\bigwedge(\mathscr{C})$，故 $f_n\in\bigwedge(\mathscr{C})$，$f_n\uparrow f\in\bigwedge(\mathscr{C})$，这表明 $\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})\subset\bigwedge(\mathscr{C})$。但相反的包含关系恒成立，故有 $\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})=\bigwedge(\mathscr{C})$。定理证毕。

作为推论，我们得到定理 2.1 的如下推广：

2.5 定理 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一族非负有界函数，且对乘积运算

封闭。若$\mathscr{H}$为一λ-族，且包含$\mathscr{C}$，则$\mathscr{H}$包含一切非负有界$\sigma(f:f\in\mathscr{C})$-可测函数。

下面我们将给出其它形式的单调类定理，它们是第一章定理2.3(1)的函数形式。

2.6 定义 设$\mathscr{H}$为Ω上的一有界函数族．称$\mathscr{H}$为**单调族**，如果它对一致有界单调序列极限封闭。

设$\mathscr{C}$为Ω上的一有界函数族．我们用$M(\mathscr{C})$表示包含$\mathscr{C}$的最小单调族，用$\mathscr{L}_b(\mathscr{C})$表示有界$\sigma(f:f\in\mathscr{C})$-可测函数全体。

2.7 定理 设$\mathscr{C}$为Ω上的一有界函数族．则下列二条件等价：

(1) $M(\mathscr{C})=\mathscr{L}_b(\mathscr{C})$；

(2) $1\in M(\mathscr{C})$；$f\in\mathscr{C}$，$a\in R\Rightarrow af\in M(\mathscr{C})$；

$$f,g\in\mathscr{C}\Rightarrow f+g\in M(\mathscr{C}),\ f\wedge g\in M(\mathscr{C}).$$

证 只需证(2)⇒(1)。设(2)成立，令

$$\mathscr{H}_1=\{f\in M(\mathscr{C}):\ \forall a\in R,\ af\in M(\mathscr{C});\ \forall g\in\mathscr{C},\ f+g,\ f\wedge g\in M(\mathscr{C})\}$$

则$\mathscr{H}_1$为单调族，且$\mathscr{H}_1\supset\mathscr{C}$，故$\mathscr{H}_1=M(\mathscr{C})$。再令

$$\mathscr{H}_2=\{f\in M(\mathscr{C}):\ \forall g\in M(\mathscr{C}),\ f+g,\ f\wedge g\in M(\mathscr{C})\},$$

则$\mathscr{H}_2$为单调族，且$\mathscr{H}_2\supset\mathscr{C}$（因为$\mathscr{H}_1=M(\mathscr{C})$），故$\mathscr{H}_2=M(\mathscr{C})$．由上所证，$M(\mathscr{C})$为一线性空间，且对有限下端运算封闭（从而也对有限上端运算封闭）。此外，依假定$1\in M(\mathscr{C})$，令

$$\mathscr{F}=\{A\subset\Omega:\ I_A\in M(B)\},$$

则$\mathscr{F}$为Ω上的一ρ-代数．

往证$\mathscr{C}$中每个元为$\mathscr{F}$可测。设$f\in\mathscr{C}$，$a\in R$，令$f_n=n(f-a)^+\wedge 1$，则$f_n\in M(\mathscr{C})$，且$f_n\uparrow I_{[f>a]}$．故$I_{[f>a]}\in M(\mathscr{C})$，即有$[f>a]\in\mathscr{F}$。这表明$f$为$\mathscr{F}$可测，于是$\sigma(f:f\in\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$。

最后，设$f\in\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$，令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{\left[\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\right]} + nI_{[f\geqslant n]}$$

则由于 $M(\mathscr{C})$ 为线性空间，故 $f_n \in M(\mathscr{C})$。但 $f_n \uparrow f$，于是 $f \in M(\mathscr{C})$，这表明 $\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C}) \subset M(\mathscr{C})$，因此有 $\mathscr{L}_b(\mathscr{C}) \subset M(\mathscr{C})$。但相反的包含关系恒成立，故有 $M(\mathscr{C}) = \mathscr{L}_b(\mathscr{C})$。定理证毕。

作为定理的一个有用的推论，我们有

2.8 定理 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一有界函数的单调族，$\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{H}$ 的一子族。则 $\mathscr{H} \supset \mathscr{L}_b(\mathscr{C})$，如果下列条件之一被满足：

（1）$\mathscr{H}$ 为线性空间，$1 \in \mathscr{H}$，且 $\mathscr{C}$ 对乘积运算封闭；

（2）$\mathscr{C}$ 为一代数（即 $\mathscr{C}$ 为一线性空间，且对乘积运算封闭），且存在 $\mathscr{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1；

（3）$\mathscr{C}$ 为一线性空间，$\mathscr{C}$ 对有限下端运算封闭，且存在 $\mathscr{C}$ 中某个一致有界的单调序列，其极限为 1.

证 设(1)成立。令 $\mathscr{D}$ 为由 1 和 $\mathscr{C}$ 生成的代数，则 $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$，从而 $M(\mathscr{D}) \subset \mathscr{H}$。易证 $M(\mathscr{C})$ 为一线性空间（见习题 2.9）。设 $f \in \mathscr{D}$，且 $|f| \leqslant 1$，采用定理 2.4 的证明中的记号，令 $f_n = P_n(f)$，则 $f_n \in \mathscr{D}$，且 $0 \leqslant f_n \uparrow |f|$，故 $|f| \in M(\mathscr{D})$。于是对一般的 $f \in \mathscr{D}$，亦有 $|f| \in M(\mathscr{D})$。设 $f, g \in \mathscr{D}$，则有

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in M(\mathscr{D}).$$

故由定理 2.7 知：$\mathscr{L}_b(\mathscr{D}) = M(\mathscr{D})$。但显然有 $\mathscr{L}_b(\mathscr{D}) = \mathscr{L}_b(\mathscr{C})$，故最终有 $\mathscr{L}_b(\mathscr{C}) = M(\mathscr{D}) \subset \mathscr{H}$。

设(2)成立，则 $1 \in M(\mathscr{C})$，$M(\mathscr{C}) \subset \mathscr{H}$，且 $M(\mathscr{C})$ 为一线性空间。余下证明同上。

设(3)成立，则定理 2.7 的条件 (2) 被满足，故有 $\mathscr{L}_b(\mathscr{C}) = M(\mathscr{C}) \subset \mathscr{H}$。

习题

2.9 设 $\mathscr{C}$ 为 Ω 上的一有界函数族。若 $\mathscr{C}$ 为线性空间，则

$M(\mathscr{B})$亦为线性空间。

2.10 设$\mathscr{C}$为Ω上的一非负有界函数族，则下列二条件等价：

(1) $M(\mathscr{C})=\mathscr{L}_b^+(\mathscr{C})$；

(2) $f,g\in\mathscr{C}\Rightarrow f\wedge g\in M(\mathscr{C})$；$f\in\mathscr{C}$，$a\in R_+\Rightarrow af$，$a-f\wedge a\in M(\mathscr{C})$。

2.11 （定理2.1的另一种形式）设$\mathscr{C}$为Ω上的一π-类，$\mathscr{H}$为Ω上的一非负实值函数族。如果下列条件被满足：

(1) $1\in R$；

(2) $f\in\mathscr{H}$，$a\in R_+\Rightarrow af\in\mathscr{H}$；$f,g\in\mathscr{H}$，$f\geqslant g\Rightarrow f-g\in\mathscr{H}$；

(3) $f_n\in\mathscr{H}$，$n\geqslant1$，$0\leqslant f_n\uparrow f$，且f有限（相应地，有界）$\Rightarrow f\in\mathscr{H}$；

(4) $\forall A\in\mathscr{C}$，$I_A\in\mathscr{H}$。

则$\mathscr{H}$包含Ω上的所有非负$\sigma(\mathscr{C})$-可测实值（相应地，有界）函数。

§3 可测函数序列的几种收敛性

设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间。本节将研究$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$上实值可测函数序列的几种收敛性及它们之间的关系。为了叙述的方便，我们将采用如下术语：如果某一性质在Ω上除了一零测度集外成立，则称它几乎处处成立，简称为$a.e.$成立。

3.1 定义 设$(f_n)_{n\geqslant1}$，f均为实值可测函数。

(1) 如果存在一零测集N，使得对一切$\omega\in N^C$有$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)$，则称$(f_n)$**几乎处处收敛于**$f$（或称$(f_n)$ $a.e.$收敛于f），并记为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\ a.e.$，或$f_n\xrightarrow{a.e.}f$。

(2) 如果对任给$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathscr{F}$，$\mu(N)<\varepsilon$，使得(f_n)在N^C上一致收敛于f，则称(f_n)**几乎一致收敛于**f，并记为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n$

$=f\ a.un.$，或 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$。

(3) 如果对任给 $\varepsilon>0$，$\lim\mu([|f_n-f|>\varepsilon])=0$，则称$(f_n)$ **依测度收敛于** f，并记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$。

更一般地，对一定向列(f_α)也可定义上述几种收敛概念，特别，对双指标序列(f_{nm})可以有上述收敛概念。

3.2 定义 设(f_n)为一列实值可测函数。如果(f_n-f_m) $a.e.$收敛于0(当 n，$m\to\infty$)，则称(f_n)为 $a.e.$ 收敛**基本列**。类似可定义其它各类收敛的基本列。

3.3 注 由定义看出，上述各类收敛的极限是 $a.e.$ 唯一确定的。例如：设 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$f_n\xrightarrow{a.e.}g$，则 $f=g, a.e.$。另一方面，设 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$f=g$，$a.e.$，则 $f_n\xrightarrow{a.e.}g$。此外，对各类收敛序列(f_n)，若对每个 n，用一与 f_n $a.e.$ 相等的实值可测函数 g_n 代替 f_n，则(g_n)亦为同类收敛序列，其极限与(f_n)的极限 $a.e.$ 相等。

下一定理给出了上述几种收敛性的刻画。

3.4 定理 设(f_n)及 f 均为实值可测函数。

(1) $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，当且仅当 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0 \tag{3.1}$$

(2) $f_n\xrightarrow{a.un.}f$，当且仅当 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0 \tag{3.2}$$

(3) $f_n\xrightarrow{\mu}f$，当且仅当对(f_n)的任何子列$(f_{n'})$，存在其子列$(f_{n'_k})$，使得 $f_{n'_k}\xrightarrow{a.un.}f$，$(k\to\infty)$。

证 (1)设(a_n)为实数列，a为一实数。则要使$a_n\to a$，必须且只需对每个$k\geq 1$，存在自然数$n(k)$，使得当$i\geq n(k)$时有$|a_i-a|<\frac{1}{k}$。因此我们有

$$\{\omega: f_n(\omega)\to f(\omega)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\left[|f_i-f|<\frac{1}{k}\right].$$

于是，$f_n\xrightarrow[i]{a.e.}f$，当且仅当

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}\left[|f_i-f|\geq\frac{1}{k}\right]\right)=0,$$

即$\forall k\geq 1$有

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}\left[|f_i-f|\geq\frac{1}{k}\right]\right)=0$$

(1)得证。

(2) 必要性：设$f_n\xrightarrow{a.un.}f$。则$\forall\delta>0$，$\exists F\in\mathscr{F}$，$\mu(F)<\delta$，使f_n在F^c上一致收敛于f，于是$\forall\varepsilon>0$，存在N，使得当$i\geq N$时，有

$$|f_i(\omega)-f(\omega)|<\varepsilon,\ \omega\in F^c.$$

因此，$\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}[|f_i-f|\geq\varepsilon]\subset F$，特别有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geq\varepsilon]\right)\leq\mu(F)<\delta.$$

但$\delta>0$是任意的，故$\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}[|f_i-f|\geq\varepsilon]\right)=0$.必要性得证.

下证充分性。设对任给$\varepsilon>0$有(3.2)成立.则$\forall\delta>0,\forall k\geq 1$，$\exists n(k)$，使得

$$\mu\left(\bigcup_{i=n(k)}^{\infty}\left(|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)<\frac{\delta}{2^k}.$$

令

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=n(k)}^{\infty}\left[|f_i-f|\geqslant\frac{1}{k}\right],$$

则 $\mu(F)<\delta$，且有

$$F^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=n(k)}^{\infty}\left[|f_i-f|<\frac{1}{k}\right).$$

这表明在 F^c 上 f_n 一致收敛于 f. 依定义，$f_n\xrightarrow{a.un.}f$.

(3) 必要性：设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 令 $(f_{n'})$ 为 (f_n) 的一子列，则仍有 $f_{n'}\xrightarrow{\mu}f$。于是由测度收敛的定义，存在 $(f_{n'})$ 的子列 $(f_{n'_k})$，使得

$$\mu\left(\left[|f_{n'_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)\leqslant\frac{1}{2^k},\quad\forall k\geqslant 1.$$

于是，$\forall m\geqslant 1$，我们有

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}\left[f_{n'_k}-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2_k}=\frac{1}{2^{m-1}}.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，与 $(f_{n'_k})$ 相应的(3.2)成立，从而 $f_{n'_k}\xrightarrow{a.un.}f$.

下证充分性。我们用反证法。假定 (f_n) 不依测度 μ 收敛于 f，则存在某 $\varepsilon>0$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu([|f_n-f|\geqslant\varepsilon])>\delta>0\,.$$

于是，存在 (f_n) 的子列 $(f_{n'})$，使得对一切 n' 有 $\mu([|f_{n'}-f|\geqslant\varepsilon])>\delta$。显然 $(f_{n'})$ 不包含几乎一致收敛的子列. 充分性得证.

3.5 系 我们有 $f_n\xrightarrow{a.un.}f\Rightarrow f_n\xrightarrow{a.e.}f$.

证 直接由(3.2)⇒(3.1)看出，该系的结论亦可从定义 3.1 推出。

设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，则由定理 3.4.(3)及系 3.5 知：存在子列(f_{n_k})，使 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$。

下一定理通常称为 **Egoroff 定理**。

3.6 定理 设 μ 为有限测度，则有

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{a.un.} f.$$

证 设$f_n \xrightarrow{a.e.} f$。由定理3.4，$\forall \varepsilon>0$，有(3.1)成立。于是由有限测度的从上连续性(第一章定理 3.3)知(3.2)成立，故有 $f_n \xrightarrow{a.un.} f$。

3.7 定理 我们有 $f_n \xrightarrow{a.un.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$。若 μ 为有限测度，则进一步有$f_n \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$。

证 前一结论直接由定理 3.4 的(3)推得，后一结论由定理 3.6推得。

定理 3.4(3) 给出了依测度收敛的一个有用刻画，下一定理进一步给出了有限测度空间中依测度收敛的一个非常有用的刻画。

3.8 定理 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一有限测度空间，$f_n$，$f$为实值可测函数。则为要 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，必须且只需对(f_n)的任一子列$(f_{n'})$，存在其子列$(f_{n'_k})$，使$f_{n'_k} \xrightarrow{a.e.} f$。

证 由于假定 μ 是有测度，故由系 3.5 及定理3.6知 $f_n \xrightarrow{a.e.} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{a.un.} f$，因此定理的结论直接从定理 3.4.(3)推得。

作为定理 3.4.(3)及定理 3.8 的一个应用，我们有如下的

3.9 定理 设 g 为 R^m 上一实值 Borel 可测函数，D 为 R^m 的一子集。又设$(f_n^{(i)})_{n\geq 1}$为实值可测函数序列，$f^{(i)}$ 为实值可测函数，$i=1$，…，m。假定$f_n^{(i)}$及$f^{(i)}$在D中取值，且对 $1\leq i\leq m$，$f_n^{(i)}\xrightarrow{\mu}f^{(i)}$。则有如下结论：

(1) 设$g(x_1,\cdots,x_m)$为 D 上的一致连续函数，则 $g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})$。

(2) 设 $g(x_1,\cdots,x_m)$为 D 上的连续函数，若μ 为有限测度，则 $g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})$。

证 往证(1)。首先，由 1.17 及 1.13 知 $g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})$为实值可测函数。设$(n')$为自然数列的一子序列，由定理 3.4.(3)，并利用对角线法则，可取(n')的子列(n'_k)，使得对每个 i：$1\leq i\leq m$ 有，$f_{n'_k}^{(i)}\xrightarrow{a.un.}f^{(i)}$。由于 g 在 D 上一致连续，故易见。

$$g\left(f_{n'_k}^{(1)},\cdots,f_{n'_k}^{(m)}\right)\xrightarrow{a.un.}g(f^{(1)},\cdots,f^{(m)}).$$

因此，由定理 3.4.(3)知，$g(f_n^{(1)},\cdots,f_n^{(m)})\xrightarrow{\mu}(f^{(1)},\cdots,f^{(m)})$。(1)得证。(2)的证明完全类似(利用定理3.8)。

习题

3.10 设(f_n)为一实值可测函数序列。则为要$(f_n)a.e.$(相应地，$a.un.$或依测度 μ)收敛于某 f，必须且只需(f_n)为相应的收敛基本列。

3.11 举例说明：若 $\mu(\Omega)=\infty$，则 μ 几乎处处收敛的序列不一定依测度收敛。

3.12 设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则有$\varliminf_{n\to\infty} f_n\leq f\leq\varlimsup_{n\to\infty} f_n$ $a.e.$

3.13 设 μ 为有限测度，则

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow \frac{f_n}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{1+|f|}$$

(提示：利用定理 3.9)。

第三章　积分与空间 L^p

§1　积分的定义及基本性质

在本节中我们在某一给定的测度空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$中讨论问题。我们用$\mathscr{S}^+$表示$\Omega$上$\mathscr{F}$-可测的非负简单函数全体，用$\mathscr{L}$（相应地，$\overline{\mathscr{L}}$）表示$\Omega$上$\mathscr{F}$-可测的实值（相应地，数值）函数全体。可测数值函数简称为可测函数。

首先，我们定义非负简单可测函数关于测度μ的积分。

1.1 定义　设$f=\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i} \in \mathscr{S}^+$，其中$a_i \in R_+$，$A_i \in \mathscr{F}$。令

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

易证$\int_{\Omega} f d\mu$不依赖于f的具体表达。我们称$\int_{\Omega} f d\mu$为**f关于μ的积分**。通常，我们用$\mu(f)$简记$\int_{\Omega} f d\mu$。

下一命题罗列了这一积分的基本性质。

1.2 命题　以下f_n，g_n，f，g都是$\mathscr{S}^+$中元素。

(1) $\mu(I_A)=\mu(A)$，$\forall A \in \mathscr{F}$；

(2) $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f)$，$\forall \alpha \in R_+$；

(3) $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$；

(4) $f \leqslant g \Rightarrow \mu(f) \leqslant \mu(g)$；

(5) $f_n \downarrow f$，$\mu(f_1)<\infty \Rightarrow \mu(f_n) \downarrow \mu(f)$；

(6) $f_n \uparrow f \Rightarrow \mu(f_n) \uparrow \mu(f)$；

(7) $f_n\uparrow$，$g_n\uparrow$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} g_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)$。

证 (1)-(4) 显然。下证(5)。令 $g_n=f_n-f$，则$g_n\in\mathscr{S}^+$，$g_n\downarrow 0$，且 $\mu(g_1)\leqslant\mu(f_1)<\infty$。令

$$\beta=\sup\{g_1(\omega):\ \omega\in\Omega\}.$$

则 $\forall\varepsilon>0$，我们有

$$0\leqslant g_n\leqslant\beta I_{[g_n>\varepsilon]}+\varepsilon I_{[0<g_n\leqslant\varepsilon]}\leqslant\beta I_{[g_n>\varepsilon]}+\varepsilon I_{[g_1>0]}.$$

由(4)得

$$\mu(g_n)\leqslant\beta\mu([g_n>\varepsilon])+\varepsilon\mu([g_1>0]).$$

由于$[g_n>\varepsilon]\downarrow\phi$，且 $\mu([g_1>\varepsilon])\leqslant\mu([g_1>0])<\infty$(因 $\mu(g_1)<\infty$)，故由测度的从上连续性知 $\mu([g_n>\varepsilon])\downarrow 0$。于是有$\lim\limits_{n}\mu(g_n)\leqslant\varepsilon\mu([g_1>0])$。但 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有 $\mu(g_n)\downarrow 0$。最终有 $\mu(f_n)=\mu(g_n)+\mu(f)\downarrow\mu(f)$，(5)得证。

现证(6)。若 $\mu(f)=+\infty$，则 $\mu(f>0)=\infty$。由于 f 只取有限多个值，故存在 $a>0$，使 $\mu([f=a])=\infty$。我们有$\left[f_n>\frac{a}{2}\right]\uparrow\left[f>\frac{a}{2}\right]$，$f_n\geqslant\frac{a}{2}I_{[f_n>\frac{a}{2}]}$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)\geqslant\frac{a}{2}\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left[f_n>\frac{a}{2}\right]\right)=\frac{a}{2}\mu\left[f>\frac{a}{2}\right]=\infty.$$

于是 $\mu(f_n)\uparrow\mu(f)$。若 $\mu(f)<\infty$，令 $g_n=f-f_n$，则由(5)知 $\mu(g_n)\downarrow 0$，故 $\mu(f_n)=\mu(f)-\mu(g_n)\uparrow\mu(f)$。(6)得证。

最后证明(7)。先固定某个 m，令 $h_n=g_n\wedge f_m$，则 $h_n\in\mathscr{S}^+$，$h_n\uparrow f_m\in\mathscr{S}^+$，故由(6)知$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(h_n)=\mu(f_m)$。但$h_n\leqslant g_n$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(g_n)\geqslant\mu(f_m)$，于是最终有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)\geqslant\lim_{m\to\infty}\mu(f_m).$$

(7)得证。

1.3 注 在上述证明中，我们用到如下事实：对$f\in\mathscr{S}^+$，有

$\mu(f)<\infty \Leftrightarrow \mu([f>0])<\infty$，但这一结论不能推广到一般非负可测函数。因此，我们未将其列为积分的基本性质。

借助于命题1.2，我们可以给出积分的一般定义。

1.4 定义 设 f 为一非负可测函数。任取 $f_n\in\mathscr{S}^+$，使 $f_n\uparrow f$（第一章定理1.8），令

$$\mu(f)=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n).$$

则由命题1.2的(4)及(7)知，上述右端极限存在，且不依赖于序列 (f_n) 的选择，我们称 $\mu(f)$ 为 f **关于 μ 的积分**。有时也用 $\int_\Omega f\,d\mu$ 表示 $\mu(f)$。

现设 f 为一可测函数。令 $f^+=f\vee 0$，$f^-=(-f)\vee 0$，若 $\mu(f^+)<\infty$ 或 $\mu(f^-)<\infty$，则令

$$\mu(f)=\mu(f^+)-\mu(f^-).$$

称 $\mu(f)$ 为 f 关于 μ 的积分，并说 f 的**积分存在**。若 $\mu(f^+)<\infty$，且 $\mu(f^-)<\infty$（或者等价地，$\mu(|f|)<\infty$），则称 f **关于 μ 可积**（简称 μ-可积）。

1.5 注 设 $f\in\overline{\mathscr{L}}$。若 f 的积分存在（相应地，f 为可积），则对任何 $A\in\mathscr{F}$，fI_A 的积分存在（相应地 fI_A 为可积）。我们用 $\int_A f d\mu$ 表示 $\int_\Omega fI_A d\mu$。

下一定理列举了积分的一些基本性质。

1.6 定理 设 $f,g\in\overline{\mathscr{L}}$（$\overline{\mathscr{L}}$表示可测函数全体）

(1) 若 f 积分存在，则 $\forall\alpha\in R$，αf 的积分存在，且 $\mu(\alpha f)=\alpha\mu(f)$；

(2) 若 f，g 积分存在，$f+g$ 处处有定义，且 $\mu(f)+\mu(g)$ 有意义（即不出现 $\infty-\infty$），则 $f+g$ 的积分存在，且有 $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$；

(3) 若 f 积分存在，则 $|\mu(f)|\leqslant\mu(|f|)$；

(4) 若 f 积分存在，N 为一零测集，则 $\mu(fI_N)=0$；

(5) 若 f，g 积分存在，且 $f\leqslant g$ $a.e.$，则 $\mu(f)\leqslant\mu(g)$；

(6) 若 $f\in\overline{\mathscr{L}}^+$，则 $f=0$，$a.e.\Leftrightarrow\mu(f)=0$；

(7) 若 $f\in\overline{\mathscr{L}}^+$，且 $\mu(f)<\infty$，则 $f<\infty$ $a.e.$，且 $[f>0]$ 关于 μ 为 σ-有限的。

证 (1)-(4) 直接由定义 1.4 推理。

下证(5)。令 $N=[f>g]$，则依假定 $\mu(N)=0$，我们有

$$f=fI_{N^c}+fI_N,\quad g=gI_{N^c}+gI_N,\quad fI_{N^c}\leqslant gI_{N^c}.$$

故由(4)知

$$\mu(f)=\mu(fI_{N^c}),\quad \mu(g)=\mu(gI_{N^c}).$$

但由积分的定义易知 $\mu(fI_{N^c})\leqslant\mu(gI_{N^c})$，从而有 $\mu(f)\leqslant\mu(g)$。

现证(6)。"$\Rightarrow$"由(5)推得，为证"$\Leftarrow$"，我们用反证法。假设 $\mu([f>0])>0$。由于 $[f>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]$，故存在某 n，使 $\mu\left(\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)>0$。我们有 $f\geqslant\frac{1}{n}I_{[f\geqslant\frac{1}{n}]}$，故有

$$\mu(f)\geqslant\frac{1}{n}\mu\left(\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)>0$$

"$\Leftarrow$"得证。

最后证明(7)。设 $f\in\overline{\mathscr{L}}^+$，假定 $\mu([f=+\infty])>0$，则由于 $f\geqslant\infty I_{[f=\infty]}$，故 $\mu(f)=\infty$，这表明 $\mu(f)<\infty\Rightarrow f<\infty$ $a.e.$。此外有 $[f>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]$，$\mu\left(\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)\leqslant n\mu(f)<\infty$，故 $[f>0]$ 为 μ-σ-有限。定理证毕。

1.7 系 (1) 设 f，g 积分存在，且 $f=g$ $a.e.$，则 $\mu(f)=\mu(g)$。

(2) 设 f 为 μ-可积，则 $|f|<\infty$，$a.e.$。

(3) 设 f，g 积分存在且 $\mu(f)+\mu(g)$ 有意义，则 $f+g$ $a.e.$ 有意义。

设 f，g 积分存在，且 $f\leqslant g$ $a.e.$，则由定理 1.6(5) 知，对一切 $A\in\mathscr{F}$ 有 $\mu(fI_A)\leqslant\mu(gI_A)$。下一命题表明：在一定条件下，该命题的逆命题成立。

1.8 命题 设 f，g 积分存在，且对一切 $A\in\mathscr{F}$，有 $\mu(fI_A)\leqslant\mu(gI_A)$。

(1) 若 f，g 可积，则 $f\leqslant g$，$a.e.$；

(2) 若 μ 为 σ- 有限测度，则 $f\leqslant g$，$a.e.$。

证 (1) $\forall A\in\mathscr{F}$，由假定

$$\mu((f-g)I_A)=\mu(fI_A)-\mu(gI_A)\leqslant 0$$

特别，令 $A=[f>g]$，则 $(f-g)I_A\geqslant 0$，故有 $\mu((f-g)I_A)\geqslant 0$，从而由上式知 $\mu((f-g)I_A)=0$。于是 $(f-g)I_A=0$，$a.e.$（定理 1.6.(6)）。由于在 A 上有 $f>g$，故必须有 $\mu(A)=0$，即有 $f\leqslant g$，$a.e.$。

(2) 设 μ 为 σ- 有限测度，我们用反证法证明 $f\leqslant g$，$a.e.$。假定 $\mu([g<f])>0$，令

$$A_n=\left[g<f-\frac{1}{n}\right]\cap[|f|<n],\ B_m=[g<m]\cap[f=+\infty]$$

则 $[g<f]=\left(\bigcup\limits_n A_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_m B_m\right)$。于是存在某 n 或 m，使 $\mu(A_n)>0$ 或 $\mu(B_m)>0$。假定 $\mu(A_n)>0$，由 μ 的 σ- 有限性知，存在 $A\subset A_n$，$A\in\mathscr{F}$，使得 $0<\mu(A)<\infty$，这时有

$$\int_A g\,d\mu\leqslant\int_A\left(f-\frac{1}{n}\right)d\mu=\int_A f\,d\mu-\frac{1}{n}\mu(A)<\int_A f\,d\mu.$$

这与假定 $\int_A f\,d\mu\leqslant\int_A g\,d\mu$ 矛盾。若 $\mu(B_m)>0$，类似论证可导致矛盾，因此必须有 $f\leqslant g$，$a.e.$。命题证毕。

1.9 系 设 f，g 积分存在，且对一切 $A\in\mathscr{F}$ 有 $\mu(fI_A)=$

$\mu(gI_A)$.

(1) 若 f, g 可积，则 $f=g$, $a.e.$;

(2) 若 μ 为 σ-有限，则 $f=g$, $a.e.$.

习题

1.10 举例说明命题1.8.(2)中关于 μ 的 σ-有限性条件不能去掉。

1.11 证明系1.7.(3)。

1.12 设 (f_n) 为一列可测函数。若 (f_n) $a.e.$ 单调增（即 $\forall n$, $f_n \leqslant f_{n+1}$ $a.e.$），则存在一处处单调增序列 (g_n)，使得 $\forall n, f_n = g_n$ $a.e.$.

1.13 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为一有限测度空间，$A_i \in \mathscr{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$。令 I 为 $\{1, \cdots, n\}$ 的非空子集，我们用 $|I|$ 表示 I 中元素的个数。试证

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \cdots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

$\left(\text{提示：用归纳法证明} \bigvee_{k=1}^{n} I_{A_k} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \cdots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \bigwedge_{i \in I} I_{A_i}\right)$

1.14 设 E 为一距离空间，$\mathscr{B}(E)$ 为其 Borel σ-代数，μ 与 ν 为 $(E, \mathscr{B}(E))$ 上的两个有限测度。若对 E 上一切有界连续函数 f 有 $\mu(f) = \nu(f)$，则 $\mu = \nu$（提示：利用第二章1.16及2.5）。

1.15 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 及 $(E, \mathscr{E})$ 为两个可测空间，f 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(E, \mathscr{E})$ 中的可测映射，μ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一测度。

(1) 令 $\mu f^{-1}(A) = \mu(f^{-1}(A))$, $A \in \mathscr{E}$。则 μf^{-1} 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的测度（通常称为由 f 在 $(E, \mathscr{E})$ 上**导出的测度**或 f 的**象测度**）。

(2) 设 g 为 $(E, \mathscr{E})$ 上的可测函数。则为要 g 关于测度 μf^{-1} 的积分存在（相应地，可积），必须且只需 $g \circ f$ 关于 μ 的积分存在（相应地，可积）。此外，这时有

$$\int_\Omega g\circ f\, d\mu = \int_E g\, d(\mu f^{-1}).$$

(提示：先讨论 g 为非负简单可测函数情形.)

§2 积分号下取极限

本节我们将介绍有关积分号下取极限的几个定理（单调收敛定理，*Fatou* 引理，控制收敛定理）。

2.1 引理 设 $f_n \in \overline{\mathscr{L}}^+$, $n\geqslant 1$, $f\in \overline{\mathscr{L}}^+$.

(1) 设 $f_n \leqslant f_{n+1}$, $a.e.$, $\forall n\geqslant 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $a.e.$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n) = \mu(f)$;

(2) 设 $f_n \geqslant f_{n+1}$, $a.e.$, $\forall n\geqslant 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ $a.e.$，若 $\mu(f_1)<\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

证 (1) 不妨设(f_n)处处单调增，且 $f_n\uparrow f$ 处处成立。对每个 n，令 $f_{n,m}\in\mathscr{S}^+$，使得 $f_{n,m}\uparrow f_n(m\to\infty)$。令 $g_m=\bigvee\limits_{i=1}^{m} f_{i,m}$，则 $g_m\in\mathscr{S}^+$，$g_m\uparrow f$，且 $g_m\leqslant f_m$，故由积分的定义有

$$\mu(f)=\lim_{m\to\infty}\mu(g_m)\leqslant \lim_{m\to\infty}\mu(f_m).$$

但恒有 $\mu(f)\geqslant\mu(f_m)$，故有 $\lim\limits_{m\to\infty}\mu(f_m)=\mu(f)$.

(2) 不妨设(f_n)处处单调降，且 $f_n\downarrow f$ 处处成立。由于假定 $\mu(f_1)<\infty$，故 $\mu([f_1=\infty])=0$。令 $\tilde{f}_n = f_n I_{[f_1<\infty]}$，$\tilde{f} = fI_{[f_1<\infty]}$，则 $\tilde{f}_n\downarrow\tilde{f}$，$\tilde{f}_n$ 为实值可测函数。令 $g_n=\tilde{f}_1-\tilde{f}_n$，则 $g_n\uparrow\tilde{f}_1-\tilde{f}$，故由(1)推知 $\mu(g_n)\uparrow\mu(\tilde{f}_1)-\mu(\tilde{f})$，即有 $\mu(f_n)=\mu(\tilde{f}_n)\downarrow\mu(\tilde{f})=\mu(f)$。证毕。

2.2 系 设 $f_n \in \overline{\mathscr{L}}^+$，$n \geqslant 1$，则有 $\mu\left(\sum_n f_n\right) = \sum_n \mu(f_n)$.

证 令 $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i, g = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$，则 $g_n \uparrow g$，故有

$$\mu(g) = \lim_{n\to\infty} \mu(g_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f_i).$$

2.3 定理（单调收敛定理） 设 $f_n \in \overline{\mathscr{L}}$，$n \geqslant 1$。又设每个 f_n 的积分存在。

(1) 设 (f_n) a.e. 单调增，且 $f_n \to f$ a.e.. 若 $\mu(f_1) > -\infty$，则 f 的积分存在，且 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$。

(2) 设 (f_n) a.e. 单调降，且 $f_n \to f$，a.e.. 若 $\mu(f_1) < \infty$，则 f 的积分存在，且 $\mu(f_n) \downarrow \mu(f)$。

证 现证(1). 我们有 f_n^+ a.e. 单调增，f_n^- a.e. 单调降，且有 $f_n^+ \xrightarrow{a.e.} f^+$，$f_n^- \xrightarrow{a.e.} f^-$. 由于 $f_1^- \geqslant f^-$，且 $\mu(f_1) > -\infty$，故 $\mu(f^-) \leqslant \mu(f_1^-) < \infty$。从而 f 的积分存在，且由引理 2.1 知：$\mu(f_n^+) \uparrow \mu(f^+)$，$\mu(f_n^-) \downarrow \mu(f^-)$. 因此有 $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$. (1)得证。对 $(-f_n)$ 应用(1)即得(2)。证毕。

2.4 定理（Fatou 引理） 设 $f_n \in \overline{\mathscr{L}}$，$n \geqslant 1$，且每个 f_n 的积分存在。

(1) 若存在 $g \in \overline{\mathscr{L}}$，$\mu(g) > -\infty$，使得 $\forall n \geqslant 1$ 有 $f_n \geqslant g$, a.e.，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 的积分存在，且有

$$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

(2) 若存在 $g \in \overline{\mathscr{L}}$，$\mu(g) < \infty$，使得 $\forall n \geqslant 1$ 有 $f_n \leqslant g$, a.e.，则 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ 的积分存在，且有

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(f_n).$$

证 现证(1). 令 $g_n=\inf_{k\geqslant n} f_k$,则 $g_n\uparrow\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$,且$g_1\geqslant g\ a.e.$.于是 $\mu(g_1)\geqslant\mu(g)>-\infty$. 故由定理 2.3(1), $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ 的积分存在,且有

$$\mu(\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(g_n)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(f_n).$$

(1)得证. 对$(-f_n)$应用(1)即得(2). 证毕.

2.5 定理(控制收敛定理) 设 $f_n\in\mathscr{L}$,且$f\in\mathscr{L}$ $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.若存在一非负可积函数 g,使得 $\forall n\geqslant1$ 有$|f_n|\leqslant g,a.e.$,则 f 可积,且有 $\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

证 由于$|f|\leqslant g$, $a.e.$,故 f 可积. 若 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$,则$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n=f,a.e.$,故定理的结论直接由定理 2.4 推得.现设$f_n\xrightarrow{\mu}f$,则对$(f_n)$的任一子列$(f_{n'})$,存在其子列$(f_{n'_k})$,使得 $f_{n'_k}\xrightarrow{a.e.}f$ (见第二章 3.4.(3)及 3.5). 于是有 $\lim_{n\to\infty}\mu(f_{n'_k})=\mu(f)$. 但子列$(f_{n'})$的选取是任意的,故必须有 $\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$,定理证毕.

下面我们着手推广定理 2.4 及 2.5.

2.6 定理 设 $f_n\in\mathscr{L}$, $f\in\mathscr{L}$,且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$.又设每个 f_n 的积分存在.

(1) 若存在 $g\in\overline{\mathscr{L}}$, $\mu(g)>-\infty$,使得 $\forall n\geqslant1,f_n\geqslant g,a.e.$,则 f 的积分存在,且有 $\mu(f)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(f_n)$.

(2) 若存在 $g\in\overline{\mathscr{L}}$，$\mu(g)<\infty$，使得 $\forall n\geqslant 1$，$f_n\leqslant g, a.e.$，则 f 的积分存在，且有 $\mu(f)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(f_n)$.

证 现证(1). 若 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则由 Fatou 引理立得(1) 的结论. 现设 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，则对(f_n)的任一子列$(f_{n'})$，存在其子列$(f_{n'_k})$，使得$f_{n'_k}\xrightarrow{a.e.}f$. 于是由上所证有 $\mu(f)\leqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}\mu(f_{n'_k})$. 但子列$(f_{n'})$的选取是任意的，故必须有 $\mu(f)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(f_n)$，(1)得证. 对$(-f_n)$应用(1)得(2). 证毕.

下一定理是控制收敛定理的推广形式.

2.7 定理 设 $f_n\in\mathscr{L}$，$f\in\mathscr{L}$，且 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$. 又设 $g_n\in\mathscr{L}^+$，$g\in\mathscr{L}^+$，且$g_n\xrightarrow{a.e.}g$ 或 $g_n\xrightarrow{\mu}g$. 如果 g 及每个 g_n 可积，$\mu(g_n)\to\mu(g)$，且$|f_n|\leqslant g_n$，$a.e.$，$\forall n\geqslant 1$，则有 $\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0$. 特别有 $\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$.

证 首先假定同时有 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$g_n\xrightarrow{a.e.}g$. 令

$$h_n=g_n+g-|f_n-f|,$$

则 $h_n\geqslant 0$，$a.e.$，且 $h_n\xrightarrow{a.e.}2g$. 故由定理 2.6.(1)得

$$2\mu(g)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu(h_n)=2\mu(g)-\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(|f_n-f|).$$

从而有 $\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0$. 特别有

$$|\mu(f_n)-\mu(f)|\leqslant\mu(|f_n-f|)\to 0.$$

若同时有 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，$g_n\xrightarrow{\mu}g$，则 $h_n\xrightarrow{\mu}2g$. 故由定理 2.6.(1)亦可推得本定理的结论. 若 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$g_n\xrightarrow{\mu}g$，或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，$g_n\xrightarrow{a.e.}g$，则与定理

2.6 的证明类似可知：对 (f_n) 的任一子列 $(f_{n'})$，存在其子列 $(f_{n'_k})$，使得同时有 $f_{n'_k}\xrightarrow{a.e.}f$，$g_{n'_k}\xrightarrow{a.e.}f$，故有 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(|f_{n'_k}-f|)=0$。因此最终有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0$。

2.8 系 设 f_n，f 为可积可测函数。则下列二条件等价：

(1) $\mu(|f_n-f|)\to 0$；

(2) $f_n\xrightarrow{\mu}f$，且 $\mu(|f_n|)\to\mu(|f|)$

证 (2)⇒(1)。设(2)成立。在定理 2.7 中令 $g_n=|f_n|$，$g=|f|$，即得(1)。现证(1)⇒(2)。设 $\mu(|f_n-f|)\to 0$，对任给 $\varepsilon>0$，令 $A_n=[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]$，则有

$$\varepsilon I_{A_n}\leqslant|f_n-f|I_{A_n}\leqslant|f_n-f|.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon\mu(A_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|)=0.$$

这表明 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，此外，我们有

$$||f_n|-|f||\leqslant|f_n-f|,$$

故有

$$|\mu(|f_n|)-\mu(|f|)|\leqslant\mu(|f_n-f|)\to 0(n\to\infty).$$

(1)⇒(2)得证。

定理 2.7 的进一步推广见习题 2.9。

习题

2.9 设 f_n，h_n，g_n，f，h，$g\in\mathscr{L}$，$h_n\leqslant f_n\leqslant g_n$，a. e.，$\forall n\geqslant 1$。又设 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 或 $f_n\xrightarrow{\mu}f$，$g_n\xrightarrow{a.e.}g$ 或 $g_n\xrightarrow{\mu}g$，$h_n\xrightarrow{a.e.}h$ 或 $h_n\xrightarrow{\mu}h$。如果 h,g,h_n,g_n 都可积，且 $\mu(h_n)\to\mu(h)$，$\mu(g_n)\to\mu(g)$，则 f 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)$（提示：不妨设 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$g_n\xrightarrow{a.e.}g$，

$h_n \xrightarrow{a.e.} h$。分别对 $f_n - h_n$ 及 $g_n - f_n$ 应用 Fatou 引理)。

2.10 如果在 2.9 中进一步有 $h_n \leqslant 0 \leqslant g_n$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_n - f|) = 0$(提示：对 $|f_n - f| \leqslant g_n - h_n + g - h$ 应用定理 2.7)。

2.11 设(f_n)为一可测函数列。若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(f_n^+) < \infty$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(f_n^-) < \infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ $a.e.$ 有意义，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 的积分存在，且有

$$\mu\left(\sum_n f_n\right) = \sum_n \mu(f_n).$$

§3 不定积分与符号测度

本节主要内容有：符号测度的 Jordan-Hahn 分解，测度的绝对连续性及奇异性，测度的 Lebesgue 分解及 Radon-Nikodym 定理。

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间。我们用$\mathscr{L}$(相应地，$\overline{\mathscr{L}}$)表示 Ω 上$\mathscr{F}$-可测的实值(相应地，数值)函数全体. $\mathscr{L}^+$ 及 $\overline{\mathscr{L}}^+$ 则表示 $\mathscr{L}$ 及 $\overline{\mathscr{L}}$ 中的非负函数。

3.1 引理 设 $f \in \overline{\mathscr{L}}$，且 f 的积分存在。令

$$\nu(A) = \mu(f I_A), \quad A \in \mathscr{F}. \tag{3.1}$$

则$\nu(A)$为$\mathscr{F}$上的σ-可加集函数，即有

$$A_n \in \mathscr{F}, A_n \cap A_m = \phi, n \neq m \Rightarrow \nu\left(\sum A_n\right) = \sum_n \nu(A_n). \tag{3.2}$$

此外，令

$$\nu^+(A) = \mu(f^+ I_A), \quad \nu^-(A) = \mu(f^- I_A), \quad A \in \mathscr{F} \tag{3.3}$$

则 ν^+, ν^- 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的测度，其中之一为有限测度，且有 $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

证 令 ν^+, ν^- 如(3.2)所定义，由系2.2知，ν^+ 及 ν^- 为$\mathscr{F}$上的测度. 由于 f 的积分存在，我们有 $\nu^+(\Omega)<\infty$ 或 $\nu^-(\Omega)<\infty$. 于是 $\nu^+ - \nu^-$ 在$\mathscr{F}$上有定义，且为$\mathscr{F}$上的 σ-可加集函数. 显然有 $\nu = \nu^+ - \nu^-$. 证毕.

3.2 定义 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间，ν 为$\mathscr{F}$上的一 σ-可加集函数(即 $\nu(A)$对一切 $A\in\mathscr{F}$ 有定义且(3.2)成立)，则称 ν 为**符号测度**

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间. 设 $f\in\overline{\mathscr{L}}$，且 f 的积分存在，则由(3.1)定义的符号测度 ν 称为 f 关于 μ 的**不定积分**，并记为 $\nu = f.\mu$.

3.3 注 设 ν 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一符号测度，则或者 $-\infty\leqslant\mu(A)<\infty(\forall A\in\mathscr{F})$，或者 $-\infty<\mu(A)\leqslant\infty(\forall A\in\mathscr{F})$. 事实上，如果不这样，则存在 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，使 $\nu(A)=+\infty$，$\nu(B)=-\infty$. 我们有 $A\cup B=(A\backslash B)+B=(B\backslash A)+A$，依假定，有

$$\nu(A\cup B)=\nu(A\backslash B)+\nu(B),$$

$$\nu(A\cup B)=\nu(B\backslash A)+\nu(A).$$

为了使第一个等式右边有意义，必须有 $\nu(A\backslash B)<\infty$. 为了使第二个等式右边有意义，必须有 $\nu(B\backslash A)>-\infty$. 这时分别从两个等式得 $\nu(A\cup B)=\infty$，$\nu(A\cup B)=-\infty$，这导致矛盾. 此外，必有 $\nu(\phi)=0$.

由引理3.1知，不定积分这一特殊的符号测度可以表示为两个测度之差，且其中之一为有限测度. 下一定理表明，这一结论对一切符号测度成立.

3.4 定理(Jordan-Hahn **分解定理**) 设 ν 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一符号测度. 对 $A\in\mathscr{F}$，令

$$\nu^+(A)=\sup\{\nu(B):\ B\subset A,\ B\in\mathscr{F}\},$$

$$\nu^-(A)=\sup\{-\nu(B):\ B\subset A,\ B\in\mathscr{F}\}. \tag{3.4}$$

则 ν^+ 及 ν^- 为测度，其中之一为有限测度，且有 $\nu=\nu^+-\nu^-$。此外，存在 $D\in\mathscr{F}$，使得

$$\nu^+(A)=\nu(A\cap D),\ \nu^-(A)=-\nu(A\cap D^c). \tag{3.5}$$

证 不妨设 $\nu(A)>-\infty$, $\forall A\in\mathscr{F}$，令 ν^+,ν^- 如(3.4)定义。首先，我们证明存在 $D\in\mathscr{F}$，使得

$$A\in\mathscr{F}, A\subset D\Rightarrow\nu(A)\geqslant 0,\ A\subset D^c\Rightarrow\nu(A)\leqslant 0. \tag{3.6}$$

为此，令

$$\mathscr{B}=\{B\in\mathscr{F}:\ \nu^+(B)=0\},$$

即 $\mathscr{B}=\{B\in\mathscr{F}:\ \forall C\subset B,\ C\in\mathscr{F}$，有 $\nu(C)\leqslant 0\}$。易见$\mathscr{B}$对可列并运算封闭。此外，设 $B\in\mathscr{B}$，$G\in\mathscr{F}$，$G\subset B$，则 $G\in\mathscr{B}$。令 $B_n\in\mathscr{B}$，$n\geqslant 1$，使

$$\lim_{n\to\infty}\nu(B_n)=\inf\{\nu(B):B\in\mathscr{B}\}\triangleq\beta,$$

则有 $\bigcup_n B_n\in\mathscr{B}$，且有

$$\beta\leqslant\nu\left(\bigcup_n B_n\right)=\nu(B_m)+\nu\left(\bigcup_n B_n\backslash B_m\right)\leqslant\nu(B_m),\quad m\geqslant 1$$

故 $\nu\left(\bigcup_n B_n\right)=\beta$。令 $D=\left(\bigcup_n B_n\right)^c$，则 $D^c\in\mathscr{B}$，$\nu(D^c)=\beta$，

于是由$\mathscr{B}$的定义知(3.6)的第二个蕴含关系成立。

再证(3.6)的第一个蕴含关系成立。我们用反证法。假定存在 $A\in\mathscr{F}$，$A\subset D$，使 $\nu(A)<0$，我们断言：必有 $\nu^+(A)>0$。事实上，若 $\nu^+(A)=0$，则 $A\in\mathscr{B}$，故 $A+D^c\in\mathscr{B}$。但有 $\nu(A+D^c)=\nu(A)+\nu(D^c)<\nu(D^c)=\beta$，这与 β 的定义矛盾。因此必须有 $\nu^+(A)>0$。由 ν^+ 的定义知，存在 $A_1\in\mathscr{F}$，$A_1\subset A$，使得

$$\nu(A_1)\geqslant\frac{1}{2}(\nu^+(A)\wedge 1)>0$$

这时，$A\setminus A_1\subset D$，$\nu(A\setminus A_1)=\nu(A)-\nu(A_1)<0$，因此由上所证知 $\nu^+(A\setminus A_1)>0$。依归纳法，存在 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\subset D$，$n\geqslant 1$，使得 $A_n\subset A\setminus\sum_1^{n-1}A_k$，且有

$$\nu(A_n)\geqslant\frac{1}{2}\left(\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{n-1}A_k\right)\wedge 1\right)>0. \tag{3.7}$$

由于 $\nu(A)<0$，且有

$$\nu(A)=\nu\left(A\setminus\sum_1^{\infty}A_k\right)+\sum_1^{\infty}\nu(A_k) \tag{3.8}$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)<\infty$，特别有 $\lim_{k\to\infty}\nu(A_k)=0$。因此由(3.7)得

$$\lim_{n\to\infty}\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{n-1}A_k\right)\wedge 1=0,$$

从而有 $\lim_{n\to\infty}\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{n-1}A_k\right)=0$。由于 $\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{\infty}A_k\right)\leqslant$ $\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{n-1}A_k\right)$，$n\geqslant 1$，故有 $\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{\infty}A_k\right)=0$。因此，由前面所证，必须有 $\nu\left(A\setminus\sum_1^{\infty}A_k\right)\geqslant 0$（否则有 $\nu^+\left(A\setminus\sum_1^{\infty}A_k\right)>0$）。这样一来，由(3.8)知 $\nu(A)>0$，这与假定 $\nu(A)<0$ 矛盾。因此，

(3.6)的第一个蕴含关系成立。

现在证明定理的结论。设 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，$B\subset A$，则

$$\begin{aligned}\nu(B)+\nu((A\setminus B)\cap D)&=\nu((A\cap D)\cup B)\\&=\nu(A\cap D)+\nu(B\cap D^c)\end{aligned}$$

故由(3.6)知 $\nu(B)\leqslant\nu(A\cap D)$，从而有 $\nu^+(A)=\nu(A\cap D)$ 。同理可证 $\nu^-(A)=-\nu(A\cap D^c)$。因此，ν^+ 及 ν^- 为$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度，且 $\nu^-(\Omega)=-\nu(D^c)<\infty$。此外有 $\nu=\nu^+-\nu^-$，定理证毕。

3.5 注 (1) 我们称 ν 的分解 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 为 ν 的 Jordan **分解**，ν^+ 及 ν^- 分别称为 ν 的**正部及负部**；称 Ω 的分解 $\Omega=D+D^c$ 为 ν 的 Hahn **分解**。Hahn 分解不一定唯一。

(2) 令 $|\nu|=\nu^++\nu^-$，称$|\nu|$为 ν 的**变差(测度)**，称$|\nu|(\Omega)$为 ν 的**全变差**，记为 $\|\nu\|_{var}$。若$|\nu|$为 σ-有限测度，则称 ν 为 **σ-有限符号测度**。

(3) 设 $f\in\overline{\mathscr{F}}$，若 f 关于 ν^+ 及 ν^- 的积分存在，且 $\nu^+(f)-\nu^-(f)$有意义，则称 f 关于 ν 的积分存在。并令 $\nu^+(f)-\nu^-(f)=\nu(f)$，称$\nu(f)$为 f 关于 ν 的积分。这时，可以证明：$\forall A\in\mathscr{F}$，$\nu^+(fI_A)-\nu^-(fI_A)$有意义，且定义了$\mathscr{F}$上的一符号测度，我们称之为 f 关于 ν 的不定积分，记为 $f.\nu$.若 $\nu(f)$ 为实值，则称 f 关于 ν 可积，这时 $f.\nu$ 为一实值符号测度。

3.6 命题 设 ν 为$(\Omega,\mathscr{F})$上的符号测度，则 ν 在$\mathscr{F}$上达到其上、下界。确切地说，设 $\Omega=D+D^c$ 为其 Hahn 分解，则

$$\begin{aligned}&\nu(D)=\sup\{\nu(B):B\in\mathscr{F}\},\\&\nu(D^c)=\inf\{\nu(B):B\in\mathscr{F}\}.\end{aligned}\qquad(3.9)$$

特别，实值符号测度必为有界符号测度。

证 设 $B\in\mathscr{F}$，则由定理 3.4 知

$$\nu(B)=\nu^+(B)-\nu^-(B)\leqslant\nu^+(B)\leqslant\nu^+(\Omega)=\nu(D),$$

$$\nu(B)=\nu^+(B)-\nu^-(B)\geqslant-\nu^-(B)\geqslant-\nu^-(\Omega)=\nu(D^c).$$

由此推得(3.9)，证毕。

下面我们引进测度的绝对连续性及奇异性概念。

3.7 定义 设 ν_1, ν_2 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的两个符号测度，$|\nu_1|$, $|\nu_2|$ 为其变差. 称 ν_1 关于 ν_2 **绝对连续**（记为 $\nu_1 \ll \nu_2$），是指下述蕴含关系成立

$$A \in \mathscr{F}, |\nu_2|(A) = 0 \Rightarrow |\nu_1|(A) = 0. \qquad (3.10)$$

如果 $\nu_1 \ll \nu_2$ 且 $\nu_2 \ll \nu_1$，则称 ν_1 与 ν_2 **等价**，记为 $\nu_1 \sim \nu_2$. 称 ν_1 与 ν_2 **相互奇异**（记为 $\nu_1 \perp \nu_2$），是指存在 $N \in \mathscr{F}$，使得 $|\nu_1|(N^c) = 0$, $|\nu_2|(N) = 0$.

设 ν 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一符号测度，若 $N \in \mathscr{F}$，使得 $|\nu|(N^c) = 0$，则称 N 为 ν 的**支撑**. 一般说来，支撑并非唯一确定。

由上述定义知：$\nu_1 \ll \nu_2 \Longleftrightarrow$ 凡 ν_2 的支撑必为 ν_1 的支撑；$\nu_1 \perp \nu_2 \Longleftrightarrow \nu_1$ 与 ν_2 有不相交的支撑。

3.8 注 (1) 由(3.4)易知，(3.10)等价于如下条件：

$$A \in \mathscr{F}, \ |\nu_2|(A) = 0 \Rightarrow \nu_1(A) = 0 \qquad (3.11)$$

(2) 设 $\nu_1 \ll \nu_2$，且 $\nu_1 \perp \nu_2$，则 $\nu_1 = 0$（即对一切 $A \in \mathscr{F}$，有 $\nu_1(A) = 0$）。此外，恒有 $\nu \perp 0$。

(3) 设 ν 为一符号测度，$f \in \overline{\mathscr{L}}$. 若 f 关于 ν 的积分存在，则 $f.\nu \ll \nu$。

3.9 引理 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为一测度空间，h 为一非负可测函数，令 $h.\mu$ 表示 h 关于 μ 的不定积分（从而 $h.\mu$ 为一测度），设 $g \in \overline{\mathscr{L}}$. 则 g 关于 $h.\mu$ 的积分存在，当且仅当 gh 关于 μ 的积分存在，并且在积分存在情形下，有如下等式

$$\int_A g d(h.\mu) = \int_A gh d\mu, \quad \forall A \in \mathscr{F}. \qquad (3.12)$$

证 首先，设 g 为非负简单函数，则由 $h.\mu$ 的定义知(3.12)成立。于是由积分的单调收敛定理知，对一切 $g \in \overline{\mathscr{L}}^+$，(3.12)成立。由此立刻推得引理的结论。

下一定理表明：任一 σ- 有限符号测度 ν 总可以唯一地分解

为关于另一σ-有限符号测度μ的绝对连续部分和奇异部分之和。

3.10 定理(Lebesgue **分解**) 设μ与ν为$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个σ-有限符号测度，则ν有如下唯一分解：

$$\nu = \nu_s + \nu_c \tag{3.13}$$

其中$\nu_s \perp \mu$，$\nu_c \ll \mu$。此外，ν_s及ν_c均为σ-有限的，并且存在$g \in \mathscr{L}$，使g关于$|\mu|$的积分存在，且ν_c为g关于μ的不定积分。

证 首先不妨假定μ为测度(否则以$|\mu|$代替μ)，且$\mu(\Omega) > 0$。这时由μ的σ-有限性知，存在Ω的一个可数划分$\Omega = \sum_1^\infty A_n$，使得$A_n \in \mathscr{F}$，$0 < \mu(A_n) < \infty$，$\forall n \geq 1$。令

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(A_n)} I_{A_n},$$

则h处处严格正，且$\mu(h) = 1$。令$\tilde{\mu} = h.\mu$，则$\tilde{\mu}$为测度，且$\tilde{\mu}(\Omega) = 1$。由于$\tilde{\mu}$与μ等价，故由引理3.9知，可以$\tilde{\mu}$代替μ来证明定理的结论。因此，不妨设μ为有限测度。

下面先假定ν也为有限测度。令

$$\mathscr{H} = \left\{ h \in \overline{\mathscr{L}}^+ ;\ \forall A \in \mathscr{F}, \int_A h d\mu \leq \nu(A) \right\},$$

设h_1，$h_2 \in \mathscr{H}$，$h = h_1 \vee h_2$，则

$$\int_A h\, d\mu = \int_{A \cap [h_1 \geq h_2]} h_1\, d\mu + \int_{A \cap [h_1 < h_2]} h_2\, d\mu$$
$$\leq \nu(A \cap [h_1 \geq h_2]) + \nu(A \cap [h_1 < h_2]) = \nu(A),$$

这表明$\mathscr{H}$对有限上端运算封闭。现设$h_n \in \mathscr{H}$，$h_n \uparrow g$，使得

$$\int_\Omega g\, d\mu = \sup\left\{ \int_\Omega h\, d\mu ;\ h \in \mathscr{H} \right\},$$

则由积分单调收敛定理易知$g \in \mathscr{H}$。令

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \int_A g\, d\mu,\quad A \in \mathscr{F},$$

则 ν_s 为一有限测度．往证 $\nu_s \perp \mu$．令 $\Omega = D_n + D_n^c$ 为符号测度 $\nu_s - \frac{1}{n}\mu$ 的 Hahn 分解，则对一切 $A \in \mathscr{F}$，

$$\nu_s(A \cap D_n) \geqslant n^{-1}\mu(A \cap D_n) = n^{-1}\int_A I_{D_n}\, d\mu,$$

于是 $\forall A \in \mathscr{F}$ 有

$$\int_A (g + n^{-1} I_{D_n})\, d\mu \leqslant \int_A g\, d\mu + \nu_s(A \cap D_n) \leqslant \nu(A),$$

这表明 $g + n^{-1} I_{D_n} \in \mathscr{H}$．但另一方面 $\mu(g) = \sup\{\mu(h):\ h \in \mathscr{H}\}$，故必须有 $\mu(D_n) = 0$．令 $N = \bigcup_n D_n$，则 $\mu(N) = 0$．此外我们有 $\left(注意\left(\nu_s - \frac{1}{n}\mu\right)(D_n^c) \leqslant 0\right)$

$$\nu_s(N^c) \leqslant \nu_s(D_n^c) \leqslant n^{-1}\mu(D_n^c) \leqslant n^{-1}\mu(\Omega) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

这表明 $\nu_s \perp \mu$．令

$$\nu_c(A) = \int_A g\, d\mu$$

则 $\nu_c \ll \mu$（见定理 1.6(3)）．此外，由于 g 为 μ-可积的，故 g 可取为实值可测函数．

现设 ν 为 σ-有限符号测度．为证定理结论，不妨假定 ν 为 σ-有限测度（否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-）．取 Ω 的一个可数划分 $\Omega = \sum_n A_n$，使得 $A_n \in \mathscr{F}$，$\nu(A_n) < \infty$，$n \geqslant 1$．令 $\nu^n(A) = \nu(A \cap A_n)$，则每个 ν^n 为有限测度，故由上所证，ν^n 有如下分解

$$\nu^n = \nu_s^n + \nu_c^n, \quad n \geqslant 1,$$

其中 $\nu_s^n \perp \mu$，$\nu_c^n \ll \mu$，且存在实值非负可测函数 g^n，使得 $\nu_c^n = g_n \cdot \mu$．显然，我们可取 g_n 在 A_n^c 为 0，令

$$\nu_s = \sum_n \nu_s^n, \quad \nu_c = \sum_n \nu_c^n, \quad g = \sum_n g_n,$$

则有 $\nu_s \perp \mu$, $\nu_c \ll \mu$, $\nu_c = g.\mu$, 且有

$$\nu = \nu_s + \nu_c.$$

最后，ν 的分解(3.13)唯一性容易由注 3.8(2)看出，定理证毕.

设 μ 为一测度，ν 为某 $f \in \overline{\mathscr{L}}$ 关于 μ 的不定积分，则 ν 关于 μ 绝对连续(见注 3.82)。下一定理表明：若 μ 为 σ-有限测度，则逆命题成立。

3.11 定理(Radon-Nikodym 定理) 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为一可测空间，μ 为一 σ-有限测度，ν 为一符号测度(不必为 σ-有限)。如果 ν 关于 μ 绝对连续，则存在一关于 μ 积分存在的可测函数 g，使得 $\nu = g.\mu$. 此外，g 在 μ-等价意义下是唯一的(称 g_1, g_2 为 μ-等价的，如果 $\mu([g_1 \neq g_2]) = 0$)，为要 g 为 μ-$a.e.$有限，必须且只需 ν 为 σ-有限的。

证 若 ν 为 σ-有限符号测度，则由定理 3.10 立刻推得本定理结论)因为这时由注 3.8.(2)知(3.13)中的 $\nu_s = 0$)。为证定理，不妨设 ν 为测度(否则分别考虑 ν^+ 及 ν^-)，且 $\nu(\Omega) = \infty$。此外由 μ 的 σ-有限性及引理 3.9 知，不妨假定 μ 为有限测度(参看定理 3.10 证明的开头部分)。令

$$\mathscr{G} = \{C \in \mathscr{F}: \ \nu(C) < \infty\}$$

显然 $\mathscr{G}$ 对有限并运算封闭。对于存在 $C_n \in \mathscr{G}$, $C_n \uparrow C$, 使得

$$\mu(C) = \sup\{\mu(G): \ G \in \mathscr{G}\}. \tag{3.14}$$

令

$$\nu'(B) = \nu(B \cap C), \quad B \in \mathscr{F}$$

$$\nu''(B) = \nu(B \cap C^c), \quad B \in \mathscr{F}$$

则 ν' 为 σ-有限测度，且 $\nu' \ll \mu$，故存在非负实值可测函数 g'，使得 $\nu' = g'.\mu$. 另一方面，由 $\mathscr{G}$ 的定义及(3.14)知

$$\mu(B \cap C^c) > 0 \Rightarrow \nu(B \cap C^c) = \infty$$

因此，若令 $g'' = (+\infty) I_{C^c}$，则 $\nu'' = g''.\mu$,于是,令 $g = g' + g''$，则 $\nu = g.\mu$,定理的其余结论显然。证毕。

3.12 注 今后，我们用$\frac{d\nu}{d\mu}$表示定理3.11中的函数g(它是在μ-等价意义下唯一确定的)，并称$\frac{d\nu}{d\mu}$为ν**关于**μ**的Radon-Nikodym导数。**

3.13 定理 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一σ-有限测度空间，ν为$\mathscr{F}$上的一符号测度，且$\nu\ll\mu$。令$g\in\overline{\mathscr{L}}$，则$g$关于$\nu$积分存在，当且仅当$g\frac{d\nu}{d\mu}$关于$\mu$积分存在，并且这时有

$$\int_A g\,d\nu=\int_A\left(g\frac{d\nu}{d\mu}\right)d\mu,\quad \forall A\in\mathscr{F}. \tag{3.15}$$

证 设ν为测度，则定理的结论由引理3.9推得。现设ν为符号测度. 令$h=g\frac{d\nu}{d\mu}$则

$$h^+=g^+\frac{d\nu^+}{d\mu}+g^-\frac{d\nu^-}{d\mu},\quad h^-=g^-\frac{d\nu^+}{d\mu}+g^+\frac{d\nu^-}{d\mu}.$$

设g关于ν积分存在，则g关于ν^+及ν^-积分存在，且$\nu^+(g)-\nu^-(g)$有意义。于是$g\frac{d\nu^+}{d\mu}$及$g\frac{d\nu^-}{d\mu}$关于μ积分存在，且有

$$\nu^+(g)=\int\left(g\frac{d\nu^+}{d\mu}\right)d\mu,\quad \nu^-(g)=\int\left(g\frac{d\nu^-}{d\mu}\right)d\mu$$

于是有

$$\nu^+(g)=\int\left(g^+\frac{d\nu^+}{d\mu}\right)d\mu-\int\left(g^-\frac{d\nu^+}{d\mu}\right)d\mu$$

$$\nu^-(g)=\int\left(g^+\frac{d\nu^-}{d\mu}\right)d\mu-\int\left(g^-\frac{d\nu^-}{d\mu}\right)d\mu.$$

由于$\nu^+(g)-\nu^-(g)$有意义，则必须有$\mu(h^+)<\infty$或$\mu(h^-)<\infty$(请读者自行验证这一事实)。因此h关于μ积分存在，且$\mu(h)=$

$\nu^+(g)-\nu^-(g)=\nu(g)$。对 gI_A 应用这一结果即得(3.15)。反之，设 h 关于 μ 积分存在，而 $\mu(h^+)<\infty$ 或 $\mu(h^-)<\infty$，由此可推知 g 关于 ν^+ 及 ν^- 积分存在，$\nu^+(g)-\nu^-(g)$ 有意义（即 g 关于 ν 可积），且 $\nu(g)=\mu(h)$。对 gI_A 应用这一结果即得(3.15)，证毕。

3.14 定理 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间，μ 及 ν 为 $\mathscr{F}$ 上的两个 σ-有限测度，φ 为 $\mathscr{F}$ 上的一符号测度。如果 $\varphi\ll\nu$，$\nu\ll\mu$，则 $\varphi\ll\mu$，且有

$$\frac{d\varphi}{d\mu}=\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu},\quad \mu-a.e. \tag{3.16}$$

证 显然有 $\varphi\ll\mu$，故由定理 3.13，对 $\forall A\in\mathscr{F}$，有

$$\int_A\frac{d\varphi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_A\frac{d\varphi}{d\nu}d\nu=\varphi(A)=\int_A\frac{d\varphi}{d\mu}d\mu,$$

于是由系 1.9.(2)知(3.16)成立。

习题

3.15 设 ν 为一符号测度，$\Omega=D+D^C$ 为其 $Hahn$ 分解。令 $h=I_D-I_{D^C}$。则 h 关于$|\nu|$及 ν 的积分存在，且 $\nu=h.|\nu|$，$|\nu|=h.\nu$。

3.16 设 ν 为一符号测度，f 关于 ν 的积分存在（见注 3.5.(3)）。则对一切 $A\in\mathscr{F}$，fI_A 关于 ν 的积分存在，且 $A\mapsto\nu(fI_A)$ 定义了 $\mathscr{F}$ 上的一符号测度。

3.17 设 ν 及 μ 为两个符号测度，f 关于 ν 的积分存在。若 $\nu\ll\mu$(相应地 $\nu\perp\mu$)，则 $f.\nu\ll\mu$(相应地 $f.\nu\perp\mu$)。

3.18 试证注 3.8.(1)。

3.19 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间，$\nu$ 为 $\mathscr{F}$ 上的一有限符号测度。则下列二断言等价：

(1) $\nu\ll\mu$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得：$A\in\mathscr{F}$，$\mu(A)<\delta\Rightarrow|\nu|(A)<\varepsilon$。

3.20 举例说明在定理3.11中关于μ的σ-有限性假定不能去掉(提示：令$\Omega=[0, 1]$，$\mathscr{F}=\{A\subset[0, 1]$：$A$或$A^C$为至多可数集$\}$，$\mu(A)=A$中元素个数，$\nu(A)=0$或1视$A$为至多可数或非可数而定)．

3.21 设μ及ν为两个σ-有限测度．则要使$\nu\sim\mu$，必须且只需存在可测函数g：$0<g(\omega)<\infty$，$\forall\omega\in\Omega$，使得$\nu=g.\mu$．

3.22 设μ_1及μ_2为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的两个有限符号测度．令

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\quad \mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+,$$

试证：$\mu_1\vee\mu_2$为满足$\nu\geqslant\mu_1$且$\nu\geqslant\mu_2$的最小符号测度ν；$\mu_1\wedge\mu_2$为满足$\nu\leqslant\mu_1$且$\nu\leqslant\mu_2$的最大符号测度ν．

3.23 设μ为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一符号测度，则有$\|\mu\|_{var}\leqslant 2\sup\limits_{A\in\mathscr{F}}|\mu(A)|$．若$\mu(\Omega)=0$，则$\mu$为有限符号测度，且有$\|\mu\|_{var}=2\sup\limits_{A\in\mathscr{F}}|\mu(A)|$。

3.24 设$B(\Omega, \mathscr{F})$表示Ω上$\mathscr{F}$-可测有界函数全体，$\mathfrak{M}(\Omega,\mathscr{F})$表示$(\Omega,\mathscr{F})$上有限符号测度全体．对$f\in B(\Omega, \mathscr{F})$，令$\|f\|=\sup\limits_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$，

(1) $B(\Omega, \mathscr{F})$按范数$\|\ \|$为一Banach空间(完备赋范线性空间)．

(2) 设$\mu\in\mathfrak{M}(\Omega, \mathscr{F})$，令$I_\mu(f)=\mu(f)$，$f\in B(\Omega, \mathscr{F})$，则$I_\mu$为$B(\Omega, \mathscr{F})$上的一有界线性泛函，且有$\|I_\mu\|=\|\mu\|_{var}$(提示：设$\Omega=D+D^C$为$\mu$的Hahn分解，令$f=I_D-I_{D^C}$，考虑$\mu(f)$.)。

(3) 设ξ为$B(\Omega, \mathscr{F})$上的一有界线性泛函，令$\mu(A)=\xi(I_A)$，$A\in\mathscr{F}$，则$\mu\in\mathfrak{M}(\Omega, \mathscr{F})$，且$\xi=I_\mu$．

(4) $\mathfrak{M}(\Omega, \mathscr{F})$按范数$\|\ \|_{var}$为一Banach空间．

§4 函数空间L^p

设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间。对任一$p$：$0<p<\infty$，我们令

$$L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)=\{f\in\mathscr{L}(\Omega,\ \mathscr{F}):\ \mu(|f|^p)<\infty\} \tag{4.1}$$

其中$\mathscr{L}(\Omega,\ \mathscr{F})$表示$\Omega$上$\mathscr{F}$可测实值函数全体。设$f$，$g\in\mathscr{L}(\Omega,\ \mathscr{F})$，如果$f=g\ \mu-a.e.$，称$f$与$g$关于$\mu$等价。今后，我们将$L^p$中$a.e.$相等的两个元不加区别，即把$L^p$视为按$\mu$-等价关系所作的商空间。令

$$\|f\|_p=\mu(|f|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

我们将证明：对$p\geqslant 1$，$(L^p,\|\ \|_p)$为一完备赋范空间(即Banach空间)。

首先，我们将建立空间L^p的一些基本不等式。为此，我们需要如下引理，其证明可在任何一本数学分析书中找到。

4.1 引理 设a，b为实数，$r>0$，$1<p$，$q<\infty$，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.则有

$$|a+b|^r\leqslant\max(1,\ 2^{r-1})(|a|^r+|b|^r) \tag{4.3}$$

$$|ab|\leqslant\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}. \tag{4.4}$$

4.2 定理 设f，$f\in\mathscr{L}(\Omega,\ \mathscr{F})$，$r>0$，$1<p$，$q<\infty$，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$s\geqslant 1$。则有

$$\mu(|f+g|^r)\leqslant C_r\mu(|f|^r+|g|^r) \tag{4.5}$$

$$\mu(|fg|)\leqslant\|f\|_p\|g\|_q \tag{4.6}$$

$$\|f+g\|_s\leqslant\|f\|_s+\|g\|_s \tag{4.7}$$

其中$C_r=\max(1,\ 2^{r-1})$。

证 (4.5)可直接从(4.3)推得.现证(4.6).不妨设$\|f\|_p<\infty$，$\|g\|_q<\infty$，令 $\varphi=f/\|f\|_p$，$\phi=g/\|g\|_q$，则由(4.4)得

$$\mu(|\varphi\phi|)\leqslant\frac{\mu(|\varphi|^p)}{p}+\frac{\mu(|\phi|^q)}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

此即(4.6).

最后证明(4.7)。不妨设 $f,\ g\in L^s$，由(4.5)知 $f+g\in L^s$，且当 $s=1$ 时(4.7)成立。现设 $s>1$，我们有

$$\begin{aligned}\int|f+g|^s d\mu&=\int|f+g||f+g|^{s-1}d\mu\\&\leqslant\int|f||f+g|^{s-1}d\mu+\int|g||f+g|^{s-1}d\mu.\end{aligned}$$

令 $s'>1$，使$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$，对上一不等式右端应用(4.6)得(注意 $s'(s-1)=s$)

$$\begin{aligned}\int|f+g|^s d\mu\leqslant&\|f\|_s\left(\int|f+g|^s d\mu\right)^{\frac{1}{s'}}\\&+\|g\|_s\left(\int|f+g|^s d\mu\right)^{\frac{1}{s'}}\end{aligned}$$

由此立得(4.7)。证毕。

4.3 注 我们分别称(4.5)、(4.6)及(4.7)为 C_r-不等式、Hölder 不等式及 Minkowski 不等式。对 $p=q=2$ 情形,(4.6)亦称为 Schwarz 不等式。如果μ是概率测度，我们还有 *Jensen* 不等式(见习题 4.17)。

4.4 定义 设 $f_n\in L^r$，$n\geqslant1$，$f\in L^r$，$r>0$，如果 $\mu(|f_n-f|^r)\to0$，$n\to\infty$，则称 f_n **r 次平均收敛于** f(或简称 f_n L^r-收敛于 f)，记为 $f_n\xrightarrow{L^r}f$.

显然，L^r-收敛的极限是唯一确定的(在μ-等价意义下)，此外，L^r-收敛蕴含依测度收敛。事实上，设 $\varepsilon>0$，则

$$\mu(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=\mu(|f_n-f|^r\geqslant\varepsilon^r)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^r}\mu(|f_n-f|^r).$$

4.5 引理 设 $f_n\in L^r$，$n\geqslant1$，$r>0$，则为要 f_n L^r 收敛于某

$f\in L^r$，必须且只需(f_n)为L^r收敛的基本列。

证 必要性：设$f_n\xrightarrow{L^r}f$，则由(4.3)得

$$|f_n-f_m|^r\leqslant C_r(|f_n-f|^r+|f_m-f|^r)$$

故有$\lim\limits_{n,m\to\infty}\mu(|f_n-f_m|^r)=0$。往证充分性。设$(f_n)$为$L^r$-收敛基本列，则易知$f_n$为依测度收敛的基本列，故存在$f\in\mathscr{L}$，使$f_n\xrightarrow{\mu}f$(第二章习题3.10)。于是由Fatou引理知

$$\mu(|f_n-f|^r)\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\mu(|f_n-f_m|^r)$$

从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(|f_n-f|^r)=0$，显然有$f\in L^r$。证毕。

4.6 定理 设$p\geqslant1$，则$(L^p,\|\ \|_p)$为一Banach空间。

证 首先，由定理1.6.(6)知，$\|f\|_p=0\Leftrightarrow f=0$，$a.e.$，此外，对任一实数$\alpha$，有$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p$，故由(4.7)知$\|\ \|_p$为$L^p$上的一范数。再由引理4.5知，$(L^p,\|\ \|_p)$为一完备赋范空间.证毕。

下面我们研究空间$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的可分性，为此，先证明一个引理。

4.7 引理 令$\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F})$表示$\Omega$上的$\mathscr{F}$可测简单函数全体.设$p\geqslant1$，则$\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F})\cap L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$在$L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$中稠密。

证 设$f\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，则由第二章定理1.8知：存在$f_n\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F})$，$|f_n|\leqslant|f|$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。于是$f_n\in L^p$，且$|f_n-f|^p\leqslant2^p|f|^p$，故由控制收敛定理知$\mu(|f_n-f|^p)\to0$ $(n\to\infty)$。证毕。

4.8 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间.称$\mathscr{F}$**关于μ可分**，如果存在Ω上的一可分σ-代数$\mathscr{F}_0$，使得$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_0^\mu$，这里$\mathscr{F}_0^\mu$表示$\mathscr{F}_0$关于$\mu$的完备化。

4.9 定理 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间，μ为σ-有限测度。则下列断言等价：

(1) $\mathscr{F}$ 为 μ-可分；

(2) 对一切 $p\geqslant 1$，$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可分 Banach 空间；

(3) 存在某 $p\geqslant 1$，使 $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为可分 Banach 空间。

证 (1)⇒(2)。设 $\mathscr{F}$ 为 μ-可分，令 $\mathscr{F}_0$ 为 Ω 上的一可分 σ-代数，使得 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_0^\mu$。我们可以假定存在 Ω 的一的可数划分：$\Omega=\sum_n A_n$，使得 $A_n\in\mathscr{F}_0, \mu(A_n)<\infty$，$n=1, 2, \cdots$，由第一章习题2.13知，存在一代数 $\mathscr{L}\subset\mathscr{F}_0$，其元素个数至多可数，使得 $\sigma(\mathscr{L})=\mathscr{F}_0$，且 $A_n\in\mathscr{L}$，$n\geqslant 1$.令

$$\mathscr{H}=\left\{\sum_{i=1}^n a_i I_{B_i}, \ B_i\in\mathscr{L}, a_i \text{ 为有理数}, \right.$$

$$\left. i=1, \cdots n; \ n=1, 2\cdots\right\}$$

由第一章习题3.10知，对一切 $p\geqslant 1$，$\mathscr{H}$ 在 $\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F})\cap L^p(\Omega, \mathscr{F},\mu)$中按 L^p 范数稠密，从而由引理4.7知，$\mathscr{H}$ 在 $L^p(\Omega, \mathscr{F},\mu)$中稠密。但 $\mathscr{H}$ 的元素为可数多个，故 L^p 为可分。

剩下只需证(3)⇒(1)。设对某个 $p\geqslant 1$，$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为可分，则存在 L^p 的一可数稠子集 $\mathscr{H}$。令 $\mathscr{F}_0=\sigma(\mathscr{H})$（即 $\mathscr{F}_0$ 为使 $\mathscr{H}$ 中元素为可测的最小 σ-代数）。则显然 $\mathscr{F}_0$ 为可分 σ-代数，且 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$。现设 $A\in\mathscr{F}$，且 $\mu(A)<\infty$，则 $I_A\in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$。于是存在 $f_n\in\mathscr{H}$，使 $f_n\xrightarrow{L^p}I_A$，特别有 $f_n\xrightarrow{\mu}I_A$.令 $B_n=\left[\frac{1}{2}<f_n<\frac{3}{2}\right]$，则 $B_n\in\mathscr{F}_0$，且 $B_n\Delta A\subset\left[|f_0-I_A|\geqslant\frac{1}{2}\right]$，故有 $\mu(B_n\Delta A)\longrightarrow 0(n\to\infty)$。即 $I_{B_n}\xrightarrow{\mu}I_A$.于是存在子列$(B_{n'})$，使 $I_{B_{n'}}\xrightarrow{a.e.}I_A$。令 $B=\overline{\lim\limits_{n'\to\infty}}B_{n'}$，则 $I_B=I_A, a.e.$，即 $\mu(B\Delta A)=0$。由于 $B\in\mathscr{F}_0$，故 $A\in\mathscr{F}_0^\mu$。于是我们证明了如

下事实：

$$A\in\mathscr{F},\ \mu(A)<\infty\Rightarrow A\in\mathscr{F}_0^\mu.$$

但依假定，μ 为 σ-有限测度，故最终有 $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}_0^\mu$，这表明 $\mathscr{F}$ 为 μ-可分的。定理证毕。

4.10 注 定理中关于 μ 为 σ-有限的条件不能去掉。例如：设 $\Omega=R$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}(R)$，对 $A\in\mathscr{F}$，令 $\mu(A)$表示 A 中元数个数（若 A 含无穷多个元素，令 $\mu(A)=\infty$），则 $L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 不可分（请读者证明这一事实）。

作为定理 4.9 的一个推论，我们有

4.11 定理 设$(\Omega,\ \mathscr{F})$为一可测空间，μ 为其上的一 σ-有限测度，若 $\mathscr{F}$ 为 μ-可分，则 $\mathscr{F}$ 的任何子 σ-代数也为 μ-可分。

证 设 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-代数，则 $L^1(\Omega,\ \mathscr{G},\ \mu)$ 可视为 $L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$的子空间。依假定，$\mathscr{F}$ 为 μ-可分，故由定理 4.9 知 $L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为可分。因此，作为它的子空间 $L^1(\Omega,\ \mathscr{G},\mu)$ 亦可分，再由定理 4.9 即知 $\mathscr{G}$ 为 μ-可分。证毕。

作为本节的结束，我们定义空间 $L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$。

4.12 定义 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$为一测度空间，令 $f\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{F})$，称 f 为**本质有界的**，如果存在非负实数 c，使得 $\mu([|f|>c])=0$，我们用 $L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$表示本质有界可测函数全体。设 $f\in L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$，令

$$\|f\|_\infty=\inf\{c\geqslant0:\mu([|f|>c])=0\}$$

下一定理的证明是不足道的。

4.13 定理 $\|\ \|_\infty$ 是 $L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$上的范数，$L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 按范数$\|\ \|_\infty$为一 Banach 空间。

习题

4.14 设$[a,\ b]$为 R 的一闭区间，μ 为$[a,\ b]$上的勒贝格测度。试证：对任何 $p:1\leqslant p<\infty$ $[a,\ b]$ 上的阶梯函数全体在 $L^p([a,b),\mu)$ 中稠密。由此进一步证明$[a,b]$上的连续函数全体

在 $L^p([a, b], \mu)$中稠密。

4.15 试证：简单可测函数全体在 $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$中稠密。（提示：$\forall \varepsilon>0$，将$[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$分成有限多个其长度小于 ε 的区间：$[a_0, a_1]$，…，$(a_{n-1}, a_n]$。令 $f_\varepsilon=\sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$，其中 $A_1=f^{-1}([a_0, a_1])$，$A_k=f^{-1}((a_{k-1}, a_k])$，$k\geqslant 2$）。

4.16 $L^\infty([a,b],\mu)$不是可分的。

4.17（Jensen 不等式） 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，φ 为一连续凸函数（即 $\forall \alpha: 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \forall x,y\in R$，$\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)$），又设 $f\in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，则 $\varphi(f)$关于 P 的积分存在，且有

$$\varphi(P(f))\leqslant P(\varphi(f)).$$

（提示：令 φ' 表示 φ 的右导数，则 $\forall x, y\in R$，有

$$\varphi'(x)(y-x)\leqslant\varphi(y)-\varphi(x).$$

于是有

$$\varphi'(P(f))(f-P(f))\leqslant\varphi(f)-\varphi(P(f))$$

两边关于 P 积分即得所证不等式）

4.18 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，$1\leqslant p_1<p_2<\infty$，则$\|f\|_{p_1}\leqslant\|f\|_{p_2}$。此外，有$\|f\|_p\to\|f\|_\infty (p\to\infty)$（提示：利用 Hölder 不等式及 Jensen 不等式）。

4.19 试证：$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_\infty\|g\|_1$。

4.20（Hölder 不等式的推广） (1) 设 $1<p, q, r<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$，则有$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$。

(2) 设 $1<p_1, p_2, \cdots, p_m<\infty$，$m\geqslant 2$，且$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots$

$+\frac{1}{p_m}=1$，则有

$$\|f_1\cdots f_m\|_1\leqslant\|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_m\|_{p_m}.$$

4.21 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为一测度空间，$f\in L^1\cap L^\infty$。试证：$f\in L^p, p>1$，且$\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$（提示：$\mu(|f|^p)\leqslant\|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1$）。

4.22 令λ为$(R,\mathscr{B}(R))$上的$Lebesgue$测度，设$1\leqslant p<\infty$，且$f\in L^p(R, (R), \lambda)$。对每个$x\in R$，令$f_x(t)=f(t-x)$。试证：$\forall x_0\in R$，有

$$\lim_{x\to x_0}\|f_x-f_{x_0}\|_p=0.$$

（提示：利用 4.14）

§5 空间L^p的对偶

设X为一赋范线性空间，若f为X上一有界线性泛函，令

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|$$

称$\|f\|$为f的范数。熟知：X上的有界线性泛函全体按上述范数构成一 Banach 空间，我们称它为X的对偶空间，记为X^*.本节将研究$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$的对偶空间$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$。

5.1 定理 设$1<p, q<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$L^p(\Omega, \mathscr{F},\mu)^*$与$L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$保范线性同构，其同构映射为：设$g\in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，令

$$T_g(f)=\mu(fg),\ f\in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)\qquad(5.1)$$

则$T_g\in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$。$g\mapsto T_g$为$L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$到$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$上的一对一映射，且$\|g\|_q=\|T_g\|$。

证 设$g\in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，由 Hölder 不等式知(5.1)定义了$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上的一有界线性泛函$T_g$，且$\|T_g\|\leqslant\|g\|_q$.往证

$\|T_g\| = \|g\|_q$。不妨设$\|g\|_q>0$，令

$$f = |g|^{q-1}\operatorname{sgn}(g),$$

其中 sgn(x)为 x 的符号，即 $\operatorname{sgn}(x) = I_{(0,\infty)}(x) - I_{(-\infty,0)}(x)$。由于$(q-1)p = q$，故有$\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$，从而

$$T_g(f) = \mu(|g|^q) = \|g\|_q^q = \|g\|_q\|g\|_q^{q-1}$$

$$= \|g\|_q\|f\|_p$$

这表明$\|T_g\| \geqslant \|g\|_q$，从而最终有$\|T_g\| = \|g\|_q$。显然 $g \mapsto T_g$ 为 $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$到 $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$ 中的一对一线性映射。剩下要证明它是满射。

设 $T \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$，欲证存在 $g \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，使 $T_g = T$。为此，令$\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F}: \mu(A) < \infty\}$，对每个 $A \in \mathscr{G}$，令

$$T_A(f) = T(fI_A), \quad f \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$$

则 $T_A \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$，且$\|T_A\| \leqslant \|T\|$。令

$$\nu_A(B) = T_A(I_B) = T(I_{A\cap B}), \quad \mu_A(B) = \mu(A\cap B), \quad B \in \mathscr{F},$$

则 ν_A 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一有限符号测度，且 $\nu_A \ll \mu_A$。令 $g_A = \dfrac{d\nu_A}{d\mu_A}$，则显然有 $g_A I_{A^c} = 0$，a.e.。下面证 $g_A \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，且 $T_{g_A} = T_A$。为此，令 $E_n = [|g_A| \leqslant n] \cap A$，则 $E_n \uparrow A$。记 $h_n = g_A I_{E_n}$，则 $h_n \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，且对一切 $f \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$有

$$T_{h_n}(f) = \mu(fh_n) = \mu(fg_A I_{E_n}) = \mu_A(g_A f I_{E_n})$$

$$= \nu_A(fI_{E_n}) = T_A(fI_{E_n}) = T_{A\cap E_n}(f) = T_{E_n}(f)$$

这表明 $T_{h_n} = T_{E_n}$，于是有

$$\|h_n\|_q = \|T_{h_n}\| = \|T_{E_n}\| \leqslant \|T\|.$$

由于 $h_n \to g_A$，故由 Fatou 引理知$\|g_A\|_q \leqslant \|T\|$，从而 $g_A \in L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$。于是有

$$T_{g_A}(f) = \mu(g_A f) = \mu_A(g_A f) = \nu_A(f) = T_A(f).$$

这表明 $T_{g_A} = T_A$，特别，我们有$\|g_A\|_q = \|T_A\|$。下面我们将证明

存在 $g\in L^q(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$，使 $T_g=T$。设 $A\subset B$，A，$B\in\mathscr{G}$，易见 $\|T_A\|\leqslant\|T_B\|$，且 $g_B I_A=g_A$，$a.e.$ 于是可取 $A_n\in\mathscr{G}$，$A_n\uparrow$，使得

$$\sup_n\|T_{A_n}\|=\sup\{\|T_A\|;\ A\in\mathscr{G}\}.$$

令 $g=\lim\limits_{n\to\infty}g_{A_n}\ a.e.$，由于 $\|g_{A_n}\|_q\leqslant\|T\|$，故由 Fatou 引理知 $g\in L^q(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$。现证 $T_g=T$。令 $B=\bigcup\limits_n A_n$，则对任何 $f\in L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$，我们有

$$\begin{aligned}T_g(f)&=\mu(fg)=\lim_{n\to\infty}\mu(fg_{A_n})=\lim_{n\to\infty}T_{A_n}(f)\\&=\lim_{n\to\infty}T(fI_{A_n})=T(fI_B).\end{aligned}$$

因此，为证 $T_g=T$，只需证明 $T(fI_{B^c})=0$，$\forall f\in L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\mu)$。我们用反证法。假定存在某 $f\in L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$，使得 $T(fI_{A^c})\neq0$。令 $D_n=\left[|f|>\dfrac{1}{n}\right]\cap A^c$，则 $\mu(D_n)<\infty$，且由控制收敛定理知 $fI_{D_n}\xrightarrow{L^p}fI_{A^c}$，故存在某 n_0，使 $T(fI_{D_{n_0}})$ 敛0，即 $T_{D_{n_0}}(f)\neq0$。于是 $\|T_{D_{n_0}}\|>0$。令 $C_n=A_n\cup D_{n_0}$，则

$$\begin{aligned}\|T_{C_n}\|^q&=\|g_{C_n}\|_q^q=\|g_{A_n}+g_{D_{n_0}}\|_q^q\\&=\|g_{A_n}\|_q^q+\|g_{D_{n_0}}\|_q^q=\|T_{A_n}\|^q+\|T_{D_{n_0}}\|^q\end{aligned}$$

（这里用到如下事实：$A_n\cap D_{n_0}=\phi\Rightarrow g_{A_n}+g_{D_{n_0}}=g_{C_n},a.e.$）因此有 $\sup\limits_n\|T_{C_{n_0}}\|>\sup\limits_n\|T_{A_n}\|$。这与 (A_n) 的选取矛盾。证毕。

上述定理表明：如果 $1<p$，$q<\infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，我们可以将 $L^q(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 视为 $L^p(\Omega,\ \mathscr{F},\mu)$ 的对偶。下一定理表明：如果 μ 为 σ- 有限测度，则 $L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 可视为 $L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 的对偶。

5.2 定理 设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 为一 σ- 有限测度空间，则 $L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)^*$ 与 $L^\infty(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu)$ 保范线性同构，其同构映射为：设

$g \in L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，令

$$T_g(f) = \mu(fg), \quad f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$$

则 $T_g \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$，$g \mapsto T_g$ 为一对一满射，且 $\|g\|_{\infty} = \|Tg\|$。

证 设 $g \in L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，易见 $T_g \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$，且 $\|T_g\| \leqslant \|g\|_{\infty}$。要证 $\|T_g\| = \|g\|_{\infty}$，不妨设 $\|g\|_{\infty} > 0$。则对 $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \|g\|_{\infty}$，我们有 $\mu(|g| > \|g\|_{\infty} - \varepsilon) > 0$。给定 $\varepsilon > 0$，取 $A \subset [|g| > \|g\|_{\infty} - \varepsilon]$，使 $0 < \mu(A) < \infty$，令 $f = I_A \operatorname{sgn}(g)$，则 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，且有

$$\|f\|_1 = \mu(|f|) = \mu(A)$$

$$T_g(f) = \mu(fg) = \mu(I_A|g|) \geqslant (\|g\|_{\infty} - \varepsilon)\mu(A).$$

这表明 $\|T_g\| \geqslant \|g\|_{\infty} - \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故有 $\|T_g\| \geqslant \|g\|_{\infty}$，最终有 $\|T_g\| = \|g\|_{\infty}$。

现设 $T \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)^*$。要证存在 $g \in L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，使 $T_g = T$。令 $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F}: \mu(A) < \infty\}$，由于假定 μ 是 σ-有限的，故存在 $A_n \in \mathscr{G}$，使 $A_n \uparrow \Omega$。令

$$\nu_n(B) = T(I_{A_n \cap B}), \quad \mu_n = \mu(A_n \cap B), \quad B \in \mathscr{F},$$

并令 $g_n = \dfrac{d\nu_n}{d\mu_n}$，则显然有 $g_n \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，且对 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 有

$$T_{A_n}(f) = T(fI_{A_n}) = \nu_n(f) = \mu_n(fg_n) = \mu(fg_n) = T_{g_n}(f).$$

由于 $\|g_n\|_{\infty} = \|T_{A_n}\| \leqslant \|T\|$，$g_n \uparrow g \ a.e.$，故 $g \in L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$，且有

$$T_g(f) = \mu(fg) = \lim_{n \to \infty} \mu(fg_n) = \lim_{n \to \infty} T(fI_{A_n}) = T(f),$$

即有 $T_g = T$。证毕。

习题

5.3 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为一测度空间，g 为一实值 μ-可积函数，在 $L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上定义 T_g 如下：

$$T_g(f)=\int fgd\mu.$$

试证

$$\|g\|_1=\sup\{|T_g(f)|:\|f\|_\infty\leqslant 1\}.$$

§6 Daniell积分

积分的一个基本性质是线性性，因此积分可以看作为 $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的一个线性泛函。这一思想可以用来给出积分论的另一途径——Daniell 积分。

6.1 定义 设 Ω 为一抽象集合，$\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一族实值函数组成的线性空间。如果 $\mathscr{H}$ 满足如下条件：

$$f\in\mathscr{H}\Rightarrow|f|\in\mathscr{H},\ f\wedge 1\in\mathscr{H} \tag{6.1}$$

则称 $\mathscr{H}$ 为一**向量格**。

6.2 注 在上述定义中，条件 $f\in\mathscr{H}\Rightarrow|f|\in\mathscr{H}$ 等价于下列条件之一：

$$f,\ g\in\mathscr{H}\Rightarrow f\wedge g\in\mathscr{H}; \tag{6.2}$$

$$f,\ g\in\mathscr{H}\Rightarrow f\vee g\in\mathscr{H}. \tag{6.3}$$

事实上，$|f|=f\vee 0+(-f)\vee 0$，故(6.3)⇒(6.1)。又由于 $f\wedge g=\dfrac{g+f-|g-f|}{2}$，故(6.1)⇒(6.2)。最后，由于 $f\vee g=f+g-f\wedge g$，故(6.2)⇒(6.3)。

6.3 定义 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一向量格，I 为 $\mathscr{H}$ 上的正线性泛函：即 $f,g\in\mathscr{H}$，α，$\beta\in R\Rightarrow I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$；$f\in\mathscr{H}$，$f\geqslant 0\Rightarrow I(f)\geqslant 0$。如果 I 满足如下条件：

$$f_n\in\mathscr{H},\ f_n\downarrow 0\Rightarrow I(f_n)\to 0 \tag{6.4}$$

或者等价地

$$f_n\in\mathscr{H},\ f_n\uparrow f\in\mathscr{H}\Rightarrow I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n) \tag{6.5}$$

则称 I 为 $\mathscr{H}$ 上的 **Daniell 积分**。

6.4 例子 设Q为Ω上的一代数，μ为Q上的一测度，令

$$\mathscr{H}=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}: a_i\in R,\ A_i\in Q,\ \mu(A_i)<\infty,\ i=1,\cdots,n,\ n\geqslant 1\right\},$$

则$\mathscr{H}$为一向量格。设$f=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}\in\mathscr{H}$，令

$$I(f)=\sum_i a_i\mu(A_i)$$

则I为$\mathscr{H}$上的Daniell积分。

6.5 例子 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间，令$\mathscr{H}=L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，$I(f)=\mu(f)$，$f\in\mathscr{H}$。则$\mathscr{H}$为向量格，$I$为$\mathscr{H}$上的Daniell积分。

下面我们将证明：Daniell积分就是通常关于测度的积分。为此我们先引进若干记号。

6.6 记号 设$\mathscr{H}$为Ω上的一向量格，令

$$\mathscr{H}_+=\{f\in\mathscr{H}: f\geqslant 0\}$$

$$\mathscr{H}_+^*=\{f: \exists f_n\in\mathscr{H}_+,\ 使\ f_n\uparrow f\}$$

$$\mathscr{C}=\{C\subset\Omega:\ I_C\in\mathscr{H}_+^*\}$$

6.7 引理 我们有

(1) $f,g\in\mathscr{H}_+^*$，$a,b\geqslant 0\Rightarrow af+bg\in\mathscr{H}_+^*$，$f\vee g$，$f\wedge g\in\mathscr{H}_+^*$；

(2) $f_n\in\mathscr{H}_+^*$，$f_n\uparrow f\Rightarrow f\in\mathscr{H}_+^*$；

(3) $\mathscr{C}$对可列并运算封闭，对有限交运算封闭；

(4) $f\in\mathscr{H}\Rightarrow\forall a\in R$，$[f<a]\in\mathscr{C}$；

(5) $f\in\mathscr{H}_+^*\Rightarrow\forall a\geqslant 0$，$[f>a]\in\mathscr{C}$；

(6) $\sigma(\mathscr{C})=\sigma(f: f\in\mathscr{H})$。

证 (1)及(2)显然.(3)由(1)及(2)推得.下证(4).设$f\in\mathscr{H}$，$a\in R$，则$(f-a)^+=f-f\wedge a\in\mathscr{H}_+$。但

$$[n(f-a)^+]\wedge 1\uparrow I_{[f>a]}\text{。}$$

故 $I_{[f>a]}\in\mathscr{H}_+^*$，即$[f>a]\in\mathscr{C}$。

再证(5)。设 $f\in\mathscr{H}_+^*$，令 $f_n\in\mathscr{H}_+$，$f_n\uparrow f$，则由(4)知

$$[f>a]=\bigcup_n[f_n>a]\in\mathscr{C}.$$

最后，(6)容易由(4)看出，证毕。

6.8 定理(Daniell-Stone) 设 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一向量格，I 为 $\mathscr{H}$ 上的一 Daniell 积分，则存在 $\mathscr{F}\triangleq\sigma(f:f\in\mathscr{H})$ 上的一测度 μ，使得 $\mathscr{H}\supset L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，且对一切 $f\in\mathscr{H}$ 有 $I(f)=\mu(f)$。若进一步 $1\in\mathscr{H}_+^*$，则这样的测度 μ 是唯一确定的，且为 σ-有限的。

证 我们将证明分为三个步骤。

1°. 对 $f\in\mathscr{H}_+^*$，令

$$I^*(f)=\sup\{I(g):g\leqslant f,\ g\in\mathscr{H}_+\},$$

则易知有如下事实：

$$f_n\in\mathscr{H}_+,\ f_n\uparrow f\Rightarrow I^*(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)$$

$$f,g\in\mathscr{H}_+^*,\ a,\ b\geqslant0\Rightarrow I^*(af+bg)=aI^*(f)+bI^*(g)$$

$$f_n\in\mathscr{H}_+^*,\ f_n\uparrow f\Rightarrow I^*(f)=\lim_{n\to\infty}I^*(f_n)$$

$$f,g\in\mathscr{H}_+^*,\ f\leqslant g\Rightarrow I^*(f)\leqslant I^*(g).$$

此外，对 $f\in\mathscr{H}_+$，有 $I^*(f)=I(f)$。现令

$$\mu^*(C)=I^*(C),\quad C\in\mathscr{C}$$

$$\mu^*(A)=\inf\{\mu^*(C):C\supset A,\ C\in\mathscr{C}\},\quad A\subset\Omega \tag{6.6}$$

(约定 $\inf\phi=+\infty$)。下证 μ^* 为 Ω 上的外测度。

首先，$\mu^*(\phi)=0$。此外，设 $C_n\in\mathscr{C}$，则 $\bigcup\limits_n C_n\in\mathscr{C}$，故有

$$\mu^*\Big(\bigcup_n C_n\Big)=I^*(I_{\bigcup\limits_n C_n})\leqslant I^*\Big(\sum_{n=1}^\infty I_{C_n}\Big)=\sum_{n=1}^\infty I^*(I_{C_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n).$$

现设 $A_n \subset \Omega$, $A = \bigcup_n A_n$，为证 $\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$，不妨设对一切 n 有 $\mu^*(A_n) < \infty$。这时对给定 $\varepsilon > 0$，存在 $C_n \in \mathscr{C}, C_n \supset A_n$，使 $\mu^*(C_n) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$。令 $C = \bigcup_n C_n$，则 $C \in \mathscr{C}$，$C \supset A$，且有

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(C) \leqslant \sum_n \mu^*(C_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故有 $\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$，这表明 μ^* 为外测度。

2° 令 $\mathscr{M}^*$ 为 μ^*- 可测集全体，欲证 $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}^*$（从而有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{M}^*$）。首先，由第一章引理 4.5 知：

$\mathscr{M}^* = \{A \subset \Omega: \ \forall C \in \mathscr{C}, \mu^*(C) \geqslant \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)\}$。因此，为证 $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}^*$，只需证：若 $A, C \in \mathscr{C}$，$\mu^*(C) < \infty$，则有

$$\mu^*(C) \geqslant \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C). \qquad (6.7)$$

令 $g_n \in \mathscr{H}_+$，使 $g_n \uparrow I_{A \cap C}$，令 $h_n \in \mathscr{H}_+$，使 $h_n \uparrow I_C$，则对固定 n，当 $m \to \infty$ 时有

$$(h_m - g_n)^+ \uparrow I_C - g_n \in \mathscr{H}_+^*.$$

令 $f_n = I_C - g_n$，则 $f_n \downarrow I_C - I_{A \cap C} = I_{A^c \cap C}$。设 $0 < \varepsilon < 1$，令 $G_n = [f_n > 1 - \varepsilon]$，则由引理 6.7.(5)知 $G_n \in \mathscr{C}$，且有 $G_n \supset A^c \cap C$，$f_n \geqslant (1 - \varepsilon) I_{G_n}$，$C \subset G_n \cup (A \cap C)$。于是我们有

$$\mu^*(C) - \mu^*(A \cap C) \leqslant \mu^*(G_n) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} I^*(f_n)$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon} (\mu^*(C) - I(g_n)).$$

注意到 $I(g_n)\uparrow I^*(I_{A\cap C})=\mu^*(A\cap C)$，我们有

$$\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu^*(G_n)\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}(\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C))。$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$，得

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(G_n)=\mu^*(C)-\mu^*(A\cap C),$$

但有 $\mu^*(A^C\cap C)\leqslant\mu^*(G_n)$，故(6.7)得证。

3° 令 μ 为 μ^* 到 $\sigma(\mathscr{C})$上的限制，则 μ 为测度. 往证定理的结论成立。设 $f\in\mathscr{H}_+$，令

$$f_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}\left(I_{\left[f>\frac{k}{2^n}\right]}-I_{\left[f>\frac{k+1}{2^n}\right]}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}I_{\left[f>\frac{k}{2^n}\right]},$$

则 $f_n\in\mathscr{H}_+^*$，且 $f_n\uparrow f$。我们有

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I^*(f_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[f>\frac{k}{2^n}\right]\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(f)。$$

这表明 $\mathscr{H}_+\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，且对 $f\in\mathscr{H}_+$，有 $I(f)=\mu(f)$. 再由线性性推知对一般 $f\in\mathscr{H}$，有 $I(f)=\mu(f)$。

最后，若 $1\in\mathscr{H}_+^*$,则存在 $f_n\in\mathscr{H}_+$ 使 $f_n\uparrow 1$,于是$\left[f_n>\frac{1}{2}\right]\uparrow\Omega$，但 $\mu\left(\left[f_n>\frac{1}{2}\right]\right)\leqslant\frac{1}{2}\mu(f_n)=\frac{1}{2}I(f_n)<\infty$，故 μ 为 σ-有限测度。此外，设 ν 为一测度，使得

$$\mu(f)=I(f)=\nu(f),\quad f\in\mathscr{H}_+,$$

则由积分单调收敛定理推知，$\mu(f)=\nu(f)$，$\forall f\in\mathscr{H}_+^*$。特别，$\nu$ 与 μ 在 $\mathscr{C}$ 上一致。由于 $\mathscr{C}$ 是 π-类，且存在 $C_n\in\mathscr{C}$，使 $C_n\uparrow\Omega$，$\mu(C_n)<\infty$，故 μ 与 ν 在 $\sigma(\mathscr{C})$ 上一致(见第一章引理 4.6)，μ 的唯一性得证。定理证毕。

6.9 注 在定理中，如果不假定 $1\in\mathscr{H}_+^*$，但要求测度 μ 满足：

$$\mu(A)=\inf\{\mu^*(C):\ C\supset A,\ C\in\mathscr{C}\},\ A\in\mathscr{C}, \qquad (6.8)$$

则 μ 也是唯一确定的。事实上，设另有测度 ν 使对一切 $f\in\mathscr{H}$ 有 $I(f)=\mu(f)$，且满足(6.8)(以 ν 代替 μ)，则对 $\forall C\in\mathscr{C}$，令 $f_n\in\mathscr{H}^+$，$f_n\uparrow I_C$，我们有

$$\nu(C)=\lim_{n\to\infty}\nu(f_n)=\lim_{n\to\infty}I(f_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\mu(C)$$

于是由(6.8)知，ν 与 μ 在 $\mathscr{F}$ 上一致。

第四章　乘积可测空间上的测度及Fubini定理

§1　乘积可测空间

1.1 定义　设Ω_1、Ω_2为两个集合，令

$$\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\ \omega_2):\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2\}$$

称$\Omega_1\times\Omega_2$为Ω_1与Ω_2的**乘积**。若进一步$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$及$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$为两个可测空间，我们在$\Omega_1\times\Omega_2$上定义如下σ-代数：

$$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2=\sigma\{A_1\times A_2:A_1\in\mathscr{F}_1,\ A_2\in\mathscr{F}_2\}$$

称$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$为**乘积$\sigma$-代数**，并称$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$为**乘积可测空间**。

上述定义推广到任意有很多个可测空间的乘积是显然的，下面我们将讨论一族可测空间的乘积。

1.2 定义　设$(\Omega_i)_{i\in I}$为一族集合。令$\Omega=\bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$，并令$\Omega^I$表示$I$到$\Omega$中的映射全体。我们令

$$\prod_{i\in I}\Omega_i=\{\omega\in\Omega^I:\omega(i)\in\Omega_i,\ \forall i\in I\}$$

称$\prod\limits_{i\in I}\Omega_i$为$(\Omega_i)_{i\in I}$的**乘积**。此外，对每个$i\in I$，令

$$\Pi_i(\omega)=\omega(i),\ \ \omega\in\prod_{i\in I}\Omega_i$$

称Π_i为$\prod\limits_{i\in I}\Omega_i$到$\Omega_i$上的**投影(映射)**。更一般地，设$\phi\neq S\subset I$，

令Π_S为$\prod_{i\in I}\Omega_i$到$\prod_{i\in S}\Omega_i$上的投影(映射)，即令

$$\Pi_S(\omega)=(\omega(i),\ i\in S),\ \omega\in\prod_{i\in I}\Omega_i$$

这里$(\omega(i),\ i\in S)$表示$\prod_{i\in S}\Omega_i$中的一个元素，它在指标i处的取值为$\omega(i)$。

设$(\Omega_i,\ \mathscr{F}_i)_{i\in I}$为一族可测空间，则在$\prod_{i\in I}\Omega_i$上定义一$\sigma$-代数如下：

$$\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i=\sigma\left(\bigcup_{i\in I}\Pi_i^{-1}(\mathscr{F}_i)\right),$$

称$\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$为**乘积$\sigma$-代数**，并称$\left(\prod_{i\in I}\Omega_i,\ \prod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)$为**乘积可测空间**。

显然，乘积σ-代数是使每个投影映射Π_i为可测的最小σ-代数。

1.3 定理 设$\phi\neq S\subset I$，则Π_S为$\left(\prod_{i\in I}\Omega_i,\ \prod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)$到$\left(\prod_{i\in S}\Omega_i,\ \prod_{i\in S}\mathscr{F}_i\right)$上的可测映射。

证 由于$\prod_{i\in S}\mathscr{F}_i=\sigma\left(\bigcup_{i\in S}(\Pi_i^S)^{-1}(\mathscr{F}_i)\right)$(这里$\Pi_i^S$表示$\prod_{i\in S}\Omega_i$到$\Omega_i$上的投影)，故由第二章命题1.3知，只需证$\Pi_S^{-1}\left(\bigcup_{i\in S}(\Pi_i^S)^{-1}(\mathscr{F}_i)\right)\subset\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$。但这由如下等式推得

$$\Pi_S^{-1}(\Pi_i^S)^{-1}(\mathscr{F}_i)=\Pi_i^{-1}(\mathscr{F}_i)。$$

1.4 定理 令$\mathscr{P}_0$(相应地$\mathscr{P}$)表示I的非空有穷(相应地,至多可数)子集全体,则有:

(1) **可测矩形全体**

$$\mathscr{S}=\bigcup_{S\in\mathscr{P}_0}\left\{\Pi_S^{-1}\left(\prod_{i\in S}A_i\right):A_i\in\mathscr{F}_i,\quad i\in S\right\}$$

为$\prod_{i\in I}\Omega_i$上的一半代数,且$\sigma(\mathscr{S})=\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$。

(2) **可测柱集全体**

$$\mathscr{Z}=\bigcup_{S\in\mathscr{P}_0}\Pi_S^{-1}\left(\prod_{i\in S}\mathscr{F}_i\right)$$

为$\prod_{i\in I}\Omega_i$上的一代数,且$\sigma(\mathscr{Z})=\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$。

(3) $$\mathscr{F}=\bigcup_{S\in\mathscr{P}}\Pi_S^{-1}\left(\prod_{i\in S}\mathscr{F}_i\right)$$

我们将这一定理的证明留给读者完成。

习题

1.5 设I为一可数集,$(\Omega_i,\ \mathscr{F}_i)$为一族可测空间。若每个$\mathscr{F}_i$可分,则$\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$也可分。

1.6 设$(\Omega_i,\ \mathscr{F}_i)_{i\in I}$为一族可测空间,$\mathscr{C}_i$为$\mathscr{F}_i$的子类,$i\in I$。若对每个$i\in I$,$\sigma(\mathscr{C}_i)=\mathscr{F}_i$,则有$\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i=\sigma\left(\bigcup_{i\in S}\Pi_i^{-1}(\mathscr{C}_i)\right)$。

§2 乘积测度与Fubini定理

设$(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$及$(Y,\ \mathscr{B},\ \nu)$为两个σ-有限测度空间。本节将在乘积可测空间$(X\times Y,\ \mathscr{A}\times\mathscr{B})$上定义一乘积测度$\mu\times\nu$,并

讨论关于测度 $\mu\times\nu$ 的积分。

2.1 定义 设 X 及 Y 是两个集合，E 是 $X\times Y$ 的子集。令

$$E_x=\{y\in Y: (x, y)\in E\},$$
$$E^y=\{x\in X: (x, y)\in E\}$$

分别称 E_x 及 E^y 为 E 在 x 及 y 处的截口。设 $f(x, y)$ 为 $X\times Y$ 上的一函数，令

$$f_x(y)=f(x, y), \quad f^y(x)=f(x, y),$$

分别称 f_x 及 f^y 为 f 在 x 及 y 处的截口。

2.2 引理 设 $(X,\mathscr{A})$ 及 $(Y,\mathscr{B})$ 为可测空间。

(1) 若 $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则对一切 $x\in X$，$y\in Y$，有 $E_x\in\mathscr{B}$，$E^y\in\mathscr{A}$。

(2) 若 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数，则对一切 $x\in X$，$y\in Y$，f_x 为 Y 上的 $\mathscr{B}$-可测函数，f^y 为 X 上的 $\mathscr{A}$-可测函数。

证 (1) 令 $\mathscr{C}=\{A\times B: A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$。则对一切 $E\in\mathscr{C}$，引理的结论显然成立。但 $\mathscr{C}$ 为 π-类，且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，故由单调类定理(第一章定理2.2)知，对一切 $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，引理结论成立(令 $\mathscr{G}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}: \forall x\in X, y\in Y, E_x\in\mathscr{B}, E^y\in\mathscr{A}\}$，则 $\mathscr{G}$ 为 λ-类)。

(2) 容易由第二章定理 2.1 推得。

2.3 引理 令 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 及 $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ 为两个 σ-有限测度空间。设 $E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathscr{A}$-可测，函数 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 $\mathscr{B}$-可测。

证 首先设 ν 为有限测度. 令 $\mathscr{C}=\{A\times B: A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$，令 $\mathscr{G}=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}: x\mapsto\nu(E_x)$ 为 $\mathscr{A}$-可测$\}$ 则显然有 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$(因 $\nu((A\times B)_x)=I_A(x)\nu(B)$)，且 $\mathscr{C}$ 为 π-类，$\mathscr{G}$ 为 λ-类。故由单调类定理知 $\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，即 $\mathscr{G}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$。现设 ν 为 σ-有限测度，任取 Y 的可数划分 $\{D_n\}$，使 $D_n\in\mathscr{B}$，$\nu(D_n)<\infty$，$n\geqslant1$，令

$\nu_n(B)=\nu(B\cap D_n)$，$B\in\mathscr{B}$，则ν_n为有限测度，且$\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$，于是

$$\nu(E_x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(E_x),\quad E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$$

从而函数$x\to\nu(E_x)$为$\mathscr{A}$-可测。同理可证函数$y\to\mu(E^y)$为$\mathscr{B}$-可测。

2.4 定理 设$(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$及$(Y,\ \mathscr{B},\ \nu)$为两个σ-有限测度空间。则在$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上存在唯一的测度$\mu\times\nu$，使得

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\mu(B),\quad A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\tag{2.1}$$

(从而$\mu\times\nu$亦为σ-有限)。此外，对任何$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，有

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy)\tag{2.2}$$

测度$\mu\times\nu$称为μ与ν的**乘积**。

证 由引理2.3，我们可在$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上定义如下集函数$\lambda_1$及$\lambda_2$：

$$\lambda_1(E)=\int_X\mu(E_x)\mu(dx),\qquad E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B},$$

$$\lambda_2(E)=\int_Y\mu(E^y)\nu(dy),\qquad E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B},$$

显然，λ_1及λ_2均为测度，且有

$$\lambda_1(A\times B)=\lambda_2(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\quad A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}.\tag{2.3}$$

令$\mathscr{C}=\{A\times B;\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$，则$\mathscr{C}$为半代数(见定理1.4)．依假定，$\mu$及$\nu$为$\sigma$-有限测度，故满足(2.1)的测度在$\mathscr{C}$上也是$\sigma$-有限的。因此，由测度扩张的唯一性(见第一章定理4.7)知，满足(2.1)的测度是唯一的．特别，我们有$\lambda_1=\lambda_2$．令$\mu\times\nu=\lambda_1=\lambda_2$，即有(2.2)。证毕。

下面我们研究关于乘积测度的积分。

2.5 定理 令$(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$及$(Y,\ \mathscr{B},\nu)$为σ-有限测度空间，

f为 $X\times Y$ 上的非负 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数。则

(1) 函数$x\to\int_Y f_x d\nu$ 为$\mathscr{A}$-可测，函数 $y\to\int_X f^y d\mu$为$\mathscr{B}$-可测。

(2) 我们有

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu)=\int_Y\left(\int_X f^y d\mu\right)\nu(dy)=\int_X\left(\int_Y f_x d\nu\right)\mu(dx) \tag{2.4}$$

证 不妨假定 μ 及 ν 均为有限测度。令$\mathscr{C}=\{A\times B:\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$，由定理 2.4知：$\mathscr{C}$中集合的示性函数满足定理的两个结论。故由第二章定理 2.1 知：对一切有界的$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数$f$，定理的两个结论成立。因此，对一切非负$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数$f$，结论亦成立。证毕。

2.6 系 在定理2.5的假设下，若f为非负可积函数，则 $\mu\{x:\ \nu(f_x)=\infty\}=\nu\{y:\ \mu(f^y)=\infty\}=0$.

证 直接由(2.4)看出，

下一定理称为 ***Fubini* 定理**。它使我们可以用叠积分来表达关于乘积测度的积分。

2.7 定理 设$(X,\ \mathscr{A},\ \mu)$及$(Y,\ \mathscr{B},\nu)$为σ-有限测度空间，f为 $X\times Y$ 上一$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数。若$f$关于$\mu\times\nu$可积(相应地，积分存在)，则有下列结论：

(1) 对 $\mu-a.\ e.\ x$，f_x 为ν-可积(相应地，关于ν积分存在)；对 ν-$a.\ e.\ y$，f^y 为μ-可积(相应地，关于μ积分存在)。

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x d\nu, & \text{若 } f_x \text{ 为 } \nu\text{-可积(相应地，积分存在)}\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

$$J_f(y)=\begin{cases}\int_X f^y d\mu, & \text{若 } f^y \text{ 为 } \mu\text{-可积(相应地，积分存在)}\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

则 I_f 为 μ-可积(相应地，积分存在)，J_f 为 ν-可积(相应地，积分存在)，且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X I_f(x)\mu(dx)=\int_Y J_f(y)\nu(dy) \quad (2.5)$$

证 首先设 f 为非负且为 $\mu\times\nu$-可积。则由系 2.6知结论(1)成立，且有

$$I_f(x)=\nu(f_x)\ \mu\text{-a. e. } x$$
$$J_f(y)=\mu(f^y)\ \nu\text{-a. e. } y.$$

于是结论(2)由(2.4)推得。对一般 f，分别考虑 f^+及f^-，即得定理结论。

注 由于 $\nu(f_x)$是 μ-a. e. 有定义的，$\mu(f^y)$是ν-a. e. 有定义的，所以通常也将(2.5)写成(2.4)的形式。

Fubini 定理有很多的应用。我们将通过下面的习题向读者介绍一些应用的例子。

习题

2.8 设 R 为实直线，试证 $\mathscr{B}(R)\times\mathscr{B}(R)=\mathscr{B}(R^2)$(注意：对一般拓扑空间 X，不一定有$\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)=\mathscr{B}(X\times X)$，一般只有 $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{B}(X\times X)$)。

2.9 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$及$(Y, \mathscr{B}, \nu)$为σ-有限测度空间，$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$。则下列条件等价：

(1) $(\mu\times\nu)(E)=0$；

(2) $\mu(E^y)=0$，ν-a. e. y；

(3) $\nu(E_x)=0$，μ-a. e. x。

2.10 设$(X, \mathscr{A})$及$(Y, \mathscr{B})$为可测空间，μ_1及ν_1为$(X, \mathscr{A})$上的σ-有限测度，μ_2 及ν_2为$(Y, \mathscr{B})$上的σ-有限测度．若 $\nu_1\ll\mu_1$ 且 $\nu_2\ll\mu_2$，则 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$，且有 $\frac{d(\nu_1\times\nu_2)}{d(\mu_1\times\mu_2)}(x, y)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y)$。

2.11 设$\sum\limits_{m,n} a_{m,n}$为绝对收敛的双重级数. 试用Fubini定理证明$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$。

2.12 试用Fubini定理证明$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1$ $\left(\text{提示：计算}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right),\text{并令}r^2=x^2+y^2.\right)$.

2.13 设$(X, \mathscr{A}, \mu)$为σ-有限测度空间，f为X上的一非负$\mathscr{A}$-可测函数。试证

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^{\infty}\mu([f>y])dy.$$

（提示：令λ为$(R, \mathscr{B}(R))$上的Lebesgue测度，令

$$E=\{(x, y)\in X\times R: 0\leqslant y<f(x)\},$$

则$\lambda(E_x)=f(x)$。）

2.14 设$f(t)$及$g(t)$为$[0, \infty)$上的两个右连续增函数。我们用μ_f及μ_g分别表示它们在$[0, \infty)$上诱导出的测度（见第一章定理5.4）。试证：对$0\leqslant a<b<\infty$，有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(s)\mu_g(ds)=\int_a^b g(s-)\mu_f(ds),$$

其中$g(s-)=\lim\limits_{t\uparrow\uparrow s} g(t)$（记号$t\uparrow\uparrow s$表示$t\to s$，且$t<s$）。（提示：将$(a,b]\times(a,b]$表为$\{(x,y): a<x\leqslant y\leqslant b\}\cup\{(x, y): a<y<x\leqslant b\}$并分别计算它们的$\mu_f\times\mu_g$测度。）

2.15（函数的卷积） 令λ为$(R,\mathscr{B}(R))$上的Lebesgue测度。设f及g属于$L^1(R, \mathscr{B}(R), \lambda)$，则

(1) $(x, t)\to f(x-t)g(t)$为$\mathscr{B}(R^2)$-可测，且属于$L^1(R^2, \mathscr{B}(R^2), \lambda\times\lambda)$；

(2) 令

$$f*g(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt, & 若 t\to f(x-t)g(t) 勒贝格可积\\ 0 & ，其它情形\end{cases}$$

则 $f*g\in L^1(R,\ \mathscr{B}(R),\ \lambda)$，且有 $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$。（提示：利用 Lebesgue 测度的平移不变性：即对任何 $E\in\mathscr{B}(R), t\in R$，令 $E+t=\{s+t:\ s\in E\}$，则 $\lambda(E+t)=\lambda(E)$。由此证明 $\int|f(x-t)g(t)|d(\lambda\times\lambda)(x,\ t)=\|f\|_1\|g\|_1$。）

(3) 若 g 进一步为有界，则 $f*g$ 连续。（提出：利用第三章习题 4.22。）

2.16 (Steinhaus 引理)设 E 为 R 的一 Borel 子集，令 $D(E)=\{x-y:\ x,\ y\in E\}$，若 E 的 Lebesgue 测度 $\lambda(E)>0$，则 $D(E)$ 包含一含原点的开区间。（提示：不妨设 $\lambda(E)<\infty$，以 $x+E$ 表示 $\{x+y:y\in E\}$，以 $-E$ 表示 $\{-x:x\in E\}$。令 $F(x)=\lambda(E\cap(x+E))$，则 $F(x)=I_{-E}*I_E(x)$。由 2.15.(3) 知 $F(x)$ 连续，又依假定 $F(0)>0$。）

2.17 (Steinhaus 引理的推广)设 A，B 为 R 的两个 Borel 子集，令 $D(A,B)=\{y-z:y\in A, z\in B\}$，若 $\lambda(A)>0$，且 $\lambda(B)>0$，则 $D(A,B)$ 包含一非空开区间。（提示：不妨设 $\lambda(A)<\infty$，$\lambda(B)<\infty$，令 $F(x)=\lambda(A\cap(x+B))$，则 $F(x)=I_{-A}*I_B(x)$，且由 Fubini 定理知 $\int F(x)\lambda(dx)=\lambda(A)\lambda(B)$。于是存在某 x，使 $F(x)>0$。）

2.18 设 $f(x,y)$，为定义于 $V=(a,\ b)\times(c,\ d)$ 上的一实值连续函数。如果 f 满足下列条件：(1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 V 上存在且连续；(2)对某个 $x_0\in(a,b)$，$\frac{d}{dy}[f(x_0,\ y)]$ 对一切 $y\in(c,\ d)$ 存在；

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$在$V$上存在且连续，则$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$在$V$上存在，且有

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$。(提示：任取$y_0\in(c, d)$，由 Fubini 定理得：

$$f(\bar{x}, \bar{y})-f(x_0, \bar{y})-f(\bar{x}, y_0)+f(x_0, y_0)$$

$$=\int_{y_0}^{\bar{y}}\int_{x_0}^{\bar{x}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy.$$

(注意：对每个$\bar{x}\in(a, b)$，$\int_{x_0}^{\bar{x}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx$为$y$的连续函数.)

§3 由σ-有限核产生的测度

本节将推广§2的结果。

3.1 定义 令$(X, \mathscr{A})$及$(Y, \mathscr{B})$为两个可测空间。一函数K: $X\times\mathscr{B}\to[0, \infty]$称为从$(X, \mathscr{A})$到$(Y, \mathscr{B})$的一个**核**(Kernel)，如果它满足下列二条件：

(1) $\forall x\in X$, $K(x, \cdot)$为$(Y, \mathscr{B})$上的测度；

(2) $\forall B\in\mathscr{B}$, $K(\cdot, B)$为X上的$\mathscr{A}$-可测函数。

称核K为**σ-有限的**。如果存在Y的一个可数划分：$Y=\sum_n B_n$，使得$B_n\in\mathscr{B}$，$n\geqslant 1$，且对一切$x\in X$及$n\geqslant 1$，有$K(x, B_n)<\infty$。

3.2 命题 设K为从$(X, \mathscr{A})$到$(Y, \mathscr{B})$的一个核，μ为$(X, \mathscr{A})$上的一测度，f为Y上的一非负$\mathscr{B}$-可测函数。则有

(1) 令$\nu(B)=\int_X K(x, B)\mu(dx)$，$B\in\mathscr{B}$，则$\mu$为$(Y, \mathscr{B})$上的一测度；

(2) $x\to\int_Y f(y)K(x, dy)$为X上的一$\mathscr{A}$-可测函数；

(3) 我们有

$$\int f(y)\nu(dy)=\int\left[\int f(y)K(x, dy)\right]\mu(dx) \tag{3.1}$$

证 (1)显然。为证(2)及(3)，首先考虑非负简单可测函数f，然后再利用第二章定理1.8.(2)。

下一定理推广了定理2.4

3.3 定理 设K为从$(X, \mathscr{A})$到$(Y, \mathscr{B})$的一个σ-有限核，μ为$(X, \mathscr{A})$上的一测度。

(1) 令$N(x, E)=K(x, E_x)$，$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$。则$N$为从$(X,\mathscr{A})$到$(X\times Y, \mathscr{A}\times\mathscr{B})$的一个$\sigma$-有限核。

(2) 令

$$\mu K(E)=\int_X K(x, E_x)\mu(dx),\ E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B} \tag{3.2}$$

则μK为$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$上的一测度，且有

$$\mu K(A\times B)=\int_A K(x, B)\mu(dx),\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}. \tag{3.3}$$

(3) 若μ为σ-有限测度，则μK亦为σ-有限测度，且它是$(X\times Y, \mathscr{A}\times\mathscr{B})$上唯一满足(3.3)的测度。

证 (1) 首先，对任何$x\in X$，$N(x, \cdot)$显然是$(X\times Y, \mathscr{A}\times\mathscr{B})$上的测度。令$\{B_n, n\geqslant 1\}$为$Y$的一个可数划分，使得$B_n\in\mathscr{B}$，$n\geqslant 1$，且对一切$x\in X$及$n\geqslant 1$，有$K(x, B_n)<\infty$。令

$$\mathscr{B}_n=B_n\cap\mathscr{B},\ \mathscr{C}_n=\{A\times C:\ A\in\mathscr{A},\ C\in\mathscr{B}_n\},$$

$$\mathscr{G}_n=\{E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}_n:\ N(\cdot, E)\text{为}\mathscr{A}\text{-可测}\}.$$

则$\mathscr{C}_n$为$X\times B_n$上的π-类，且生成σ-代数$\mathscr{A}\times\mathscr{B}_n$。显然$\mathscr{G}_n$为$X\times B_n$上的$\lambda$-类，且$\mathscr{G}_n\supset\mathscr{C}_n$，故由单调类定理知$\mathscr{G}_n=\mathscr{A}\times\mathscr{B}_n$。现设$E\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，令$E_n=E\cap(X\times B_n)$，则易知$E_n\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}_n$，且$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$。于是我们有

$$N(x, E)=\sum_n N(x, E_n),\ x\in X.$$

从而$N(\cdot, E)$为$\mathscr{A}$-可测函数。此外，我们有$N(x, X\times B_n)=K(x, B_n)<\infty$，因此，$N$为从$(X, \mathscr{A})$到$(X\times Y, \mathscr{A}\times\mathscr{B})$的$\sigma$-有限核。

(2) 显然。现证(3)。设μ为σ-有限测度，令$\{A_n, n\geqslant 1\}$为X的一可数划分，使得$A_n\in\mathscr{A}$，$\mu(A_n)<\infty$，$n\geqslant 1$。令$\{B_n\}$如(1)的证明中所取的Y的划分，再令

$$A_{m,k,l}=[l-1\leqslant K(\cdot, B_k)<l]\cap A_m,\quad m,\ k,\ l\geqslant 1$$

则对一切$k\geqslant 1$，我们有$\sum_{m,l}A_{m,k,l}=X$，且有

$$\mu K(A_{m,k,l}\times B_k)=\int_{A_{m,k,l}}K(x, B_k)\mu(dx)<\infty.$$

由于$\sum_{m,k,l}A_{m,k,l}\times B_k=X\times Y$，故$\mu K$限于半代数$\mathscr{C}=\{A\times B: A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$为$\sigma$-有限。因此，由第一章定理4.7知，满足(3.3)的测度μK是唯一的。证毕。

下一定理推广了定理2.5。

3.4 定理 设K为从$(X, \mathscr{A})$到$(Y, \mathscr{B})$的一个σ-有限核，μ为$(X, \mathscr{A})$上的一σ-有限测度，f为$X\times Y$上的一非负$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数。则

(1) $x\to\int f(x, y)K(x, dy)$为$\mathscr{A}$-可测函数；

(2) 我们有

$$\int fd(\mu K)=\int\left[\int f(x, y)K(x, dy)\right]\mu(dx). \tag{3.4}$$

证 (1)令$\mathscr{C}=\{A\times B: A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$，不妨假定$\mu$为有限测度，且对一切$x\in X$，$K(x, \cdot)$也为有限测度(否则，分别取$X$及$Y$的可数划分$\{A_n\}$及$\{B_n\}$，使得$\forall x\in X$，$n\geqslant 1$有$K(x, B_n)<\infty$，$\mu(A_n)<\infty$，并在每个$A_n\times B_m$上考虑问题)。由命题3.2及(3.3)式易知：对$\mathscr{C}$中集合的示性函数定理的结论成立。故由第

二章定理2.1知：对一切有界的$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数$f$结论成立。最后，由积分的单调收敛定理推知：对一切非负$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数$f$结论成立。证毕。

下一定理是 Fubini 定理(定理 2.7)的推广形式。

3.5 定理 设K为从$(X, \mathscr{A})$到(Y, B)的一个σ-有限核，μ为$(X, \mathscr{A})$上的一σ-有限测度，μK为(3.2)定义的测度。若f为$X\times Y$上一$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$-可测函数，它关于$\mu K$可积(相应地，积分存在)，则有下列结论：

(1) 对μ-a.e. x，f_x关于$K(x, \cdot)$可积(相应地，积分存在)。

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int_Y f_x(y)K(x, dy), & \text{若 } f_x \text{ 关于} K(x,\cdot)\text{可积(相应地,积分存在)}\\ 0 & \text{，其它情形}\end{cases}$$

则I_f关于μ可积(相应地，积分存在)，且有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu K)=\int_X I_f(x)\mu(dx) \tag{3.5}$$

证 留给读者作为练习。

下面我们将上述结果推广到任意有限多个可测空间乘积情形。

3.6 定理 设$(X_j, \mathscr{A}_j), j=1,\cdots n$为可测空间，$\mu_1$为$(X_1, \mathscr{A}_1)$上的一$\sigma$-有限测度。对每个$2\leqslant i\leqslant n$，设$K(x_1, \cdots x_{i-1}, dx_i)$为从$\left(\prod_{j=1}^{i-1}X_j, \prod_{j=1}^{i-1}\mathscr{A}_j\right)$到$(X_i, \mathscr{A}_i)$的一个$\sigma$-有限核。

(1) 在$\left(\prod_{j=1}^{n}X_j, \prod_{j=1}^{n}\mathscr{A}_j\right)$上存在唯一的测度$\mu$，使得对一切可测矩形$A_1\times\cdots\times A_n\in\prod_{j=1}^{n}\mathscr{A}_j$有

$$\mu(A_1\times\cdots\times A_n)=\int_{A_1}\mu_1(dx_1)\int_{A_2}K(x_1,\ dx_2)\cdots$$

$$\int_{A_n}K(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ dx_n). \qquad (3.6)$$

此外，μ 是 σ-有限测度。

(2) 设 f 为$\left(\prod_{j=1}^{n}X_j,\ \prod_{j=1}^{n}\mathscr{A}_j\right)$上的非负可测函数，则有

$$\int f d\mu=\int_{X_1}\mu_1(dx_1)\int_{X_2}K(x_1,\ dx_2)\cdots\int_{X_{n-1}}K(x_1\cdots x_{n-2},$$

$$dx_{n-1})\int_{X_n}f(x_1\cdots,\ x_n)K(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ dx_n) \quad (3.7)$$

证 (1)中 μ 的存在性及结论(2)容易由归纳法证明．μ 的唯一性由测度扩张的唯一性(第一章定理 4.7)推得(注意可测矩形全体构成半代数)。证毕。

习题

3.7 叙述并证明 n 个可测空间乘积情形的定理 3.5。

§4 无穷乘积空间上的概率测度

(Tulcea定理)

在概率论中，我们经常要讨论任意有限多个试验(不一定相互独立)。为了能在同一概率空间中考虑它们，我们需要在无穷乘积可测空间上构造概率测度。下一定理解决了这一问题。

4.1 定理 (Tulcea)令$(\Omega_j,\ \mathscr{F}_j)$，$j=1,\ 2,\ \cdots$为一列可测空间，$\Omega=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j$，$\mathscr{F}=\prod_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j$，$P_1$ 为 $(\Omega_1,\ \mathscr{F}_1)$上的一概率测度。设对每个 $i\geqslant 2$，$P(\omega_1,\ \cdots\omega_{i-1},\ d\omega_i)$为从$\left(\prod_{j=1}^{i-1}\Omega_j,\right.$

$\prod_{j=1}^{i-1}\mathscr{F}_j\Big)$到$(\Omega_i,\ \mathscr{F}_i)$的一个核，且有$P(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{i-1},\Omega_i)=1$。则存在$(\Omega,\ \mathscr{F})$上唯一的概率测度$P$，使得对一切$n\geqslant 1$，有

$$P\Big(B^n\times\prod_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j\Big)=P_n(B^n),\qquad B^n\in\prod_{j=1}^{n}\mathscr{F}_j\quad(4.1)$$

其中P_n为$\prod_{j=1}^{n}\mathscr{F}_j$上如下定义的概率测度(见定理3.6)：

$$P_n(B^n)=\int_{\Omega_1}P_1(d\omega_1)\int_{\Omega_2}P(\omega_1,\ d\omega_2)\cdots$$

$$\int_{\Omega_{n-1}}P(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{n-2},\ d\omega_{n-1})$$

$$\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)P(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{n-1},\ d\omega_n)$$

证 设$n>m$为两个自然数，则显然有

$$P_n\Big(B^m\times\prod_{j=m+1}^{n}\Omega_j\Big)=P_m(B^m),$$

于是按(4.1)可在可测柱集全体$\mathscr{Z}$上唯一定义一集函数P。令$\mathscr{F}^n=\Big\{B^n\times\prod_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j:\ B^n\in\prod_{j=1}^{n}\mathscr{F}_j\Big\}$，则$\mathscr{F}^n\subset\mathscr{F}^{n+1}$，且$\bigcup_n\mathscr{F}^n=\mathscr{Z}$。由于$P$限于每个$\mathscr{F}^n$为概率测度，故$P$在代数$\mathscr{Z}$上是有限可加的。下证$P$为$\mathscr{Z}$上的概率测度，为此只需证$P$在空集$\phi$处连续。我们用反证法。假定有$A_n\in\mathscr{Z}$，$n\geqslant 1$，$A_n\downarrow\phi$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)>0$。必要时在序列$(A_n)$首项前添加若干项$\Omega$，且在两个集$A_n$及$A_{n+1}$之间适当重复若干项$A_n$，我们可以进一步假定$A_n\in\mathscr{F}^n$。因此有$A_n=B^n\times\prod_{j=n+1}^{\infty}\Omega_j$。由于$A_{n+1}\subset A_n$，我们

有 $B^{n+1}\subset B^n\times\Omega_{n+1}$。此外，对每个 $n>1$，

$$P(A_n)=\int_{\Omega_1}g_n^{(1)}(\omega_1)P_1(d\omega_1),$$

其中

$$g_n^{(1)}(\omega_1)=\int_{\Omega_2}P(\omega_1,\ d\omega_2)\cdots\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1,\ \cdots,\omega_n)$$

$$\cdot P(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{n-1},\ d\omega_n)。$$

由于 $I_{B^{n+1}}(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{n+1})\leqslant I_{B_n}(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)$，故对固定 ω_1，$g_n^{(1)}(\omega_1)$单调下降趋于某极限 $h(\omega_1)$。由控制收敛定理，我们有 $\int h_1(\omega_1)P_1(d\omega_1)=\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)>0$。于是存在$\omega_1'\in\Omega_1$，使 $h_1(\omega_1')>0$。实际上，必有 $\omega_1'\in B^1$。否则，对一切 $n>1$有 $I_{B^n}(\omega_1',\ \omega_1,\ \cdots\omega_n)=0$，从而 $g_n^{(1)}(\omega_1')=0$，这导致 $h_1(\omega_1')=0$。

现设 $n>2$，则

$$g_n^{(1)}(\omega_1')=\int g_n^{(2)}(\omega_2)P(\omega_1',\ d\omega_2),$$

其中

$$g_n^{(2)}(\omega_2)=\int_{\Omega_3}P(\omega_1',\ \omega_2,\ d\omega_3)\cdots$$

$$\int_{\Omega_n}I_{B^n}(\omega_1',\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)P(\omega_1',\ \omega_2,\cdots,\omega_{n-1},\ d\omega_n)$$

如上所证，可知 $g_n^{(2)}(\omega_i)\downarrow h_2(\omega_2)$。由于 $g_n^{(1)}(\omega_1')\to h_1(\omega')>0$，故存在 $\omega_2'\in\Omega_2$，使 $h_2(\omega_2')>0$。如上所证，可知$(\omega_1',\omega_2')\in B^2$。

最后，由归纳法，可得到一列点 ω_1'，ω_2'，$\cdots$，使得 $\omega_j'\in\Omega_j$，且$(\omega_1',\ \cdots,\ \omega_n')\in B^n$。因此最终有$(\omega_1',\ \omega_2',\ \cdots)\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$，这导致矛盾。这样，我们证明了 P为代数$\mathscr{Q}$上的概率测度。由测度扩张定理知，它可唯一地扩张成为 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{Q})$上的概率测度。

证毕。

4.2 系 (Kolmogrov) 设$(\Omega_j, \mathscr{F}_j, P_j)$为一列概率空间，令$\Omega = \prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j$，$\mathscr{F} = \prod_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j$，则存在$(\Omega, \mathscr{F})$上的唯一概率测度$P$，使得对一切$n\geqslant 1$，对一切$A_j \in \mathscr{F}_j$，$1\leqslant j\leqslant n$，有

$$P\left(\prod_{j=1}^{n} A_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P_j(A_j). \qquad (4.2)$$

习题

4.3 设$(\Omega_i, \mathscr{F}_i, P_i)(i\in I)$为一族概率空间，令$\mathscr{P}_0(I)$表示$I$的非空有限子集全体，则在$\left(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)$上存在唯一的概率测度$P$，使得对任何$S\in\mathscr{P}_0(I)$，有

$$P\left(\prod_{i\in S} A_i \times \prod_{i\in I\setminus S} \Omega_i\right) = \prod_{i\in S} P_i(A_i),\ A_i\in\mathscr{F}_i,\ i\in S.$$

（提示：利用定理1.4.(3)。）

4.4 试将定理4.1推广到任意无穷多个可测空间乘积情形。

第五章　Hausdorff空间上的测度与积分

§1　拓扑空间

本节介绍拓扑空间的一些基本概念和结果，这是为本章其余各节作准备的。这里我们已假定读者熟悉有关距离空间的概念和基本结果。

1.1　设 X 为一非空集合，$\mathscr{G}$ 为 X 的一子集族。如果 $\mathscr{G}$ 满足如下条件：

（1）X，$\phi\in\mathscr{G}$；

（2）$\mathscr{G}$ 对有限交及任意并运算封闭，

则称 $\mathscr{G}$ 为 X 的一个**拓扑**，称序偶 $(X, \mathscr{G})$ 为**拓扑空间**。当拓扑 $\mathscr{G}$ 自明或无需指出时，直接称 X 为拓扑空间，$\mathscr{G}$ 中的集合称为 X 的**开子集**（或**开集**）。设 F 为 X 的一子集，若其补集 F^c 为开集，则称 F 为**闭集**。我们用 $\mathscr{F}$ 表示 X 中的闭集全体，则 $\mathscr{F}$ 对有限并及任意交运算封闭。

1.2　设 $(X, \mathscr{G})$ 为一拓扑空间，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{G}$ 的子类，如果 $\mathscr{G}$ 中每一成员都是 $\mathscr{B}$ 中某些成员的并，则称 $\mathscr{B}$ 为拓扑 $\mathscr{G}$ 的**基**。若集类 $\mathscr{D}$ 中成员的有限交全体 $\mathscr{D}_{\cap f}$ 为拓扑 $\mathscr{G}$ 的基，则称 $\mathscr{D}$ 为拓扑 $\mathscr{G}$ 的**子基**。

1.3　设 $(X, \mathscr{G})$ 为一拓扑空间，Y 为 X 的一子集，令 $\mathscr{G}_Y=\{G\cap Y: G\in\mathscr{G}\}$，则 $\mathscr{G}_Y$ 为 Y 的一个拓扑。我们称 $(Y, \mathscr{G}_Y)$ 为 $(X, \mathscr{G})$ 的（拓扑）**子空间**，称拓扑 $\mathscr{G}_Y$ 为由拓扑 $\mathscr{G}$ 在 Y 上**诱导出的拓扑**。

1.4　设 $(X, \mathscr{G})$ 为一拓扑空间，$x\in V\subset X$。称 V 为 x 的一个

邻域，如果在$U\in\mathscr{G}$，使$x\in U\subset V$；称V为x的**一个开邻域**，如果$V\in\mathscr{G}$。

1.5 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，A为X的一子集，称包含A的最小闭集为A的**闭包**，并以$\bar{A}$记之；称含于A的最大开集为A的**内部**，并以$\mathring{A}$记之。令$\partial A=\bar{A}/\mathring{A}$，称$\partial A$为$A$的**边界**。

1.6 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，点$x\in X$的所有邻域构成的集类称为点x的**邻域系**，记为$\mathscr{U}_x$。设$\mathscr{V}_x$为$\mathscr{U}_x$的子类，如果对每一$U\in\mathscr{U}_x$，存在$V\in\mathscr{V}_x$，使$V\subset U$，则称$\mathscr{V}_x$为点x的**邻域系的基**，或称为点x的**局部基**。

1.7 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，A为X的一子集。如果$\bar{A}=X$，则称A在X中**稠密**。若X有可数稠子集，则称X为**可分(拓扑)空间**。

1.8 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，若X中的每个点有可数局部基，则称X为**满足第一可数性公理的空间**。若X本身有可数基，则称X为**具可数基空间或满足第二可数性公理的空间**。显然：满足第二可数性公理的空间必满足第一可数性公理且为可分空间。

1.9 设$\mathscr{A}$为X上一集类，B为X的一子集。如果$B\subset\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$，则称$\mathscr{A}$为$B$的一个**覆盖**。若$\mathscr{A}$为可数或有限类时，分别称$\mathscr{A}$为$B$的可数或有限覆盖。若$\mathscr{A}$是$B$的覆盖，$\mathscr{A}_1$是$\mathscr{A}$的子类且也是$B$的覆盖，则称$\mathscr{A}_1$为$\mathscr{A}$的(关于$B$的)**子覆盖**。

1.10 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，如果X的每一开覆盖都有有限(相应地，可数)子覆盖，则称X为**紧空间**(相应地，**Lindelöf空间**)。如果X的子集K的每一开覆盖都有有限子覆盖，则称集K为**紧集**。如果X的每个点有一紧邻域，则称X为**局部紧空间**。如果X可表为紧集的可数并，则称X为**σ-紧空间**。

1.11 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，令Δ为任一不属于X的元素，令$X^\Delta=X\cup\{\Delta\}$，令$\mathscr{G}^\Delta=\mathscr{G}\cup\mathscr{G}_1$，其中

$$\mathscr{G}_1=\{E\subset X^\Delta:\ X^\Delta\setminus E\ \text{为}X\text{的紧闭集}\}$$

则$(X^\Delta,\ \mathscr{G}^\Delta)$为紧拓扑空间，$(X,\ \mathscr{G})$为其子空间．我们称$(X^\Delta,\ \mathscr{G}^\Delta)$为$(X,\ \mathscr{G})$的**单点紧化**。

注意：紧空间中的闭集必为紧集．但在一般拓扑空间中，紧集未必是闭集。

1.12 设$(X,\ \mathscr{G})$为一拓扑空间，如果X的任意两个不同的点x及y都可以用两个不交开集U及V分开（即$x\in U$；$y\in V$，且$U\cap V=\phi$），则称X为Hausdorff **空间**。在一Hausdorff空间中，紧集必为闭集，单点集必为紧集(后一结论对一般拓扑空间也成立)．

如果X是Hausdorff空间，且任意两个不交闭集可用两个不交开集分开，则称X为**正规空间**．

Hausdorff空间亦称为T_2**-型空间**，正规空间亦称为T_4**-型空间**。

1.13 设$(X,\ \mathscr{G})$及$(Y,\ \mathscr{H})$为两个拓扑空间，$f:\ X\to Y$为从X到Y中一映射，若$f^{-1}(\mathscr{H})\subset\mathscr{G}$（即开集的原象为开集)，则称$f$为$X$到$Y$中的**连续映射**．

若$x\in X$，且$f(x)$在Y中的任意邻域W的原象$f^{-1}(W)$为x在X中的邻域，则称f**在点x处连续**。

设f：$X\to Y$为X到Y上的一对一映射，且f及f^{-1}都是连续映射，则称f为从X到Y上的**同胚映射**。

如果在两个拓扑空间中存在同胚映射，则称这两个拓扑空间**同胚**。

1.14 设f为一拓扑空间X上的实值函数。称集合$\{x\in X: f(x)\neq 0\}$的闭包为f的**支撑**，记为$\mathrm{sup}(f)$．若$\mathrm{sup}(f)$为紧集，则称f为具支撑的。

1.15 为方便起见，我们引入下列记号：

设X为一拓扑空间。我们分别用$\mathscr{G}$、$\mathscr{F}$及$\mathscr{K}$表示X中的全

体开集、全体闭集及全体紧集所成的集类。我们用 $\mathscr{G}_\delta$ 表示$\mathscr{G}$中元素的可列交全体，用 $\mathscr{F}_\sigma$($\mathscr{K}_\sigma$)表示 $\mathscr{F}$($\mathscr{K}$) 中元素的可列并全体。$\mathscr{G}_\delta$ 中的元称为 $\mathscr{G}_\delta$-集，$\mathscr{F}_\sigma$ 中的元称为 $\mathscr{F}_\sigma$-集。$\mathscr{K}_\sigma$ 中的元称为 $\mathscr{K}_\sigma$-集（或称为 σ-紧集)。此外，我们用 $C(X)$、$C_b(X)$ 及 $C_c(X)$分别表示 X 上的连续函数、有界连续函数及具紧支撑的连续函数全体。

1.16 定理(Urysohn引理) 设 X 为一正规空间，E 及 F 为X的两个不交闭子集。则存在 X 上的一连续函数 f，使得$0\leqslant f\leqslant 1$，且 f 在 E 上取值为 0，在 F 上取值为 1。

证 令 D 为区间(0, 1)中二进小数全体(即 $D=\left\{\frac{m}{2^n}:1\leqslant m<2^n, n=1,2,\cdots\right\}$)，由 X 的正规性，存在不交开集$U_{1/2}$及 $V_{1/2}$ 使 $E\subset U_{1/2}$，$F\subset V_{1/2}$。由于 $V_{2/1}^c$ 为闭集，且$U_{1/2}\subset V_{1/2}^c$，故 $\bar{U}_{1/2}\subset V_{1/2}^c\subset F^c$。因此我们有 $E\subset U_{1/2}\subset\bar{U}_{1/2}\subset F^c$，同理，存在开集 $U_{1/4}$及 $U_{3/4}$使得

$$E\subset U_{1/4}\subset\bar{U}_{1/4}\subset U_{1/2},\quad \bar{U}_{2/1}\subset U_{3/4}\subset\bar{U}_{3/4}\subset F^c.$$

由归纳法知，存在一族开集$\{U_r\}_{r\in D}$，使得

$$E\subset U_r\subset\bar{U}_r\subset U_s\subset\bar{U}_s\subset F^c,\quad r<s,\quad r,s\in D.$$

令

$$f(x)=\begin{cases}1 & , x\notin\bigcup_r U_r\\ \inf\{r: x\in U_r\}, & x\in\bigcup_r U_r\end{cases}$$

则 $0\leqslant f\leqslant 1$，显然 f 在 E 上为 0，在 F 上为1. 下证 f 为连续函数。设 $0\leqslant\alpha<1$，$0<\beta\leqslant 1$，我们有

$$f^{-1}([0,\beta))=\bigcup_{r<\beta}U_r$$

$$f^{-1}((\alpha,1])=f^{-1}([0,\alpha])^c=(\bigcap_{r>\alpha}U_r)^c=(\bigcap_{r>\alpha}\bar{U}_r)^c$$

这表明 $f^{-1}([0,\beta))$ 及 $f^{-1}((\alpha,1])$ 为开集，从而对 $0<\alpha<\beta<1$，$f^{-1}((\alpha,\beta))$ 也为开集。但 $[0,\beta)$，$(\alpha,1]$ 及 (α,β) 这三种类型开集全体构成 $[0,1]$ 的基（即 $[0,1]$ 作为一拓扑空间，其中开集都可表为这三类开集的并），故 f 为连续函数。证毕。

1.17 定理（Tietze 扩张定理） 令 X 为一正规空间，E 为 X 的一闭子集，如果 f 为定义于 E 的一有界实值连续函数（E 按 X 诱导出的拓扑为一拓扑空间），则存在 X 上的有界连续函数 g，使 g 在 E 上的限制为 f，且使 $\sup\limits_{x\in X}|g(x)|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$。

证 不妨假定 $\sup|f(x)|=1$。令 $E_1=[f\leqslant -1/3]$，$F_1=[f\geqslant 1/3]$，由 Urysohn 引理，可取 X 上的一连续函数 g_1 使得 $-1/3\leqslant g_1\leqslant 1/3$，且 g_1 在 E 上为 $-1/3$，在 F_1 上为 $1/3$。
这时显然有

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant 2/3,\quad \forall x\in E$$

依归纳法，可取 X 上的连续函数 $g_2,g_3\cdots$，使得 $|g_n|\leqslant 2^{n-1}/3^n$，且有

$$|f(x)-\sum_{i=1}^{n}g_i(x)|\leqslant (2/3)^n,\quad \forall x\in E$$

令 $g=\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i$，则 g 即为满足定理要求的连续函数。证毕。

下面我们研究局部紧 Hausdorff 空间的性质。

1.18 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间，K 及 L 为 X 的两个不交紧子集，则存在 X 的两个不交开子集 U 及 V，使得 $K\subset U$，$L\subset V$。

证 不妨设 K 及 L 皆非空。首先任意取定某 $x\in K$，则对任何 $y\in L$，存在不交开集 U_y 及 V_y，使 $x\in U_y$，$y\in V_y$，由于 L 为紧集，故存在 $y_1,\cdots,y_n\in L$，使 $L\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$，令

$$U_x=\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i},\quad V_x=\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i},$$

则 U_x 及 V_x 为不交开集，且 $x\in U_x$，$L\subset V_x$。对每个 $x\in K$，我们可以找到这样的一对开集。由于 K 是紧集，故存在 $x_1,\cdots,x_m\in K$，使 $K\subset\bigcup_{i=1}^{M} U_{x_i}$。令

$$U=\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i},\quad V=\bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i},$$

则 $K\subset U$，$L\subset V$，且 U 及 V 为不交开集，证毕。

作为该引理的一个推论，我们有

1.19 命题 紧 Hausdorff 空间为正规空间。

1.20 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，K 为 X 的紧子集，U 为包含 K 的一开集。则

(1) 存在开集 V，其闭包为紧集，使得

$$K\subset V\subset\overline{V}\subset U.$$

(2) 存在一具紧支撑的连续函数 f，使得 $\mathrm{sup}(f)\subset U$，且 $I_K\leqslant f\leqslant I_U$。

(3) 如果 $K\in\mathscr{G}_\delta$，则(2)中的 f 可取为在 K^c 上 <1。

(4) 存在紧集 K_1 及开集 U_1，使得 $K_1\in\mathscr{G}_\delta$，U_1 为 $\mathscr{G}_\delta$ 中紧集的可列并，且使 $K\subset U_1\subset K_1\subset U$。

证(1) 设 $x\in K$，由于 X 的局部紧性，存在 x 的开邻域 W_x，其闭包为紧集。不妨设 $W_x\subset U$。对紧集 $\{x\}$ 及 $\overline{W}_x\backslash W_x$ 应用引理1.18，存在不交开集 V_1 及 V_2，使 $x\in V_1$，$\overline{W}_x\backslash W_x\subset V_2$。令 $V_x=V_1\cap W_x$。由于 $\overline{V}_1=V_2^c$，故易知 $\overline{V}_x\cap U^c=\phi$，即 $\overline{V}_x\subset U$，显然 $x\in V_x$，且 $\overline{V}_x$ 为紧集。由于 K 是紧集，故存在 $x_1,\cdots,x_n\in K$，使 $K\subset\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$。令 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$，则 $\overline{V}$ 为紧集，且 $K\subset V\subset\overline{V}\subset U$。

(2) 令 V 为(1)中的开集. 作为子空间 $\bar{V}$ 为紧 Hausdorff 空间,从而为正规空间。由 Urysohn 引理,存在 $\bar{V}$ 上的连续函数 g,使 $0\leqslant g\leqslant 1$,且 g 在 K 上为 1,在 $\bar{V}\backslash V$ 上为 0。令

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in\bar{V} \\ 0 & x\in X\backslash\bar{V}\end{cases}$$

则 f 在 $\bar{V}$ 上连续,在 $X\backslash V$ 上为 0(从而连续)。由于 $\bar{V}$ 及 $X\backslash V$ 为闭集,且 $\bar{V}\cup(X\backslash V)=X$,故 f 在 X 上连续. 显然有 $I_K\leqslant f\leqslant I_U$,且 $\sup(f)\subset\bar{V}\subset U$。

(3) 令 V 为(1)中的开集,设 $K\in\mathscr{G}_\delta$,则存在一列下降开集 $G_n\subset V$,使得 $\bigcap_n G_n=K$。则由(2),存在连续函数 f_n,使 $0\leqslant f_n\leqslant 1$,且 f_n 在 K 上为 1,在 G_n^c 上为 0。令

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n$$

则 f 为连续函数,$0\leqslant f\leqslant 1$,且 f 在 K 上为 1,在 K^c 上 <1。此外有 $\sup(f)\subset\bar{V}\subset U$。

(4) 由(1)不妨设 $\bar{U}$ 为紧集,令 f 为(2)中的函数,使得 $0\leqslant f\leqslant 1$,f 在 K 上为 1,在 V^c 上为 0。令

$$K_1=[f\geqslant 1/2]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[f>1/2-1/n]$$

$$U_1=[f>1/2]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f\geqslant 1/2+1/n]$$

则 K_1 及 U_1 满足(4)的要求。

1.21 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间,K 为 X 的一紧子集,U_1 及 U_2 为 X 的开子集,使得 $K\subset U_1\cup U_2$、则存在紧集 K_1 及 K_2,使得 $K=K_1\cup K_2$,$K_1\subset U_1$,$K_2\subset U_2$。

证 令 $L=K\backslash U_1$,$L_2=K\backslash U_2$,则 L_1 及 L_2 为不交紧集,

由引理1.18，存在不交开集V_1及V_2，使$V_1\supset L_1$，$V_2\supset L_2$。令$K_1=K\setminus V_1$，$K_2=K\setminus V_2$，则易证K_1及K_2满足引理要求。

1.22 命题 设X为一局部紧Hausdorff空间，$f\in C_c(X)$，$U_1,\cdots,U_n$为X的开子集，使得$\sup(f)\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$.则存在$C_c(X)$中的函数$f_1,\cdots,f_n$，使得$f=f_1+\cdots+f_n$，且$\sup(f_i)\subset U_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。进一步，若$f$非负，则每个$f_i$也可取为非负。

证 由归纳法，只需考虑$n=2$情形。由引理1.9，存在紧集K_1及K_2，使$\sup(f)=K_1\cup K_2$，$K_1\subset U_1$，$K_2\subset U_2$。由命题1.8(2)，存在$h_1,h_2\in C_c(X)$，使得

$$I_{K_i}\leqslant h_i\leqslant I_{U_i},\ \sup(h_i)\subset U_i,\quad i=1,2$$

令$g_1=h_1$，$g_2=h_2-(h_1\wedge h_2)$，则g_1及g_2非负，其支撑分别含于U_1及U_2，且在$\sup(f)$上，$g_1(x)+g_2(x)=h_1(x)\vee h_2(x)=1$.最后，令$f_i=fg_i$，$i=1,2$，则$f=f_1+f_2$，$\sup(f_i)\subset U_i$，$i=1,2$.证毕。

1.23 命题 设X为一局部紧Hausdorff空间，$K_1,\cdots,K_n$为X的不交紧子集，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为实数。则存在一具紧支撑的连续函数f，使得

(1) $f(x)=\alpha_i$，如果$x\in K_i$，$i=1,\cdots,n$。

(2) $\|f\|_\infty=\max\{|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|\}$。

其中$\|f\|_\infty\triangleq\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$。

证 由引理1.18不难用归纳法证明：存在不交开集$U_1,\cdots,U_n$，使$K_i\subset U_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。由命题1.20.(2)，对每个i，存在$f_i\in C_c(X)$，$0\leqslant f_i\leqslant 1$，使得$I_{K_i}\leqslant f_i\leqslant I_{U_i}$，令$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$，则$f$满足命题要求。证毕。

1.24 系 设X为一局部紧Hausdorff空间，K及L为X的

两个不交紧子集，则存在两个不交的开$\mathscr{F}_\sigma$-集U及V，使得$K\subset U$，$L\subset V$。

证 由命题1.23，存在$f\in C_c(X)$，使$0\leqslant f\leqslant 1$，且f在K上为1，在L上为0。令

$$U=\left[f>\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$$

$$V=\left[f<\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[f\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right]$$

则U及V为开$\mathscr{F}_\sigma$-集，$U\cap V=\phi$，且$U\supset K$，$V\supset L$。证毕。

1.25 引理 设X为一局部紧Hausdorff空间，K为X的一紧子集，$U_1,\cdots,U_n$为X的开子集，使得$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$。如果$K\in\mathscr{G}_\delta$，则存在紧$\mathscr{G}_\delta$-集$K_1,\cdots,K_n$，使得$K_i\subset U_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，且$K=\bigcup_{i=1}^{n}K_i$。

证 由归纳法知只需对$n=2$情形证明引理结论。令$L_1=K\backslash U_1$，$L_2=K\backslash U_2$，则L_1及L_2为不交紧集。由系1.24知，存在不交开$\mathscr{F}_\sigma$-集V_1及V_2，使$V_1\supset L_1$，$V_2\supset L_2$。令$K_1=K\backslash V_1$，$K_2=K\backslash V_2$，则K_1及K_2满足引理要求。证毕。

习题

1.26 证明1.11。

1.27 设X及Y的为两个拓扑空间，f为X到Y中的连续映射，K为X的紧子集，则$f(K)$为Y的紧子集。

1.28 试证：(1) 紧空间中每个闭集为紧集；(2) Hausdorff空间中的紧集为闭集(提示：利用引理1.18)；(3) 含于一紧集的闭集为紧集。

1.29 设X为一紧空间，Y为一Hausodrff空间，若f为

X 到 Y 上的一对一连续映射，则 f 为 X 到 Y 上的同胚映射。

1.30 设 X 及 Y 为拓扑空间，令 $F_1,\cdots,F_n$ 为 X 的闭子集，使得 $X=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$。设 f 为 X 到 Y 中的一个映射，若 f 限于每个 F_i 为连续，则 f 在 X 上连续。

1.31(Dini **定理**) 令 X 为一紧拓扑空间，f_n 为 X 上的一列非负连续函数，且 $f_n\downarrow 0$，则 f_n 一致收敛于 0。

1.32 证明 1.11，并证明：为要一拓扑空间 X 为紧空间，必须且只需单点集$\{\triangle\}$是单点紧化 $X\cup\{\triangle\}$ 中的开集。

1.33 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，F 为 X 的一闭子集。则作为 X 的子空间，F 是局部紧 Hausdorff 空间。

1.34 (Lindelöf **定理**) 满足第二可数性公理的空间为 Lindelöf 空间。

1.35 设 X 为一距离空间，则为要 X 满足第二可数性公理，必须且只需 X 为可分的。

1.36 Lindelöf 距离空间必为可分空间。

1.37 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间必为 σ-紧空间(提示：利用 Lindelöf 定理)。

1.38 设 X 为一 σ-紧的局部紧 Hausdorff 空间，则存一列 $\mathscr{G}_\delta$-紧集 K_n，使 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$，$n\geqslant 1$，且 $X=\bigcup_n K_n$。(提示：利用命题 1.20.(4))

1.39 (Urysonh **嵌入定理**)具可数基的正规 Hausdorff 空间必同胚于 Hilbert 空间 R^∞ 的某一子空间。这里 $R^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots)$，$x_i\in R,i\geqslant 1$，$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$，它按如下内积$(x,y)$成为一Hilbert 空间：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i$$

(提示：分以下三步骤证明定理：1°设 C为 X的可数基(假定 $\phi\notin C$)。令$\mathscr{A}=\{(U,V):U,V\in C,\ \ \overline{U}\subset V\}$，将$\mathscr{A}$的成员排列为：$(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots$,由 Urysohn 引理，对每个 $i\geqslant 1$ 存在连续映射 $f_i:X\to[0,1]$，使 f_i 在$\overline{U}$上为 0，在 V^c 上为 1。2°在 X 上定义一映射：$f(x)=\left(f_1(x),\frac{1}{2}f_2(x),\frac{1}{3}f_3(x),\cdots,\right)$证明 f 为 X 到 R^∞ 中的一对一连续映射.3°证明对X的每一开集W,$f(W)$是 $f(X)$的开集)

1.40具可数基的局部紧 Hausdorff 空间 X 必为可距化的(即其拓扑可以由一距离引出)。(提示：X 的单点紧化 $X\cup\{\triangle\}$仍具可数基)。

1.41.设 X 为一拓扑空间，U 为 X 的开子空间，K 为 U 的一子集。则要使 K 为 U 中紧集，必须且只需 K 为 X 的紧集。

§2 Hausdorff 空间上的测度与 Riesz表现定理

本节主要应用 Daniell 积分研究局部紧 Hausdorff 空间的 $C_C(X)$ 上的正线性泛函的积分表示(即所谓的 Riesz 表现定理)。这里所用的方法比通常教科书中的方法有改进，这一改进允许我们将所得结果推广到一般 Hausdorff 空间情形。

首先，我们研究拓扑空间上由某些集类生成的 σ-代数及它们之间的关系。

2.1 定义 设 X 为一拓扑空间，$C_C(X)$ 为具紧支撑的连续函数全体。则 $C_C(X)$为一向量格(第四章定义 6.1)。令

$C_C(X)_+^*=\{f:\exists f_n\in C_C(X)_+,\ 使\ f_n\uparrow f\}$，

$\mathscr{O}_C=\{C\subset X:I_C\in C_C(X)_+^*\}$

则称$\mathscr{O}_C$中的元为$C_C(X)$-**开集**。由第四章引理6.7知，我们有$\sigma(\mathscr{O}_C)=\sigma(C_C(X))$。

类似可定义$C(X)$-开集及$C_b(X)$-开集。

当X为局部紧Hausdorff空间时，下一命题给出了$C_C(X)$-开集的一个刻画。

2.2 命题 设X为一局部紧Hausdorff空间。则一集合为$C_C(X)$-开集，当且仅当它为开$\mathscr{K}_\sigma$-集。特别，我们有σ(开$\mathscr{K}_\sigma$-集)$=\sigma(C_C(X))$。

证 设G为$C_C(X)$-开集。依定义，存在$C_C(X)$中一列非负函数f_n单调上升趋于I_G。于是我们有

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}[f_n>0]=\bigcup_{n,k=1}^{\infty}\left[f_n\geqslant\frac{1}{k}\right]\in\mathscr{K}_\sigma$$

反之，设G为一开$\mathscr{K}_\sigma$-集，即$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$，其中$K_n$为紧集，$n\geqslant1$。由命题1.20.(2)，对每个$n$，存在$f_n\in C_C(X)$，$0\leqslant f_n\leqslant1$，使$f_n$在$K_n$上为1，且$\sup(f_n)\subset G$。令$g_n=\bigvee\limits_{1}^{n}f_i$，则$g_n\in C_C(X)$，$g_n\uparrow I_G$，于是$G$为$C_C(X)$-开集。证毕。

2.3 命题 设X为一局部紧Hausdorff空间。则$\sigma(C_C(X))=\sigma$(紧$\mathscr{G}_\delta$-集)。

证 设$f\in C_C(X)$，则对一切$a\in R$，

$$[f\geqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[f>a-\frac{1}{n}\right]\in\mathscr{G}_\delta$$

故$[f\geqslant a]$为紧$\mathscr{G}_\delta$-集，从而$\sigma(C_C(X))\subset\sigma$(紧$\mathscr{G}_\delta$-集)。反之，设$K$为紧$\mathscr{G}_\delta$-集，则由命题1.20.(3)，存在$f\in C_C(X)$，使$K=[f=1]$，故有$\sigma$(紧$\mathscr{G}_\delta$-集)$\subset\sigma(C_C(X))$。证毕。

2.4 定义 设X为一拓扑空间，由全体开集生成的σ-代数称

为 Borel **σ-代数**，记为$\mathscr{B}(X)$。$\mathscr{B}(X)$中的元称为 Borel **集**。由全体紧$\mathscr{G}_\delta$-集生成的σ-代数称为**强 Baire σ-代数**，记为$\mathscr{B}_a(X)$。$\mathscr{B}_a(X)$中的元称为**强 Baire 集**。使全体连续函数为可测的最小σ-代数称为 Baire **σ-代数**，记为$\mathscr{B}_0(X)$。$\mathscr{B}_0(X)$中的元称为 Baire **集**。

2.5 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，则每个紧强 Baire 集为$\mathscr{G}_\delta$-集。

证 设 C 为紧强 Baire 集，由于$\mathscr{B}_a(X)=\sigma$(紧$\mathscr{G}_\delta$-集)，故存在一列紧$\mathscr{G}_\delta$-集(C_n)，使 $C=\sigma(C_1,C_2,\cdots)$(第一章习题 2.9)．由命题 1.20.(3)，对每个 n，存在 $f\in C_C(X)$，使 $0\leqslant f_n\leqslant 1$，且 $C_n=[f_n=1]$。令

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|f_n(x)-f_n(y)|.$$

则 d 为 X 上的伪距离($d(x,y)=0$ 不一定蕴含 $x=y$)。对每个 $x\in X$，令$[x]=\{y\in X: d(x,y)=0\}$，则$[x]$是 x 的等价类，其等价关系是：$x\sim y$ 当且仅当 $d(x,y)=0$．令$\widehat{X}$表等价类全体，在$\widehat{X}$上定义距离 δ：

$$\delta([x],[y])=d(x,y).$$

则$(\widehat{X},\delta)$为距离空间。令 $n(x)=[x]$，设 $r>0$，$E=\{[y]: \delta([y],[x])<r\}$．则 $n^{-1}(E)=\{y: d(y,x)<r\}$为 X 中的开集(因 $d(.,x)$ 为 X 上的连续函数)，故 n 为 X 到$\widehat{X}$上的连续函数．由习题 1.27，$n(C)$ 为$\widehat{X}$的紧子集。由于$\widehat{X}$是距离空间，$n(C)$为$\widehat{X}$中的$\mathscr{G}_\delta$-集，

即 $n(C)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\widehat{O}_n$，其中每个$\widehat{O}_n$为$\widehat{X}$的开子集。令 $O_n=n^{-1}(\widehat{O}_n)$

则 O_n 为 X 的开子集，且 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$，即 C 为$\mathscr{G}_\delta$-集。证毕。

下面我们研究 $C_C(X)$上的正线性泛函的积分表示。为此，我

们先回顾 Daniell 积分的定义(见第三章定义6.3)。设 X 为一拓扑空间，$C_C(X)$上的一线性泛函 I 称为**正的**，如果 $f\in C_C(X)$，$f\geqslant 0\Rightarrow I(f)\geqslant 0$。$C_C(X)$ 上一正线性泛函 I 称为 Daniell **积分**，如果

$$f_n\in C_C(X),\ f_n\geqslant 0,\ f_n\downarrow 0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}I(f_n)=0.$$

2.6 引理 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，I 为 $C_C(X)$ 上的一正线性泛函，则 I 为 $C_C(X)$上的一 Daniell 积分。

证 设 $f_n\in C_C(X)$，$f_n\geqslant 0$，$f_n\downarrow 0$，令 $S_1=\mathrm{supp}(f_1)$，则 $\mathrm{supp}(f_n)\subset S_1$。由 Dini 定理 f_n 在 S_1 上一致趋于 0，从而在 X 上一致趋于 0。因此，对给定 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，$f_n(x)<\varepsilon$，对一切 $x\in X$ 成立。另一方面，由命题 1.20.(2)，存在 $g\in C_C(X)$，$0\leqslant g\leqslant 1$，使 g 在 S_1 上为 1。于是当 $n\geqslant N$，我们有 $f_n\leqslant \varepsilon g$，从而有 $I(f_n)\leqslant \varepsilon I(g)$。由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}I(f_n)=0$，这表明 I 为 $C_C(X)$上的 Daniell 积分。证毕。

2.7 定义 设 X 为一拓扑空间，一子集 A 称为**有界的**，如果存在一紧集 K，使 $K\supset A$。称 A 为 **σ-有界的**，如果存在一列紧集 (K_n)，使 $A\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$。

下一定理是所谓的 Riesz **表现定理**。

2.8 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，I 为 $C_C(X)$上的一正线性泛函。则有下列结论：

(1) 存在 $\mathscr{B}(X)$上的唯一测度 μ_1 满足如下条件：

(i) $C_C(X)\subset L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu_1)$，且对 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu_1(f)$；

(ii) 对 σ-有界开集 O，有

$$\mu_1(O)=\sup\{\mu_1(K):K\subset O,\ K\in\mathscr{K}\},\tag{2.1}$$

对一切 Borel 集 A，有

$$\mu_1(A)=\inf\{\mu_1(O): O\supset A,\ O\text{ 为 }\sigma\text{–有界开集}\}. \quad (2.2)$$

此外，对任一紧集 K，有 $\mu_1(K)<\infty$。

(2) 存在$\mathscr{B}(X)$上的唯一测度 μ_2 满足如下条件：

(i)′ $C_C(X)\subset L^1(X,B(X),\mu_2)$，且对 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu_2(f)$；

(ii)′ 对任何开集 O，有

$$\mu_2(O)=\sup\{\mu_2(K): K\subset O,\ K\in\mathscr{K}\}, \quad (2.3)$$

对一切 Bored 集 A，有

$$\mu_2(A)=\inf\{\mu_2(O): O\supset A,\ O\in\mathscr{G}\}. \quad (2.4)$$

此外，对任一紧集 K，有 $\mu_2(K)<\infty$。

证 我们分别用$\mathscr{G}_0$及$\mathscr{G}_1$表示σ–紧开集及σ–有界开集全体。显然有$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}_1$，且$\mathscr{G}_0$及$\mathscr{G}_1$对可列并及有限交封闭。令

$$\mu_1^*(O)=\sup\{I(f): f\in C_C(X),\ 0\leqslant f\leqslant 1,\ \sup(f)\subset O\},$$

$$O\in\mathscr{G}_1$$

$$\mu_1^*(A)=\inf\{\mu^*(O): O\supset A,\ O\in\mathscr{G}_1\},\ A\subset X.$$

现证 μ_1^* 为 X 上的外测度。设 $O_i\in\mathscr{G}_1, i=1,2,\cdots$。若 $f\in C_C(X)$ $0\leqslant f\leqslant 1$，且 $\sup(f)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i$，则存在 n，使 $\sup(f)\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_i$。故由命题1.22，存在 $f_i\in C_C(X)$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得 $0\leqslant f_i\leqslant 1, f=f_1+\cdots+f_n$，且 $\sup(f_i)\subset O_i$。因此我们有

$$I(f)=\sum_{i=1}^{n}I(f_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_1^*(O_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1^*(O_i).$$

于是有

$$\mu_1^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1^*(O_i).$$

由于$\mathscr{G}_1$对可列并封闭，故由第一章命题 4.3 易知 μ_1^* 为 X 上的外

测度。

再证每个 Borel 集为 μ_1^*-可测集。为此，只需证每个开集为 μ_1^*-可测集。设 V 为一开集，由第一章引理 4.5 知，为证 V 为 μ_1^*-可测集，只需证：对一切 $O\in\mathscr{G}_1$，有

$$\mu_1^*(O)\geqslant\mu_1^*(O\cap V)+\mu_1^*(O\cap V^c)。\tag{2.5}$$

下面证明这一事实。不妨设 $\mu_1^*(O)<\infty$，从而 $\mu_1^*(O\cap V)<\infty$。由于 $O\cap V\in\mathscr{G}_1$，依定义，对给定 $\varepsilon>0$，存在 $f_1\in C_C(X)$，$0\leqslant f_1\leqslant1$，$\sup(f_1)\subset O\cap V$，使得 $I(f_1)\geqslant\mu_1^*(O\cap V)-\varepsilon$。令 $K=\sup(f_1)$，则 $O\cap K^c\in\mathscr{G}_1$，故存在 $f_2\in C_C(X)$，$0\leqslant f_2\leqslant1$，$\sup(f_2)\subset O\cap K^c$，使得 $I(f_2)\geqslant\mu_1^*(O\cap K^c)-\varepsilon$。由于 $O\cap K^c\supset O\cap V^c$，故 $I(f_2)\geqslant\mu_1^*(O\cap V^c)-\varepsilon$。令 $f=f_1+f_2$，则 $f\in C_C(X)$，$0\leqslant f\leqslant1$，且 $\sup(f)\subset O$。因此有

$$\mu_1^*(O)\geqslant I(f)=I(f_1)+I(f_2)\geqslant\mu_1^*(O\cap V)+\mu_1^*(O\cap V^c)-2\varepsilon$$

不等式(2.5)得证。

现令 μ_1 为 μ_1^* 在 $B(X)$ 上的限制，要证对 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu_1(f)$。首先，由 Daniell-Stone 定理(第四章定理 6.8)知，存在 $\sigma(C_C(X))$ 上的测度 μ，使对一切 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu(f)$。下面先证对一切 $C_C(X)$-开集 O，有 $\mu(O)=\mu_1(O)$。设 O 是 $C_C(X)$-开集，则存在 $f_n\in C_C(X)$，$n\geqslant1$，使 $0\leqslant f_n\uparrow I_O$，于是 $K_n\triangleq\left[f_n\geqslant\frac{1}{n}\right]\uparrow O$，$K_n$ 为紧集。由命题 1.20.(2)，存在 $g_n\in C_C(X)$，使 $I_{K_n}\leqslant g_n\leqslant I_O$，且 $\sup(g_n)\subset O$。于是有

$$\mu(O)=\sup_n\mu(K_n)\leqslant\sup_n\mu(g_n)=\sup_n I(g_n)\leqslant\mu_1^*(O)=\mu_1(O)\tag{2.6}$$

(注意：$O\in\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}_1$)。另一方面，由 μ_1^* 的定义易知 $\mu_1^*(O)\leqslant\mu(O)$。故 $\mu(O)=\mu_1(O)$。现设 $f\in C_C(X)_+$，令

$$f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I\left[\frac{k+1}{2^n}\geqslant f>\frac{k}{2^n}\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}I\left[f>\frac{k}{2^n}\right]$$

则 $f_n\uparrow f$，且$\left[f>\frac{k}{2^n}\right]$为 $C_C(X)$-开集，于是我们有

$$I(f)=\mu(f)=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(\left[f>\frac{k}{2^n}\right]\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_1\left(\left[f>\frac{k}{2^n}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\mu_1(f_n)=\mu_1(f).$$

现在证明(2.1)，设 $O\in\mathscr{G}_1$，令 $f\in C_C(X)$，$0\leqslant f\leqslant 1$，$\sup(f)\subset O$，则 $I(f)=\mu_1(f)\leqslant\mu_1(\sup(f))$，故(2.1)得证.

最后证明满足条件(i)及(ii)的测度的唯一性。设另有测度ν满足(i)及(ii)，则对 $f\in C_C(X)$，有

$$\nu(f)=I(f)=\mu_1(f).$$

设 $O\in\mathscr{G}_1$，则对任何紧集 $K\subset O$，存在 $f\in C_C(X)$，使 $I_K\leqslant f\leqslant I_O$，$\sup(f)\subset O$。故有

$$\begin{aligned}\nu(O)&=\sup\{\nu(K):K\subset O,\ K\in\mathscr{K}\}\leqslant\sup\{\nu(f):f\in C_C(X),\\&\quad 0\leqslant f\leqslant 1,\ \sup(f)\subset O\}=\sup\{I(f):f\in C_C(X),0\leqslant f\\&\quad\leqslant 1,\ \sup(f)\subset O\}\leqslant\mu_1(O)\\&=\sup\{\mu_1(K):K\subset O,\ K\in\mathscr{K}\}\\&\leqslant\sup\{\mu_1(f):f\in C_C(X),\ 0\leqslant f\leqslant 1,\sup(f)\subset O\}\\&=\sup\{\nu(f):f\in C_C(X),0\leqslant f\leqslant 1,\sup(f)\subset O\}\leqslant\nu(O).\end{aligned}$$

于是有$\nu(O)=\mu_1(O)$，从而由(2.2)知：$\nu(A)=\mu_1(A)$，对一切 $A\in\mathscr{B}(X)$成立。唯一性得证.最后，设 K 为一紧集，由命题1.20.(2)知 $\mu_1(K)<\infty$。

综上所证，(1)证毕。(2)的证明完全类似(在定义 μ_2^* 时用$\mathscr{G}$代替$\mathscr{G}_1$).

2.9 注 由 μ_1^* 及 μ_2^* 的定义易知，我们有 $\mu_1\geqslant\mu_2$。此外，由命题 1.20.(4)知：(2.1)及(2.3)分别等价于

$$\mu_1(O)=\sup\{\mu_1(K): K\subset O,\ K \text{ 为紧}\mathscr{G}_\delta\text{-集}\}\qquad(2.1)'$$

$$\mu_2(O)=\sup\{\mu_2(K): K\subset O,\ K \text{ 为紧}\mathscr{G}_\delta\text{-集}\}\qquad(2.3)'$$

最后，若 X 为 σ-紧的，则 $\mu_1=\mu_2$。

2.10 定义 令 X 为一Hausdorff 空间，$\mathscr{B}(X)$为其 Borel σ-代数，$\mathscr{A}$为 X 上一 σ-代数且$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}(X)$。设 μ 为$\mathscr{A}$上一测度。称 μ 为**内正则的**，如果对每个开集 O，有 $\mu(O)=\sup\{\mu(K): K\subset O,\ K \text{ 为紧集}\}$。称 **$\mu$ 为外正则的**，如果对每个 $A\in\mathscr{A}$，有 $\mu(A)=\inf\{\mu(O): O\supset A,\ O \text{ 为开集}\}$.既内正则又外正则的测度称为**正则测度**.若进一步对一切非负 $f\in C_C(X)$，有 $\mu(f)<\infty$,则称 μ 为 Radon **测度**。

由定理 2.8.(2)立刻推得下述定理。

2.11 定理 设 X 为一局紧 Hausdorff 空间，则 $\mathscr{B}(X)$ 上的 Radon 测度与 $C_C(X)$ 上的正线性泛函之间有如下一一对应关系：设 μ 为$\mathscr{B}(X)$上的 Radon 测度，令

$$L_\mu(f)=\int f d\mu,\quad f\in C_C(X),$$

则 L_μ 为 $C_C(X)$上的正线性泛函。反之，$C_C(X)$上的正线性泛函必具有这种形式。

下面，我们将 Riesz 表现定理推广到一般 Hausdorff 空间情形。为此，先引进局部紧开集这一重要概念。

2.12 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，U 为 X 的一开子集。如果对每个 $x\in U$，存在 x 的紧邻域 K，使 $K\subset U$,则称 U 为**局部紧开集**。

显然,为要 X 的一开子集 U 是局部紧开集，必须且只需 U 作为 X 的子空间是局部紧的(参见习题 1.41)。此外,X 中所有局部紧开集的并是 X 中最大的局部紧开集。我们称它为 X 的**局部紧部分**，并记为 X_0。

注意：一般说来,局部紧 Hausdorff 空间中的开集未必是局

部紧开集。

2.13 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$f\in C_C(X)$，则对任何 $\alpha\geqslant 0$，$[|f|>\alpha]$为局部紧开集，且为$\mathscr{K}_\sigma$-集。

证 设 $x\in[|f|>\alpha]$，则存在 $\beta>\alpha$，使$|f(x)|>\beta$。由于$[|f|\geqslant\beta]\subset\sup(f)$，故$[|f|\geqslant\beta]$为 x 的紧邻域，且有$[|f|\leqslant\beta]\subset[|f|>\alpha]$，故$[|f|>\alpha]$为局部紧开集。此外

$$[|f|>\alpha]=\bigcup_n\left[|f|\geqslant\alpha+\frac{1}{n}\right]\in\mathscr{K}_\sigma,$$

引理证毕。

下一命题推广了命题 2.2。

2.14 命题 设 X 为 Hausdorff 空间，G 为 X 的开子集，X_0 为 X 的局部紧部分。则下列断言等价：

(1) G 为 $C_C(X)$-开集；

(2) G为局部紧开集且为$\mathscr{K}_\sigma$-集；

(3) G 为$\mathscr{K}_\sigma$-集，且 $G\subset X_0$。

特别，我们有 $\sigma(C_C(X))=\sigma$(含于 X_0 的开$\mathscr{K}_\sigma$-集)$=\sigma$(局部紧开$\mathscr{K}_\sigma$-集)。

证 (1)⇒(2)．参见命题 2.2 的证明并利用引理 2.13。

(2)⇒(3)显然。(3)⇒(1)的证明与命题 2.2 类似。

下面两个命题的证明留给读者作为习题。

2.15 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为其局部紧部分。则 $\sigma(C_C(X))=\sigma$(含于 X_0 的紧$\mathscr{G}_\delta$-集)。(参见命题 2.3.)

2.16 命题 设 X 为一 Hausdorff 空间，$K\in\sigma(C_c(X))$，若 K 为紧集，则 K 为 $\mathscr{G}_\delta$-集。(参见命题 2.5.)

下一定理推广了 Riesz 表现定理(定理 2.8)。

2.17 定理 设 X 为一 Hausderff 空间，X_0 为其局部紧部分。设 I 为 $C_C(X)$上的 Daniell 积分，则

(1) 存在 $\mathscr{B}(X)$上唯一测度 μ_1 满足如下条件：

(i) $C_C(X)\subset L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu_1)$，且对一切 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu_1(f)$；

(ii) 对一切含于 X_0 的 σ-有界开集 O，有

$$\mu_1(O)=\sup\{\mu_1(K): K\subset O, K\in\mathscr{K}\},$$

对一切 $A\in\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu_1(A)=\inf\{\mu_1(O): O\supset A, O\subset X_0, O\text{ 为 }\sigma\text{-有界开集}\}.$$

此外，对每个含于 X_0 的紧集 K，有 $\mu_1(K)<\infty$。

(2) 存在 $\mathscr{B}(X)$ 上唯一测度 μ_2 满足如下条件：

(i)′ $C_C(X)\subset L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu_2)$，且对一切 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu_2(f)$；

(ii)′ 对一切含于 X_0 的开集 O，有

$$\mu_2(O)=\sup\{\mu_2(K): K\subset O, K\in\mathscr{K}\},$$

对一切 $A\in\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu_2(A)=\inf\{\mu_2(O): O\supset A, O\subset X_0, O\text{ 为开集}\}.$$

此外，对每个含于 X_0 的紧集 K，有 $\mu_2(K)<\infty$。

(3) 我们有 $\mu_1\geqslant\mu_2$。若 X_0 为 σ-紧的，则 $\mu_1=\mu_2$。

证 与定理 2.8 的证明完全类似。在证明中要用到引理2.13及命题2.14。

2.18 注 (1) 对一般 Hausdorff 空间，$C_c(X)$上的正线性泛函未必是 Daniell 积分。因此，在定理 2.17 的叙述中，我们必须假定 I 为 $C_c(X)$上的 Daniell 积分。

(2) 虽然对每个 $f\in C_c(X)$，$[|f|>0]$含于 X 的局部紧部分 X_0，但一般未必有 $\mathrm{sup}(f)\subset X_0$，因此，定理 2.17 不能直接由定理 2.8 推得。

下一定义推广了内、外正则测度概念。

2.19 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上一测度。令 X_0 为 X 的局部紧部分。如果对每个含于 X_0 的开集 O，有

$$\mu(O)=\sup\{\mu(k):\ k\subset O,\ k\in\mathscr{K}\},$$

则称 μ 为**准内正则测度**。若对每个 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(O):\ O\supset A,\ O\subset X_0,\ O\text{ 为开集}\},$$

则称 μ 为**准外正则测度**。若测度 μ 既准内正则又准外正则，则称 μ 为**准正则测度**。若进一步，对每个非负 $f\in C_c(X)$，有 $\mu(f)<\infty$，则称 μ 为**准 Radon 测度**。

显然，若 X 为局部紧 Hausdorff 空间，则准内(外)正则性就是内(外)正则性。

定理 2.17(2)表明，$C_c(X)$上的Daniell积分与$\mathscr{B}(X)$上的准 Radon 测度之间有一一对应关系。

习题

2.20 设 X 为一拓扑空间，则 $\sigma(C(X))=\sigma(C_b(X))\subset\sigma$(闭 $\mathscr{G}_\delta$-集)。

2.21 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上一准内正则测度。令 X_0 为 X 的局部紧部分。

(1) 对每个含于 X_0 的开集O，有

$$\mu(O)=\sup\{\mu(f):\ f\in C_c(X),\ 0\leqslant f\leqslant 1,\operatorname{supp}(f)\subset O\}$$
$$=\sup\{\mu(f):\ f\in C_c(X),\ 0\leqslant f\leqslant I_O\}$$

(提示：利用命题 1.20.(2))。

(2) 令$\mathscr{G}_1=\{O:\ O\text{ 为含于 }X_0\text{ 的开集，且 }\mu(O)=0\}$，并令$U$为$\mathscr{G}_1$中全体集合的并，则 $\mu(U)=0$。(注：若 X 为局部紧 Hausdorff 空间，通常称 U^c 为 μ **的支撑**，记为 $\operatorname{sup}[\mu]$。)

2.22 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}(X)$为一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上一 σ-有限正则测度。则$\mathscr{A}\subset\overline{\mathscr{B}(X)}^{\mu}$。这里$\overline{\mathscr{B}(X)}^{\mu}$表示$\mathscr{B}(X)$关于 μ 的完备化。

2.23 设 X 为一紧 Hausdorff 空间，μ 为 Baire σ-代数 $\mathscr{B}_0(X)$上的一有限测度，则 μ 可以唯一扩张成为$\mathscr{B}(X)$上的正则测度。(提示：用 Riesz 表现定理。)

2.24 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的一正则测度，则为要 μ 为 Radon 测度，必须且只需对一切紧集 K，有 $\mu(K)<\infty$。

§3 测度的逼近与正则测度

本节首先研究正规拓扑空间上的测度的性质，然后研究 Hausdorff 空间上的正则测度。

3.1 定理 设 X 为一拓扑空间，$\mathscr{G}$ 及 $\mathscr{F}$ 表示 X 的开集类和闭集类。假设每个开集为 $\mathscr{F}_\sigma$-集，令 μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上一 σ-有限测度，则对每个 $A\in\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(F):\ F\subset A,\ F\in\mathscr{F}\}. \tag{3.1}$$

若进一步 μ 为有限测度，则对每个 $A\in\mathscr{B}(X)$，还有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(G):\ G\supset A,\ G\in\mathscr{G}\}. \tag{3.2}$$

证 由于 $\mathscr{F}_\delta=\mathscr{F}$，故由第一章定理 6.3 及命题 6.4 推得定理的结论。证毕。

3.2 系 设 X 为一距离空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的一有限测度，则对一切 $A\in\mathscr{B}(X)$，(3.1)及(3.2)成立。

证 由于距离空间中每个开集为 $\mathscr{F}_\sigma$-集，故由定理 3.1 立得系的结论。证毕。

3.3 定理 设 X 为一正规拓扑空间，$\mathscr{B}_0(X)$ 为 Baire σ-代数，μ 为 $\mathscr{B}_0(X)$ 上的一 σ-有限测度。

(1) $\mathscr{B}_0(X)=\sigma$(闭 $\mathscr{G}_\delta$-集)；

(2) 为要 G 为开 $\mathscr{F}_\sigma$-集，必须且只需存在一非负有界连续函数 f，使得 $G=[f>0]$；

(3) 对一切 $A\in\mathscr{B}_0(X)$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(B):\ B\subset A,\ B\text{ 为闭 }\mathscr{G}_\delta\text{-集}\}, \tag{3.3}$$

若进一步 μ 为有限测度，则对一切 $A\in\mathscr{B}_0(X)$，还有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(G): G\supset A,\ G\text{ 为开}\mathscr{F}_\sigma\text{-集}\}. \quad (3.4)$$

证 (1) 设 $f\in C(X)$，则对 $a\in R$，有

$$[f\leqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[f<a+\frac{1}{n}\right]$$

从而 $[f\leqslant a]$ 为闭 $\mathscr{G}_\delta$-集. 故有 $\mathscr{B}_0(X)\subset\sigma$(闭 $\mathscr{G}_\delta$-集). 反之，设 F 为闭 $\mathscr{G}_\delta$-集，即 $F=\bigcap_n G_n$，其中每个 G_n 为开集，F 为闭集. 由 Urysohn 引理，存在 $f_n\in C(X)$，$0\leqslant f_n\leqslant 1$，使 f_n 在 F 上为 0，在 G_n^c 上为 1. 令 $f=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f_n$，则 f 为连续函数，且 $F=[f=0]$，于是 $F\in\mathscr{B}_0(X)$，因此最终有 $\mathscr{B}_0(X)=\sigma$(闭 $\mathscr{G}_\delta$-集).

(2) 充分性显然，必要性由(1)的证明推理得(注意开 $\mathscr{F}_\sigma$-集的余集为闭 $\mathscr{G}_\delta$-集).

(3) 令 $\mathscr{C}$ 为 X 中闭 $\mathscr{G}_\delta$-集全体，则 $\mathscr{C}_\delta=\mathscr{C}$. 显然 $\mathscr{C}$ 对有限并运算封闭. 另一方面，设 $A\in\mathscr{C}$，则 A^c 为开 $\mathscr{F}_\sigma$-集. 由 (2) 知：存在一非负有界连续函数 f，使得 $A^c=[f>0]$. 于是我们有 $A^c=\bigcup_n\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]$，但

$$\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]=\bigcap_m\left[f>\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right]\in\mathscr{C},$$

故 $A^c\in\mathscr{C}_\sigma$. 因此 $\mathscr{C}$ 满足第一章定理 6.3 的条件，从而得(3.3). 此外，由第一章命题 6.4 得(3.4). 证毕.

3.4 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的一测度.

(1) 设 $A\in\mathscr{B}(X)$，且 A 为 μ σ-有限集，则

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K): K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}.$$

(2) 若对每个 $K\in\mathscr{K}$，$\mu(K)<\infty$，则 μ 为正则测度 (从而为

Radon 测度)。

证 (1) 设 G 为 X 中的一开集，则由习题 1.33 及 1.37 知，G 为 $\mathscr{K}_\sigma$-集，故由第一章定理 6.3 立得(1)的结论。

(2) 由于 X 中每个开集为$\mathscr{K}_\sigma$-集，故 μ 为内正则的。现证 μ 的外正则性。由习题 1.35 知，存在一列开集 G_n，使得$\overline{G_n}$ 为紧集，且 $\bigcup\limits_n G_n = X$。于是，对每个 n，有 $\mu(G_n)<\infty$。令

$$\mu_n(A)=\mu(A\cap G_n),\quad n\geqslant 1$$

则 μ_n 为 $\mathscr{B}(X)$上的有限测度，故由定理 3.1 知 μ_n 是外正则的。设 $A\in\mathscr{B}(X)$，对任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $V_n\supset A$，使得 $\mu(G_n\cap V_n)\geqslant\mu(A\cap G_n)+\varepsilon/2^n$。令 $V=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G_n\cap V_n)$，则 $V\supset A$，且有

$$\mu(V\backslash A)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(G_n\cap V_n\backslash A)\leqslant\varepsilon,$$

从而 $\mu(V)\leqslant\mu(A)+\varepsilon$，$\mu$ 的外正则性得证。证毕。

下一定理表明：Hausdorff 空间上的正则测度有较强的内正则性。

3.5 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为其局部紧部分，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一 σ-代数，令 μ 为$\mathscr{A}$上一测度。

(1) 设 μ 为正则测度。若 $A\in\mathscr{A}$，且 $\mu(A)<\infty$，则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}。\qquad(3.5)$$

(2) 设 μ 为准正则测度，若 $A\in\mathscr{A}$，且 $\mu(A)<\infty$，则有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subset A\cap X_0,\ K\in\mathscr{K}\}。\qquad(3.6)$$

(3) 设 μ 为有限测度，若对一切 $A\in\mathscr{A}$有(3.5)成立，则 μ 为正则测度。

(4) 设 μ 为有限测度，为要(3.6)对一切 $A\in\mathscr{A}$成立，必须且只需 μ 为正则测度，且 $\mu(X_0^c)=0$。

证 (1) 对任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $V\supset A$，使 $\mu(V)<\mu(A)+\varepsilon$。

取紧集 $L\subset V$，使 $\mu(L)>\mu(V)-\varepsilon$，由于 $\mu(V\setminus A)<\varepsilon$，故有开集 $W\supset V\setminus A$，使 $\mu(W)<\varepsilon$。令 $K=L\setminus W$，则 K 为紧集，$K\subset A$，且有

$$\mu(K)=\mu(L)-\mu(L\cap W)>\mu(V)-2\varepsilon\geqslant\mu(A)-2\varepsilon,$$

故有(3.5)。

(2) 的证明与(1)完全类似(将上述 V，W 取为含于 X_0)。

(3) (3.5)蕴含 μ 的内正则性。对 A^C 应用(3.1)便得 μ 的外正则性。

(4) 充分性由(1)推知。必要性由(3)推得(注意(3.6)蕴含(3.5))。

注 若 $\mu(A)=\infty$，且 $\mu(A)=\sup\{\mu(B):B\subset A,\ B\in\mathscr{A},\ \mu(B)<\infty\}$，则(3.5)及(3.6)也成立。

下面讨论符号测度的正则性。

3.6 定义 设 X 为一Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上的一符号测度。如果 μ 的变差测度 $|\mu|$ 是正则的，则称 μ 是**正则的**。

下一命题给出了有限符号测度正则性的另一等价描述。

3.7 命题 为要一有限符号测度 μ 是正则的，必须且只需 μ^+ 及 μ^- 是正则的。这里 μ^+ 及 μ^- 分别是 μ 的正部及负部。

证 充分性显然。现证必要性。设 $|\mu|$ 为正则测度，令 $A\in\mathscr{A}$，$\varepsilon>0$，取开集 $U\supset A$，使 $|\mu|(U)<|\mu|(A)+\varepsilon$。则 $\mu^-(U\setminus A)\leqslant|\mu|(U\setminus A)<\varepsilon$，从而

$$\mu^-(U)=\mu^-(A)+\mu^-(U\setminus A)<\mu^-(A)+\varepsilon,$$

μ^- 的外正则性得证。μ^- 的内正则性证明类似。同理可证 μ^+ 的正则性，证毕。

3.8 命题 设 X 为一Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上一符号正则测度。令 $A\in\mathscr{A}$，若 $\mu(A)$ 为有限值，则对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset A$，使对任何满足 $K\subset B\in A$ 的 $B\in\mathscr{A}$，有 $|\mu(A)-\mu(B)|<\varepsilon$。

证 由$|\mu|$的正则性及定理3.5知，存在紧集$K\subset A$，使$|\mu|(A\backslash K)<\varepsilon$，于是对任何满足$K\subset B\subset A$的$B\in\mathscr{A}$，有

$$|\mu(A)-\mu(B)|=|\mu(A\backslash B)|\leqslant|\mu|(A\backslash B)\leqslant|\mu|(A\backslash K)<\varepsilon.$$

3.9 记号 设X为一Hausdorff空间，我们用$\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$表示$\mathscr{B}(X)$上的有限符号测度全体，用$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$表示$\mathscr{B}(X)$上的有限符号正则测度全体。

由第三章3.24.(4)知：$\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$按符号测度的全变差范数$\|\ \|_{var}$为一Banach空间。另一方面，易知$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$是$\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$的闭线性子空间，故$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$按范数$\|\ \|_{var}$为一Banach空间。

下面我们研究关于正则测度的不定积分.为此先证明一引理.

3.10 引理 设X为一Hausdorff空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一σ-代数，μ为$\mathscr{A}$上的一正则测度。设$B\in\mathscr{A}$，且$\mu(B)<\infty$。令$\nu(A)=\mu(B\cap A)$，$A\in\mathscr{A}$，则ν为$\mathscr{A}$上的正则测度。

证 由定理3.5，对任何$A\in\mathscr{A}$，我们有

$$\begin{aligned}\nu(A)=\mu(B\cap A)&=\sup\{\mu(K):\ K\subset B\cap A,\ K\in\mathscr{K}\}\\&=\sup\{\nu(K):\ K\subset B\cap A,\ K\in\mathscr{K}\}\end{aligned}$$

故有

$$\nu(A)=\sup\{\nu(K):\ K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}$$

从而由定理3.5知ν为$\mathscr{A}$上的正则测度。证毕。

3.11 命题 设X为一Hausdorff空间，μ为$\mathscr{B}(X)$上的一正则测度。若$f\in L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$，则$f$关于$\mu$的不定积分$f.\mu$是符号正则测度。

证 令$\nu=f.\mu$，由于$|\nu|=|f|.\mu$，故由符号测度正则性的定义，为证ν正则，不妨设f非负。首先设$f=I_B$，其中$B\in\mathscr{B}(X)$，且$\mu(B)<\infty$。令$\nu_f(A)=\mu(A\cap B)$，$A\in\mathscr{B}(X)$，则由引理3.10知，ν_f为正则测度。因此，对μ-可积的非负简单函数f，$f.\mu$也是正则测度。对一般的非负μ-可积函数，令f_n为非负简单函数，

使 $f_n \uparrow f$，则有

$$\|f.\mu - f_n.\mu\|_{Var} = \int_X (f - f_n)d\mu \to 0,\ n \to \infty.$$

由$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$的完备性知 $f.\mu \in \mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$。证毕。

3.12 命题 设 X 为一Hausdorff 空间，μ 为$\mathscr{B}(X)$ 上一Radon 测度，ν 为$\mathscr{B}(X)$上一有限符号正则测度.则下列断言等价：

(1) ν 为某 $f \in L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$关于 μ 的不定积分；

(2) $\nu \ll \mu$；

(3) 设 K 为紧集，且 $\mu(K)=0$，则有 $\nu(K)=0$。

证 显然有(1)⇒(2)⇒(3)。下证(3)⇒(2)。设(3)成立，设 $A \in \mathscr{B}(X)$，且 $\mu(A)=0$，则对一切紧集 $K \subset A$，有 $\mu(K)=0$。往证 $\nu(A)=0$。假定$|\nu(A)|=\alpha>0$，则由命题3.8知，存在紧集 $K \subset A$，使 $|\nu(A)-\nu(K)|<\frac{\alpha}{2}$.特别有 $\nu(K) \neq 0$,但有 $\mu(K)=0$，这与(3)矛盾。因此，必须有 $\nu(A)=0$，这表明 $\nu \ll \mu$。

最后证 (2)⇒(1)。设(2)成立。由 $|\nu|$ 的内正则性，存在一列紧集 K_n，使 $\sup_n |\nu|(K_n) = |\nu|(X)$. 令 $X_0 = \bigcup_n K_n$，则有 $|\nu|(X \backslash X_0)=0$。令 $\mu_0(A)=\mu(A \cap X_0)$，则因 $\mu(K_n)<\infty$，故 μ_0为σ-有限测度。且 $\nu \ll \mu_0$。于是由Radon-Nikodym 定理知，存在$f_0 \in L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu_0)$。使 $\nu = f_0.\mu_0$。令 $f = f_0 I_{X_0}$，则 $f \in L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$，且 $\nu = f.\mu$。证毕。

习题

3.13 证明$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$是$\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$的闭线性子空间。

3.14 给出系 3.2 的一个直接证明（提示：令$\mathscr{C}$表示$\mathscr{B}(X)$中满足(3.1)及(3.2)的集 A 全体，显然 $A \in \mathscr{C} \Rightarrow A^c \in \mathscr{C}$。为证$\mathscr{C}=\mathscr{B}(X)$，只需证$\mathscr{C}$对可列并运算封闭，且$\mathscr{G} \subset \mathscr{C}$.)。

3.15 设 X 为一Hausdorff 空间，μ 为$\mathscr{B}(X)$ 上的一Radon

测度。令$\mathfrak{M}_r(\mu)=\{\nu\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X)):\ \nu\ll\mu\}$，则$f\mapsto f.\mu$为$L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$到$\mathfrak{M}_r(\mu)$上的线性保范同构映射(提示：$\|f.\mu\|_{var}=\|f\|_{L^1(\mu)}$)。

§4　强内正则测度与Riesz表现定理的新版本

本节将利用上一节的结果给出Hausdorff空间上Daniell积分的Riesz表现定理的新版本。为此，我们首先引进半有限测度及准有限测度的概念，它们分别推广了σ-有限测度及有限测度的概念。

4.1 定义　设μ为可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上的一测度。如果对一切使得$\mu(A)=\infty$的$A\in\mathscr{A}$，有$B\in\mathscr{A}$，$B\subset A$，使得$0<\mu(B)<\infty$，则称μ为**半有限测度**。如果

$$\sup\{\mu(B):\ B\in\mathscr{A},\ \mu(B)<\infty\}<\infty,$$

则称μ为**准有限测度**。如果对每个$A\in\mathscr{A}$，或者$\mu(A)=0$，或者$\mu(A)=\infty$，则称μ为$0-\infty$**测度**。

下一定理表明：任一测度(相应地，准有限测度)可以分解为一半有限测度(相应地，有限测度)与一$0-\infty$测度之和。

4.2 定理　设μ为可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上的一测度。

(1) 如果μ为半有限测度，且$A\in\mathscr{A}$，$\mu(A)=\infty$，则

$$\sup\{\mu(B):\ B\subset A,B\in\mathscr{A},\mu(B)<\infty\}=\infty. \tag{4.1}$$

(2) 对$A\in\mathscr{A}$，令

$$\nu(A)=\sup\{\mu(B):\ B\subset A,B\in\mathscr{A},\mu(B)<\infty\}, \tag{4.2}$$

$$w(A)=\sup\{\mu(B)-\nu(B):B\subset A),B\in\mathscr{A},\nu(B)<\infty\}, \tag{4.3}$$

则ν为半有限测度，w为$0-\infty$测度，且有$\nu+w=\mu$。

证　(1) 设(4.1)不成立，即

$$0<\sup\{\mu(B):\ B\subset A,B\in\mathscr{A},\mu(B)<\infty\}=a<\infty, \tag{4.4}$$

则存在 $B\in\mathscr{A}$，$B\subset A$，使 $\mu(B)=a$，于是 $\mu(A\backslash B)=\infty$。依假定，$\mu$ 是半有限的，故存在 $C\in A$，$C\subset A\backslash B$，使 $0<\mu(C)<\infty$，这时 $B\cup C\subset A$，且 $\mu(B\cup C)=\mu(B)+\mu(C)>a$，这与(4.4)矛盾。因此(4.1)成立。

(2) 设(A_n)为$\mathscr{A}$中一列两两不交集，若存在 n，使 $\nu(A_n)=\infty$，则$\nu\left(\sum\limits_n A_n\right)=\infty$，从而 $\nu\left(\sum\limits_n A_n\right)=\sum\limits_n \nu(A_n)$。现设对每个 $n\geqslant1$，$\nu(A_n)<\infty$。则易知：对每个 $n\geqslant1$，存在 $B_n\in\mathscr{A}$，$B_n\subset A_n$，使 $\mu(B_n)=\nu(A_n)$，于是对一切 $m\geqslant1$，

$$\nu\left(\bigcup_n A_n\right)\geqslant\nu\left(\sum_{n=1}^m A_n\right)\geqslant\mu\left(\sum_{n=1}^m B_n\right)=\sum_{n=1}^m\mu(B_n)=\sum_{n=1}^m\nu(A_n)$$

从而 $\nu\left(\sum\limits_n A_n\right)\geqslant\sum\limits_n\nu(A_n)$。另一方面，若 $C\in\mathscr{A}$，且 $\mu(C)<\infty$，则 $\nu(C)=\mu(C)$，于是对任何使 $\mu(B)<\infty$ 的 $B\subset\sum\limits_n A_n$，我们有

$$\mu(B)=\sum_n\mu(B\cap A_n)=\sum_n\nu(B\cap A_n)\leqslant\sum_n\nu(A_n)$$

故由(4.2)知：$\nu\left(\sum\limits_n A_n\right)\leqslant\sum\limits_n\nu(A_n)$。因此，$\nu$ 为一测度。此外由(4.2)知，ν 为半有限测度。

现证 w 为 $0-\infty$测度。设 $A\in\mathscr{A}$，且 $w(A)>0$，则由(4.3)知：存在 $B\in\mathscr{A}$，$B\subset A$，使 $\nu(B)<\infty$，且 $\mu(B)-\nu(B)>0$。因此必须有 $\mu(B)=\infty$(否则将有 $\nu(B)=\mu(B)$)，从而 $w(A)=\infty$。这表明 w 至多取值 0 及∞。现设 (A_n) 为$\mathscr{A}$中一列两两不交集，若对每个 n，$w(A_n)=0$，则由(4.3)知：我们有

$$B\subset A_n,\ B\in\mathscr{A},\ \nu(B)<\infty\Rightarrow\mu(B)=\nu(B),$$

由此推知(因 μ 及 ν 均为测度)：

$$B \subset \sum_n A_n, \quad B \in \mathscr{A}, \quad \nu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \nu(B)$$

故有 $w\left(\sum_n A_n\right) = 0$。若存在 n，使 $w(A_n) = \infty$，则 $w\left(\sum_n A_n\right) = \infty$，这表明 w 为 0—∞测度。定理证毕。

4.3 注 将测度 μ 表示为一半有限测度与一 0—∞ 测度之和的分解不一定唯一，但我们将由(4.2)及(4.3)定义的 ν 及 w 分别叫做 μ 的**半有限部分**及 **0—∞部分**。若 μ 是准有限测度，则上述分解是唯一的，且 ν 为有限测度，我们称 ν 为 μ 的**有限部分**。

下一引理给出了准有限测度的一个刻画及其有限部分的另一构造。

4.4 引理 设 μ 为$(\Omega, \mathscr{A})$上一测度。则为要 μ 是准有限的，必须且只需 μ 有如下分解：

$$\mu = \nu + w$$

其中 ν 为有限测度，w 为 0—∞测度。此外，设 μ 为准有限测度，令 $\Omega_0 \in \mathscr{A}$，使 $\mu(\Omega_0) = \sup\{\mu(B): B \in \mathscr{A}, \mu(B) < \infty\}$，则 $\nu(A) = \mu(A \cap \Omega_0)$，$A \in \mathscr{A}$。

我们将这一引理的证明留给读者完成。

下一引理是显然的，故证明从略。

4.5 引理 设 μ 为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一测度，ν 为其半有限部分，则对一切 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$，有$\int f d\mu = \int f d\nu$。

为了给出 Riesz 表现定理的新版本，我们需要引进强内正则测度的概念。

4.6 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上一测度，令 X_0 为 X 的局部紧部分。如果对一切 $A \in \mathscr{A}$，有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K): K \subset A, K \text{ 为含于 } X_0 \text{ 的紧集}\}, \quad (4.5)$$

则称 μ 为**强内正则的**。

4.7 注 对强内正则测度 μ，显然有 $\mu(X_0^c)=0$（进一步结果见习题 4.11.）。此外，由定理 3.5 知：强内正则的有限测度为正则测度。

下一定理是导致 Riesz 表现定理新版本的关键性结果。

4.8 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$ 的一 σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上的一准正则测度，则 μ 的半有限部分 ν 是强内正则的。

证 令 X_0 为 X 的局部紧部分，设 $B\in\mathscr{A}$，且 $\mu(B)<\infty$，则由定理 3.5 知（注意 $\mu(K)<\infty\Rightarrow\nu(K)=\mu(K)$）：

$$\begin{aligned}\mu(B)&=\sup\{\mu(K):\ K\subset B,\ K \text{ 为含于 } X_0 \text{ 的紧集}\}\\&=\sup\{\nu(K):\ K\subset B,\ K \text{ 为含于 } X_0 \text{ 的紧集}\}.\end{aligned}$$

故由(4.2)立刻推知 ν 满足(4.5)，证毕。

下一定理是 Riesz表现定理的新版本。

4.9 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，I 为 $C_C(X)$ 上的 Daniell 积分，则存在$\mathscr{B}(X)$上唯一强内正则测度 μ，使得$C_C(X)\subset L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$，且对一切 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu(f)$。此外，令 X_0 为 X 的局部紧部分，则对一切含于 X_0 的紧集 μ，有 $\mu(K)<\infty$。

证 令 μ_2 为定理 2.17 中所定义的 $\mathscr{B}(X)$ 上的准 Radon 测度，令 μ 为其半有限部分，则由定理 4.8 及引理 4.5 知：μ 为满足定理要求的强内正则测度。此外，对一切含于 X_0 的紧集 K，有 $\mu(K)<\infty$。

现证满足定理要求的测度 μ 是唯一的。令$\mathscr{L}$表示含于 X_0 的紧$\mathscr{G}_\delta$-集全体。则由命题 1.20.(4)易知：对强内正则测度 μ，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subset A,\ K\in\mathscr{L}\} \tag{4.6}$$

设 $K\in\mathscr{L}$，则由命题 1.20.(2)知，存在 $f\in C_C(X)$，使 $0\leqslant f\leqslant 1$，

且$K=[f=1]$，于是有$K=\bigcap_{n=2}^{\infty}\left[f>1-\frac{1}{n}\right]$. 令 $G_n=\left[f>1-\frac{1}{n}\right]$，则 G_n 为 $C_C(X)$-开集(见第三章引理 6.7.(4))，且$\mu(G_2)\leqslant 2I(f)<\infty$，故 $\mu(K)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(G_n)$。但由于对一切 $f\in C_C(X)$，$I(f)=\mu(f)$，故 μ 在 $C_C(X)$-开集上的值由 I 唯一决定。因此，μ 在$\mathscr{L}$上由 I 唯一决定。最终由(4.6)知满足定理要求的测度 μ 是唯一的，证毕。

作为该定理的推论，我们有

4.10 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，I 为 $C_C(X)$ 上的一正线性泛函，则存在$\mathscr{B}(X)$上的唯一的测度 μ 满足如下条件：

(a) $C_C(X)\subset L^1(X,\mathscr{B}(X),\mu)$，且对一切 $f\in C_C(X)$，有 $I(f)=\mu(f)$；

(b) 对一切 $A\in\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subset A,\ K\in\mathscr{K}\}.$$

此外，对一切 $K\in\mathscr{K}$，有 $\mu(K)<\infty$。

习题

4.11 设 X 为一 Hausdorff 空间，μ 为$\mathscr{B}(X)$ 上的一强内正则测度。令

$$\hat{X}=\bigcup\{[|f|>0]:\ f\in C_C(X),\ \mu([|f|>0])>0\}$$

则$\hat{X}$ 为局部紧开集，且$\mu(\hat{X}^C)=0$。(提示：用反证法并利用命题 1.20.(2)

4.12 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为其局部紧部分，令$\mathfrak{M}=\{\mu:\ \mu$ 为$\mathscr{B}(X)$上的强内正则测度，且对每个非负 $f\in C_C(X)$，有 $\mu(f)<\infty\}$，对 $\mu\in\mathfrak{M}$；令 $L_\mu(f)=\int f d\mu$，$f\in C_C(X)$。则映射 $\mu\to L_\mu$ 建立了$\mathfrak{M}$与 $C_C(X)$上的 Daniell 积分之间一一对应关系。

§5　空间$\hat{C}_0(X)$的对偶

设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，X 上的一实值连续函数 f 称为**在无穷远处为零**，是指对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 K 使 f 在K^c上有$|f(x)|<\varepsilon$。我们用 $C_0(X)$ 表示在无穷远处为零的连续函数全体，本节将证明$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$可以视为 $C_0(X)$的对偶。此外，我们还将这一结果推广到一般 Hausdorff 空间情形。这时 $C_0(X)$ 的定义将作适当修改（见下面的定义 5.4），但与局部紧Hausdorff 空间情形的定义吻合。

设 $f\in C_0(X)$，令

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:\ x\in X\}$$

则$(C_0(X),\ \|\ \|_\infty)$为赋范线性空间。

5.1 引理　设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，则 $C_0(X)$为一 Banach 空间，且 $C_C(X)$在 $C_0(X)$中稠密。$C_C(X)$为具紧支撑连续函数全体。

证　设(f_n)为 $C_0(X)$中一基本列，则对每个$x\in X$，$(f_n(x))$为一实数基本列，故有极限 $f(x)$。显然 f_n 在 X 上一致收敛于f，故 f 为 X 上的连续函数。现证 f 在无穷远处为零。任给 $\varepsilon>0$，先取一自然数 n，使对一切 $x\in X$ 有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$。由于 $f_n\in C_0(X)$。故存在紧集 K，使$|f_n(x)|<\varepsilon$，$\forall x\in K^c$。于是有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)|<2\varepsilon,\ x\in K^c$$

依定义，$f\in C_0(x)$。这表明 $C_0(X)$为一 Banach 空间。

再证 $C_C(X)$在 $C_0(X)$中稠密。设 $f\in C_0(X)$，对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 K，使$\forall x\in K^c$ 有$|f(x)|\leqslant\varepsilon$。另一方面，由命题 1.20，存在 $g\in C_C(X)$，使 $I_K\leqslant g\leqslant 1$。令 $h=gf$，则 $h\in C_C(X)$，且有$\|f-h\|_\infty\leqslant\varepsilon$。这表明 $C_C(X)$在 $C_0(X)$中稠密。证毕。

5.2 引理　设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函，则存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函

L_+ 及 L_-，使 $L=L_+-L_-$。

证 设 $f\in C_0(X)$且 $f\geqslant 0$（简记为 $f\in C_0(X)_+$），

$$L_+(f)=\sup\{L(g):\ g\in C_0(X),\ 0\leqslant g\leqslant f\} \tag{5.1}$$

则易见$|L_+(f)|\leqslant\|L\|\|f\|_\infty$，其中$\|L\|$表示 L 的范数。此外，显然有 $L_+(f)\geqslant 0$，且对任何 $\alpha\geqslant 0$，有 $L_+(\alpha f)=\alpha L_+(f)$。下面证明：$\forall f_1,f_2\in C_0(X)_+$，有

$$L_+(f_1+f_2)=L_+(f_1)+L_+(f_2). \tag{5.2}$$

由(5.1)不难看出：$L_+(f_1)+L_+(f_2)\leqslant L_+(f_1+f_2)$。为证相反的不等式，令 $g\in C_0(X)$，使 $0\leqslant g\leqslant f_1+f_2$，令

$$g_1=g\wedge f_1,\quad g_2=g-g_1,$$

则 g_1，$g_2\in C_0(X)$，$0\leqslant g_1\leqslant f_1$，$0\leqslant g_2\leqslant f_2$。于是有

$$L(g)=L(g_1)+L(g_2)\leqslant L_+(f_1)+L_+(f_2),$$

由此得 $L_+(f_1+f_2)\leqslant L_+(f_1)+L_+(f_2)$。故(5.2)得证。

设 $f\in C_0(X)$，令

$$L_+(f)=L_+(f^+)-L_+(f^-)$$

则 L_+为 $C_0(X)$上的线性泛函，且有

$$|L_+(f)|\leqslant L_+(f^+)\vee L_+(f^-)\leqslant\|L\|\|f\|_\infty$$

于是 L_+为连续线性泛函。最后，令 $L_-=L_+-L$，则 L_-为连续线性泛函，并由(5.1)知：对 $f\in C_0(X)_+$，$L_-(f)\geqslant 0$。从而 L_-为正的。引理证毕。

5.3 定理 设 X 为一局部紧Hausdorff空间、令$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$表示$\mathscr{B}(X)$上的有限符号正则测度全体，对 $\mu\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$，令 $L_\mu(f)=\int f d\mu$，$f\in C_0(X)$，则 $\mu\mapsto L_\mu$ 为$\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$到 $C_0(X)^*$上的保范同构映射。

证 设$\mu\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$，显然有 $L_\mu\in C_0(X)^*$，且

$$\|L_\mu(f)\|_\infty\leqslant\|\mu\|_{var}\|f\|_\infty,\quad f\in C_0(X)$$

于是有$\|L_\mu\|\leqslant\|\mu\|_{var}$。往证等号成立。设 $X=D+D^c$ 为 μ 的

Jordan 分解(即 $\mu^+(A)=\mu(A\cap D)$，$\mu^-(A)=-\mu(A\cap D^C)$)，对任给 $\varepsilon>0$，由 μ^+ 及 μ^- 的正则性及定理 3.5 知：存在紧集 $K_1\subset D$ 及紧集 $K_2\subset D^C$，使得

$$\mu(K_1)-\mu(K_2)=|\mu|(K_1\cup K_2)>|\mu|(X)-\varepsilon=\|\mu\|_{var}-\varepsilon.$$

另一方面，由命题 1.23，存在 $f\in C_C(X)$，使 $\|f\|_\infty=1$，且

$$fI_{K_1\cup K_2}=I_{K_1}-I_{K_2}.$$

于是我们有

$$\|L_\mu\|\geqslant L_\mu(f)=\int fd\mu=\int fI_{K_1\cup K_2}d\mu+\int fI_{(K_1\cup K_2)^C}d\mu$$

$$\geqslant\mu(K_1)-\mu(K_2)-|\mu|((K_1\cup K_2)^C)>\|\mu\|_{var}-2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有 $\|L_\mu\|\geqslant\|\mu\|_{var}$，因此有 $\|L_\mu\|=\|\mu\|_{var}$。

现在证明映射 $\mu\mapsto L_\mu$ 是 $\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))$ 到 $C_0(X)^*$ 的满射。为此，设 $L\in C_0(X)^*$，即设 L 为 $C_0(X)$ 上的一连续线性泛函。由引理 5.2，存在 $C_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-，使得 $L=L_+-L_-$，L_+ 及 L_- 限于 $C_C(X)$ 为正线性泛函。故由 Riesz 表现定理(定理 2.8. (2))存在 $\mathscr{B}(X)$ 上的 Radon 测度 μ_1 及 μ_2，使得对一切 $f\in C_C(X)$，有 $L_+(f)=\int fd\mu_1$，$L_-(f)=\int fd\mu_2$。习题 2.21 蕴含

$$\mu_1(X)=\sup\{L_+(f):\ f\in C_C(X),\ 0\leqslant f\leqslant 1\}\leqslant\|L_+\|<\infty$$

同理 $\mu_2(X)<\infty$，故 $\mu=\mu_1-\mu_2\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B})$。显然我们有 $L=L_\mu$，定理证毕(映射 $\mu\mapsto L_\mu$ 的线性性是显然的)。

下面我们着手将上述结果推广到一般 Hausdorff 空间情形，为此我们先修改 $C_0(X)$ 的定义。

5.4 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为其局部紧部分。X 上的实值连续函数 f 称为**在无穷远处为零**，如果对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset X_0$，使 $|f(x)|<\varepsilon$ 在 K^C 上成立。我们用 $\hat{C}_0(X)$ 表示在无穷远处为零的连续函数全体。

显然有 $C_C(X)\subset\hat{C}_0(X)$。(对 $f\in C_C(X)$，取 $K=[|f|\geqslant\varepsilon]$。)

此外，当 X 为局部紧Hausdorff空间时，我们有 $\widehat{C}_0(X)=C_0(X)$。

由定义知，若 $f\in\widehat{C}_0(X)$，则 f 在 X_0^C 上为0。

下一引理给出了 $\widehat{C}_0(X)$中元素的另一刻画。

5.5 引理 设 X 为一Hausdorff空间，X_0 为其局部紧部分。令 f 为 X 上的一连续函数，则为要 $f\in\widehat{C}_0(X)$，必须且只需 $[|f|>0]$为局部紧开集，且对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 K，使$|f(x)|<\varepsilon$ 在 K^C 上成立。

证 必要性：设 $f\in\widehat{C}_0(X)$。则对每个 n，存在紧集 $K_n\subset X_0$，使$|f(x)|<\frac{1}{n}$ 在 K_n^C 上成立。令 $G_n=\left[|f|>\frac{1}{n}\right]$，则 $G_n\subset K_n$。此外，设 $x\in G_n$，则存在某 $\alpha>\frac{1}{n}$，使$|f(x)|>\alpha$，于是$[|f|\geqslant\alpha]\subset G_n$，且$[|f|\geqslant\alpha]$为 x 的紧邻域($[|f|\geqslant\alpha]$的紧性是由于$[|f|\geqslant\alpha]\subset K_n$)，这表明 G_n 为局部紧开集。因此，$[|f|>0]=\bigcup_n G_n$为局部紧开集。引理中的另一条件显然成立。

充分性：设 f 满足引理中的条件。任给 $\varepsilon>0$，依假定，存在紧集 K，使 f 在 K^C 上有 $|f(x)|<\varepsilon$，令 $K_1=K\cap[|f|\geqslant\varepsilon]$，则 K_1 为紧集，$K_1\subset[|f|>0]\subset X_0$，且有$|f(x)|<\varepsilon$ 在 K_1^C 上成立，故 $f\in\widehat{C}_0(X)$。

下一引理推广了引理4.1。

5.6 引理 设 X 为一Hausdorff空间，则 $\widehat{C}_0(X)$按一致范数$\|\ \|_\infty$为一Banach空间，且$C_C(X)$在$\widehat{C}_0(X)$中稠密。

证 $\widehat{C}_0(X)$的完备性的证明与引理5.1完全类似。现证$C_C(X)$在$\widehat{C}_0(X)$中稠密。设 X_0 为 X 的局部紧部分，令 $f\in\widehat{C}_0(X)$，对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset X_0$，使$|f(x)|<\varepsilon$ 在 K^C 上成立。令 $g\in C_C(X)$，使 $I_K\leqslant g\leqslant1$，且 $\mathrm{supp}[g]\subset X_0$（命题1.20），并令 $h=gf$，则 $h\in C_C(X)$，且有$\|f-h\|_\infty<\varepsilon$。这表明 $C_C(X)$在 $\widehat{C}_0(X)$

中稠密，证毕。

与局部紧 Hausdorff 空间情形类似，我们有如下引理，其证明同引理 5.2。

5.7 引理 设 X 为一 Hausdorff 空间，L 为 $\widehat{C}_0(X)$ 上的一连续线性泛函，则存在 $\widehat{C}_0(X)$ 上两个正连续线性泛函 L_+ 及 L_-，使 $L=L_+-L_-$。

下一定理推广了定理 5.3。

5.8 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为 X 的局部紧部分。令

$$\widehat{\mathfrak{M}}_r(X, \mathscr{B}(X))=\{\mu\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X)): |\mu|(X_0^c)=0\}$$

对 $\mu\in\widehat{\mathfrak{M}}_r(X, \mathscr{B}(X))$，令

$$L_\mu(f)=\int f d\mu, \quad f\in\widehat{C}_0(X)$$

则 $\mu\rightarrow L_\mu$ 为 $\widehat{\mathfrak{M}}_r(X,\mathscr{B}(X))$ 到 $\widehat{C}_0(X)^*$ 上的保范同构映射。

证 设 $\mu\in\widehat{\mathfrak{M}}_r(X, \mathscr{B}(X))$，与定理 5.3 的证明完全类似，可证 $L_\mu\in\widehat{C}_0(X)^*$，且 $\|L_\mu\|=\|\mu\|_{var}$。(注意：此时要考虑 X_0 关于 μ 的 Jordan 分解，然后对 X_0 应用命题 1.23。)

现证 $\mu\rightarrow L_\mu$ 为 $\widehat{\mathfrak{M}}_r(X, \mathscr{B}(X))$ 到 $\widehat{C}_0(X)^*$ 上的满射，为此，设 $L\in\widehat{C}_0(X)^*$。由引理 5.7，存在 $\widehat{C}_0(X)$ 上的两个正连续线性泛函 L_1 及 L_2。使得 $L=L_1-L_2$。L_1 及 L_2 限于 $C_C(X)$ 为 Daniell 积分，故由定理 4.9 知：存在 $\mathscr{B}(X)$ 上的强内正则测度 μ_1 及 μ_2，使得对一切 $f\in C_C(X)$，有

$$L_i(f)=\int f d\mu_i, \quad i=1, 2.$$

往证 μ_1 及 μ_2 为有限测度。为此，设 K 为含于 X_0 的紧集，由命题 1.20.(2)，存在 $f\in C_C(X)$，使得 $I_K\leqslant f\leqslant I_{X_0}$。从而有

$$\mu_i(K)=\int I_K d\mu_i\leqslant\int f d\mu_i=L_i(f)\leqslant\|L_i\|, \quad i=1, 2.$$

故由 μ_1 及 μ_2 的强内正则性知：$\mu_i(X)\leqslant\|L_i\|$，$i=1, 2$，因此

μ_1 及 μ_2 为有限测度。由此推知 μ_1 及 μ_2 为正则测度(见定理3.5)。令 $\mu=\mu_1-\mu_2$，则 $\mu\in\widehat{\mathfrak{M}}_r(X,\ \mathscr{B}(X))$，且有

$$L_\mu(f)=L(f),\ \forall f\in C_C(X)$$

由于 $C_C(X)$ 在 $\widehat{C}_0(X)$ 中稠密，故有 $L=L_\mu$。最后，映时 $\mu\to L_\mu$ 的线性性是显然的。证毕。

5.9 系 设 X 为一 Hausdorff 空间，则 $\widehat{\mathfrak{M}}_r(X,\ \mathscr{B}(X))$ 为 Banach 空间。

5.10 注 设 X 为一 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上一有限测度，则为要 μ 是强内正则的，必须且只需 $\mu\in\widehat{\mathfrak{M}}_r(X,\ \mathscr{B}(X))$。(见定理 3.5.(4))。

习题

5.11 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，令 X^Δ 为 X 的单点紧化(见 1.11)，对 X 上的函数 f，令

$$f_\Delta(x)=\begin{cases} f(x), & x\in X \\ 0\ , & x=\Delta,\end{cases}$$

则为要 $f\in C_0(X)$，必须且只需 f_Δ 为 X^Δ 上的连续函数。

5.12 设 X 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，则 $C_0(X)$ 为可分 Banach 空间。(提示：先考虑 X 为紧空间情形，然后利用 5.11。)。

5.13 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为 X 的局部紧部分。令

$$X_1=\bigcup\{[|f|>0],\ f\in C_C(X)\},$$

则 X_1 为局部紧开集，且 $\widehat{\mathfrak{M}}_r(X,\ \mathscr{B}(X))=\{\mu\in\mathfrak{M}_r(X,\mathscr{B}(X))\colon \mu(X_1^c)=0\}$。此外，$X_1^c$ 不包含非空局部紧开子集，且 $X_0\subset\overline{X}_1$。

5.14 设 X 为一 Hausdorff 空间，X_0 为 X 的局部紧部分。令 $\widehat{C}_C(X)=\{f\in C_C(X)\colon\ \sup(f)\subset X_0\}$，则 $\widehat{C}_C(X)$ 在 $\widehat{C}_0(X)$ 中稠密。

5.15 利用 5.14 给出定理 5.18 的另一证明。

5.16 设 X 为一距离空间，令 $C_b(X)$ 表示 X 上的有界连续函数全体。对 $f\in C_b(X)$，令

$$\|f\|=\sup_x|f(x)|,$$

则 $C_b(X)$ 按范数$\|\ \|$为一 Banach 空间，且其对偶空间 $C_b(X)^*$ 与 $\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$ 同构。这里 $\mathfrak{M}(X,\mathscr{B}(X))$ 表示 $\mathscr{B}(X)$ 上有限符号测度全体。（提示：利用 Daniell-Stone 定理。）

§6 用连续函数逼近可测函数，Lusin 定理

在许多情况下，连续函数比可测函数容易处理，本节介绍有关用连续函数逼近可测函数的一些结果。

下一定理的一个特殊情形见第三章习题 4.14。

6.1 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$ 为包含 $\mathscr{B}(X)$ 的一 σ- 代数，μ 为 $\mathscr{A}$ 上的一 Radon 测度。令 $1\leqslant p<\infty$，则 $C_C(X)$ 在 $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ 中稠密。

证 显然 $C_C(X)\subset L^p(X,\mathscr{A},\mu)$。由于 $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ 中的简单函数在 $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ 中稠密（见第三章引理 4.7），故为证定理只需证明如下事实：若 $A\in\mathscr{A}$，$\mu(A)<\infty$，则有 $f\in C_C(X)$，使 $\|I_A-f\|_p$ 任意小。为此，设 $\varepsilon>0$，由 μ 的外正则性，先取开集 $U\supset A$，使 $\mu(U)<\mu(A)+\varepsilon$，再由定理 3.5，取一紧集 $K\subset A$，使 $\mu(K)>\mu(A)-\varepsilon$。令 $f\in C_C(X)$，使 $I_K\leqslant f\leqslant I_U$（命题 1.20(2)），则 $|I_A-f|\leqslant I_U-I_K$，故有

$$\|I_A-f\|_p\leqslant\|I_U-I_K\|_p=\mu(U-K)^{1/p}<(2\varepsilon)^{1/p}$$

定理证毕。

下一定理是定理 6.1 的推广形式，其证明留给读者作为习题。

6.2 定理 设 X 为一 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$ 为包含 $\mathscr{B}(X)$ 的 σ- 代数，μ 为 $\mathscr{A}$ 上的准 Radon 测度。令 $1\leqslant p<\infty$，则 $C_C(X)\cap L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ 在 $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ 中稠密。

下一定理称为Lusin定理。

6.3 定理 设X为一Hausdorff空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一σ-代数，μ为$\mathscr{A}$上的一正则测度，f为X上的一$\mathscr{A}$-可测实值函数。如果$A\in\mathscr{A}$, $0<\mu(A)<\infty$，则对任给$\varepsilon>0$，存在紧集$K\subset A$，使$\mu(A\backslash K)<\varepsilon$，且$f$限于$K$连续。若进一步，$X$为局部紧，则存在$g\in C_C(X)$，使$g$与$f$在$K$上一致，且使

$$\sup\{|g(x)|: x\in X\}\leqslant\sup\{|f(x)|: x\in A\}. \tag{6.1}$$

证 首先设f只取可数多个值，即

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}a_i I_{A_i}$$

其中$a_i\neq a_j$, $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\phi$, $i\neq j$，且$\sum_i A_i=X$。取正整数n，使得$\mu\left(A\cap\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)^c\right)<\varepsilon/2$。由定理3.5，存在$A\cap A_1,\cdots,A\cap A_n$的紧子集$K_1,\cdots K_n$，使得$\sum_{i=1}^{n}\mu((A\cap A_i\backslash K_i)<\varepsilon/2$。令$K=\sum_{i=1}^{n}K_i$，则$K$为$A$的紧子集，且有

$$\mu(A\backslash K)=\mu\left(A\cap\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)^c\right)+\sum_{i=1}^{n}\mu((A\cap A_i)\backslash K_i)$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于f限于每个K_i为常数，从而f限于K为连续（见习题1.30）。

现设f为任一实值$\mathscr{A}$-可测函数，令

$$f_n(x)=\frac{k}{2^n},\ 若\frac{k}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k+1}{2^n},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

由前所证，对每个$n\geqslant1$，存在紧集$K_n\subset A$，使$\mu(A\backslash K_n)<\varepsilon/2^n$，

且 f_n 限于 K_n 为连续。令 $K=\bigcap_n K_n$，则由于 f 是(f_n)的一致极限，故 f 限于 K 连续，此外有

$$\mu(A\backslash K)\leqslant\sum_n\mu(A\backslash K_n)<\varepsilon.$$

最后证明定理的第二部分。假定 X 为局部紧 Hausdorff 空间，令 $X^\Delta=X\cup\{\Delta\}$为 X 的单点紧化，则 X^Δ 是正规空间（见命题 1.19)。故由 Tietze 扩张定理，存在 X^Δ 上的连续函数 h^*，使 h^* 在 K 上与 f 一致，且使 $\sup\{|h^*(x)|;\ x\in X\}=\sup\{|f(x)|;\ x\in K\}$。取 $p\in C_C(X)$，使得 $I_K\leqslant p\leqslant 1$（见命题 1.20.(2))，并令 $g=ph$，其中 h 为 h^* 在 X 上的限制，则 $g\in C_C(X)$，g 与 f 在 K 上一致，且使(6.1)成立。证毕。

习题

6.4 设 X 为一Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含$\mathscr{B}(X)$的一σ-代数，μ 为$\mathscr{A}$上的一有限正则测度，f 为 X 上的一实值函数。则下列三断言等价：

(1) f 为 $\overline{\mathscr{A}}^\mu$-可测(即$\overline{\mathscr{B}(X)}^\mu$-可测，见习题 2.22)；

(2) $\forall A\in\mathscr{A}$，$\forall\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset A$，使 $\mu(A\backslash K)<\varepsilon$，且 f 限于 K 连续；

(3) 存在 X 的分解：$X=\sum_n K_n+N$，其中每个 K_n 为紧集，N 为 μ-零测集，使得 f 限于每个 K_n 为连续。

6.5 设 f 为 R 上的实值函数。且对一切 a，$b\in R$，有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$。试证：(1)f 连续当且仅当它在一点连续；(2) 若 f 为 Lebesgue 可测，则 f 连续(提示：利用 Lusin 定理)。

§7 乘积拓扑空间上的测度与积分

本节研究的中心问题是：给定两个局部紧 Hausdorff 空间

X 和 Y 及其上的两个 Radon 测度 μ 和 ν，如何在乘积拓扑空间 $X\times Y$ 上构造一 Radon 测度 $\mu\times\nu$，使其在 X 及 Y 上的边缘测度分别是 μ 及 ν？进一步，是否有相应的 Fubini 定理？这里遇到的困难是：μ 及 ν 一般并非 σ-有限，且 $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$ 一般严格比 $\mathscr{B}(X\times Y)$ 小。因此，第四章的结果不再适用。为了克服这一困难，我们要求助于 Riesz 表现定理。

下面首先研究拓扑空间的乘积。

7.1 定义 设 $(X_1,\ \mathscr{G}_1)$，…，$(X_n,\ \mathscr{G}_n)$ 为拓扑空间，令 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，

$$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n:\ U_i\in\mathscr{G}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

则 $\mathscr{B}$ 对有限交运算封闭。以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑 $\mathscr{G}$ 称为 X 的**乘积拓扑**；$(X,\ \mathscr{G})$ 称为 $(X_1,\ \mathscr{G}_1)$，…，$(X_n,\ \mathscr{G}_n)$ 的**乘积拓扑空间**.

令 $\mathscr{B}_0=\{\Pi_i^{-1}(U_i):\ U_i\in\mathscr{G}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，其中 Π_i 为 X 到 X_i 的投映射，则易见 $\mathscr{B}_0$ 为 $\mathscr{G}$ 的子基，且 $\mathscr{G}$ 是使每个投影映时为连续映时的最小拓扑。

7.2 定理 设 $(X_\alpha,\mathscr{G}_\alpha)\alpha\in\wedge$ 为一族拓扑空间，令 $X=\prod\limits_{\alpha\in\wedge}X_\alpha$，设 $\mathscr{G}$ 为 X 上使每个投影映射 Π_α 为连续的最小拓扑，称 $(X,\mathscr{G})$ 为 $(X_\alpha,\ \mathscr{G}_\alpha)$，$\alpha\in\wedge$ 的**乘积拓扑空间**。

令 $\mathscr{P}_0$ 为 $\wedge$ 的非空有穷子集全体，令

$$\mathscr{B}=\bigcup_{s\in\mathscr{P}_0}\left\{\Pi_s^{-1}\left(\prod_{i\in s}U_i\right):\ U_i\in\mathscr{G}_i,\ \ i\in s\right\},$$

则 $\mathscr{B}$ 为拓扑 $\mathscr{G}$ 的基。

关于乘积拓扑空间，我们有如下重要定理：

7.3 定理(Tychonoff**定理**) 设 $(X_\alpha,\mathscr{G}_\alpha)$ 为一族紧拓扑空间，则其乘积拓扑空间 $(X,\ \mathscr{G})$ 亦为紧拓扑空间。

关于该定理的证明，读者可以参看任何一本有关点集拓扑的书，这里从略。

下面我们研究乘积拓扑空间上的 Borel σ- 代数。为方便起见，我们只讨论两个拓扑空间乘积情形。关于集合和函数的截口概念见第四章第二节。

7.4 引理 设 X 及 Y 为 Hausdorff 空间，$X\times Y$ 为其乘积拓扑空间(它也是 Hausdorff 空间)。则

(1) 我们有$\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)\subset\mathscr{B}(X\times Y)$. 若 X 及 Y 都有可数基，则$\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)=\mathscr{B}(X\times Y)$；

(2) 设 $E\in\mathscr{B}(X\times Y)$，则对每个 $x\in X$ 及每个 $y\in Y$，有 $E_x\in\mathscr{B}(Y)$，$E^y\in\mathscr{B}(X)$。这里 $E_x=\{y\in Y: (x, y)\in E\}$，$E^y=\{x\in X: (x, y)\in E\}$；

(3) 设 f 为 $X\times Y$ 上的$\mathscr{B}(X\times Y)$-可测函数，则对每个 $x\in X$ 及 $y\in Y$，f_x 为 Y 上的$\mathscr{B}(Y)$- 可测函数，f^y 为 X 上的$\mathscr{B}(X)$- 可测函数。这里 f_x 及 f^y 分别是 f 在 x 及 y 处的截口(见第四章定义 2.1)。

证 (1) 第一部分显然。现设$\mathscr{C}$及$\mathscr{D}$分别为 X 及Y 的可数基。令 $\zeta=\{U\times V: U\in\mathscr{C}, V\in\mathscr{D}\}$，则 ζ 为 $X\times Y$ 的可数基。由于 $\zeta\subset\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$，且 X 的每个开集为 ζ 中元素的可列并，故有$\mathscr{B}(X\times Y)\subset\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$。从而有$\mathscr{B}(X\times Y)=\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$。

(2) 设 $x\in X$，令 $g_x(y)=(x, y)$，则 g_x 为 Y 到 $X\times Y$ 上的连续函数，从而关于$\mathscr{B}(Y)$及$\mathscr{B}(X\times Y)$可测。但 $E_x=g^{-1}(E)$，故 $E_x\in\mathscr{B}(Y)$。同理可证 $E^y\in\mathscr{B}(X)$。

(3) 注意：$(f_x)^{-1}(B)=(f^{-1}(B))_x$，$(f^y)^{-1}(B)=(f^{-1}(B))^y$，故(3)由(2)推得。

下一引理的证明留给读者完成。

7.5 引理 设 S 及 T 为拓扑空间，T 为紧空间．令 f 为 $S\times T$ 上的实值连续函数。则对任一 $s_0\in S$ 及任一 $\varepsilon>0$，存在 s_0 的一开邻域 U，使得对一切 $s\in U$ 及一切 $t\in T$，有$|f(s, t)-f(s_0,t)|$

$<\varepsilon$。

7.6命题 设 X 及 Y 为局部紧Hausdorff空间，μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的Radon测度，令 $f\in C_C(X\times Y)$。则

(1) 对任何 $x\in X$，$y\in Y$，有 $f_x\in C_C(Y)$，$f^y\in C_C(X)$；

(2) 函数 $x\to\int_Y f(x, y)\nu(dy)$ 及 $y\to\int_X f(x, y)\mu(dx)$ 分别属于 $C_C(X)$ 及 $C_C(Y)$；

(3) $\int_X\int_Y f(x, y)\nu(dy)\mu(dx)=\int_Y\int_X f(x, y)\mu(dx)\nu(dy)$.

证 (1) 令 $K=\mathrm{supp}(f)$，设 K_1 及 K_2 分别为K在 X 及 Y 上的投影，则 K_1 及 K_2 为紧集。显然 f_x 在 Y 上连续，且 $\mathrm{supp}(f_x)\subset K_2$，故 $f_x\in C_C(Y)$。同理 $f^y\in C_C(X)$。

(2) 分别对 $X\times K_2$ 及 $K_1\times Y$ 应用引理7.5即可推得(2)的结论(注意 $\nu(K_2)<\infty$，$\mu(K_1)<\infty$)。

(3) 对任给 $\varepsilon>0$，由引理7.5知：对每个 $x\in K_1$，存在 x 的开邻域 U_x，使对一切 $x'\in U_x$ 及一切 $y\in K_2$，有 $|f(x', y)-f(x,y)|<\varepsilon$。由于 K_1 为紧集，故存在 U_{x_1}，…，U_{x_n} 覆盖 K_1。令 A_1，…，A_n 为两两不交的Borel集，使得 $A_i\subset U_{x_i}$，$1\leqslant i\leqslant n$，且 $\sum_{i=1}^n A_i=K_1$。令

$$g(x, y)=\sum_{i=1}^n f(x_i, y)I_{A_i}(x)$$

则容易验证

$$\iint g(x, y)\mu(dx)\nu(dy)=\iint g(x, y)\nu(dy)\mu(dx)$$

$$=\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\int f(x_i, y)\nu(dy).$$

此外，f 及 g 在 $K_1\times K_2$ 的余集上为 0，且 $|f-g|<\varepsilon$。于是有

$$\left|\iint f(x,\ y)\mu(dx)\nu(dy)-\iint f(x,\ y)\nu(dy)\mu(dx)\right|$$

$$\leqslant\left|\iint (f)x,\ y)-g(x,\ y))\mu(dx)\nu(dy)\right|$$

$$+\left|\iint (f(x,\ y)-g(x,\ y))\nu(dy)\mu dx\right|$$

$$\leqslant 2\varepsilon\mu(K_1)\nu(K_2).$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故(3)得证。

命题 7.6 导致如下的

7.7 定义 设 μ 及 ν 分别为局部紧 Hausdorff 空间 X 及 Y 上的 Radon 测度。由命题 7.6(3)知，我们可在 $C_C(X\times Y)$ 上定义一正线性泛函 I：

$$I(f)=\iint f(x,\ y)\mu(dx)\nu(dy)=\iint f(x,\ y)\nu(dy)\mu(dx)$$

由于 $X\times Y$ 是局部紧 Hausdorff 空间，故由 Riesz 表现定理知，有 $X\times Y$ 上唯一的 Radon 测度与 I 对应。我们称此 Radon 测度为 μ 与 ν 的 Radon **乘积**，记为 $\mu\times\nu$。

下面的任务是要证明与 Radon 乘积测度 $\mu\times\nu$ 有关的 Fubini 定理。为此，我们需要有关下半连续函数积分的一个结果。

7.8 定义 设 X 为一拓扑空间。函数 f: $X\mapsto(-\infty,\ +\infty]$ 称为**下半连续的**，如果对每个实数 A，$[f>A]$为开集，称函数 f: $X\to[-\infty,\ +\infty)$ 为**上半连续的**，如果 $-f$ 为下半连续。

显然，既下半连续又上半连续的函数为连续函数。反之亦然。此外，一族下半连续函数的上端为下半连续函数，下半连续函数为 Borel 可测。

7.9 引理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$为包含 $\mathscr{B}(X)$的一 σ- 代数，μ 为$\mathscr{A}$上的一 Radon 测度。设$\mathscr{H}$为一族非负下半连续函数，使得：对任何 h_1，$h_2\in\mathscr{H}$，存在 $h\in\mathscr{H}$，满足

$h \geqslant h_1 \vee h_2$。令

$$f(x)=\sup\{h(x):\ h\in\mathscr{H}\},\ x\in X,$$

则$\int f d\mu=\sup\left\{\int h d\mu:\ h\in\mathscr{H}\right\}$。

证 显然对 $h\in\mathscr{H}$ 有$\int h d\mu\leqslant\int f d\mu$。为证引理，只需证：对任一实数 $A<\int f d\mu$，存在 $h\in\mathscr{H}$，使 $A<\int h d\mu$。为此，先用简单函数逼近 f。令

$$U_{n,i}=\left[f>\frac{i}{2^n}\right],$$

$$f_n=\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}I_{U_{n,i}}=\sum_{i=1}^{n2^n-1}\frac{i}{2^n}I_{\left[\frac{i}{2^n}<f_n\leqslant\frac{i+1}{2^n}\right]}$$

$$+nI_{[f>n]}$$

则 f_n 为 Borel 可测，$f_n\uparrow f$，故有$\int f_n d\mu\uparrow\int f d\mu$。于是存在自然数 N，使$\int f_N d\mu>A$。

由于$\int f_N d\mu=\frac{1}{2^N}\sum_i\mu(U_{N,i})$，故由 μ 的正则性，存在 $U_{N,i}$ 的紧子集 K_i，$i=1,2\cdots,N2^N$，使得 $\frac{1}{2^N}\sum_i\mu(K_i)>A$。令 $g=\frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N2^N}I_{K_i}$，则对每个 $x\in\bigcup_i K_i$，有

$$g(x)\leqslant f_N(x)<f(x)。$$

于是由 f 的定义，对每个 $x\in\bigcup_i K_i$，存在 $h_x\in\mathscr{H}$，使 $g(x)<h_x(x)$。由于 h_x-g 为下半连续(见习题 7.12)，故存在 x 的一开邻域 U_x，使对一切 $y\in U_x$，有 $h_x(y)-g(y)>0$。现取 $U_{x_1},\cdots,U_{x_m}$，

使 $\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \supset \bigcup_{i=1}^{N2^N} K_i$，并取 $h \in \mathscr{H}$，使 $h \geqslant \bigvee_{i=1}^{m} h_{x_i}$，则 $h \geqslant g$，从而有

$$A < \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{N2^N} \mu(K_i) = \int g d\mu \leqslant \int h d\mu.$$

引理证毕。

7.10 命题 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间，μ 及 ν 分别是 X 及 Y 上的 Radon 测度，$\mu \times \nu$ 为其 Radon 乘积。令 U 为 $X \times Y$ 的开子集。则

(1) 函数 $x \mapsto \nu(U_x)$ 及 $y \mapsto \mu(U^y)$ 为下半连续函数；

(2) $(\mu \times \nu)(U) = \int_X \nu(U_x)\mu(dx) = \int_Y \mu(U^y)\nu(dy)$。

证 (1) 令

$$\mathscr{H}_x = \{f_x : f \in C_C(X \times Y): 0 \leqslant f \leqslant I_U\}$$

$$\mathscr{H}^y = \{f^y : f \in C_C(X \times Y): 0 \leqslant f \leqslant I_U\}$$

则 $\mathscr{H}_x \subset C_C(Y)$，$\mathscr{H}^y \subset C_C(X)$，且 $\mathscr{H}_x$ 及 $\mathscr{H}^y$ 满足引理 7.9 的条件。故由引理 7.9 得

$$\nu(U_x) = \sup\left\{\int f_x d\nu : f_x \in \mathscr{H}_x\right\}, \tag{7.1}$$

$$\mu(U^y) = \sup\left\{\int f^y d\mu : f^y \in \mathscr{H}^y\right\}. \tag{7.2}$$

但由命题 7.6，$x \mapsto \int f_x d\nu$ 及 $y \mapsto \int f^y d\mu$ 是连续函数，故 $x \mapsto \nu(U_x)$ 及 $y \mapsto \mu(U^y)$ 是下半连续函数。

(2) 令 $\mathscr{H} = \{f \in C_C(X \times Y): 0 \leqslant f \leqslant I_U\}$，则相继由习题 2.21、引理 7.9 及(7.1)式得

$$(\mu \times \nu)(U) = \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu)$$

$$\geq \sup_{f\in\mathscr{K}}\int_X\int_Y f(x, y)\nu(dy)\mu(dx)$$
$$=\int_X\left(\sup_{f\in\mathscr{K}}\int f_x d\nu\right)\mu(dx)$$
$$=\int_X \nu(U_x)\mu(dx).$$

(2)的第一部分得证。同理可证(2)的另一半，命题证毕。

下一定理是有关 Radon 乘积测度 $\mu\times\nu$ 积分的 Fubini 定理.

7.11 定理 设 X 及 Y 为局部紧 Hausdorff 空间，μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度，$\mu\times\nu$ 为其 Radon 乘积. 设 $f\in L^1(X\times Y, \mathscr{B}(X\times Y), \mu\times\nu)$，且存在分别关于 μ 及 ν 为 σ-有限的 Borel 集 X_0 及 Y_0，使 f 在 $X_0\times Y_0$ 的余集上为 0，则

(1) 对 μ-a.e.x，$f_x\in L^1(Y, \mathscr{B}(Y), \nu)$，对 ν-a.e.y，$f^y\in L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu)$；

(2) 令

$$I_f(x)=\begin{cases}\int f_x d\nu, & 若 f_x\in L^1(Y, \mathscr{B}(Y), \nu),\\ 0, & 其它情形.\end{cases}$$

$$I^f(y)=\begin{cases}\int f^y d\mu, & 若 f^y\in L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu),\\ 0, & 其它情形.\end{cases}$$

则 $I_f\in L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu)$，$I^f\in L^1(Y, \mathscr{B}(Y), \nu)$，且有

$$\int f d(\mu\times\nu)=\int I_f(x)\mu(dx)=\int I^f(y)\nu(dy).$$

证 首先假定 $E\in\mathscr{B}(X\times Y)$，并假定存在 $A\in\mathscr{B}(X)$，$B\in\mathscr{B}(Y)$，使 $\mu(A)<\infty$，$\nu(B)<\infty$，且 $E\subset A\times B$. 往证

(a) 函数 $x\mapsto\nu(E_x)$ 及 $y\mapsto\mu(E^y)$ 为 Borel 可测；

(b) $(\mu\times\nu)(E)=\int\nu(E_x)\mu(dx)=\int\mu(E^y)\nu(dy)$.

由 μ 及 ν 的外正则性，存在开集 $U\supset A$ 及开集 $V\supset B$，使 $\mu(U)<\infty$，$\nu(V)<\infty$。令 $W=U\times V$，令

$\mathscr{S}=\{D\in\mathscr{B}(X\times Y)$: $D\subset W$, D 满足性质(a)及$(b)\}$,
则易见$\mathscr{S}$为 W 上的 λ-类。另一方面，由命题 7.10，W 的一切开子集属于$\mathscr{S}$，故由单调类定理(第一章定理 2.2)，$\mathscr{S}=\mathscr{B}(W)=W\cap\mathscr{B}(X)$(后一等号见第一章习题 2.7)。特别 $E\in\mathscr{S}$。

由上所证，容易推知：设 $E\in\mathscr{B}(X\times Y)$。假定存在 μ σ-有限集 $A\in\mathscr{B}(X)$及 ν σ-有限集 $B\in\mathscr{B}(Y)$，使 $E\subset A\times B$，则 E 满足性质(a)及(b)。于是，用通常的方法从简单函数过渡到非负可测函数，即可推得定理的结论。证毕。

习题

7.12 设 X 为一拓扑空间，A 为 X 的一子集，则为要 I_A 为下半连续函数(相应地，上半连续函数)，必须且只需 A 为开集(相应地，闭集)。

7.13 设 X 为一拓扑空间，f 及 g 为下半连续函数，则 $f+g$ 为下半连续函数。

7.14 设 X，Y，μ，ν，及 $\mu\times\nu$ 如定理 7.11。令 f 为 $X\times Y$ 上的非负下半连续函数，则

(1) 函数 $x\mapsto\int f(x,y)\nu(dy)$及 $y\mapsto\int f(x,y)\mu(dx)$为 Borel 可测；

(2) $\int fd(\mu\times\nu)=\iint f(x,y)\nu(dy)\mu(dx)=\iint f(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

7.15 设 X 及 Y 为具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 及 ν 分别为 X 及 Y 上的 Radon 测度。则 μ 及 ν 为 σ-有限测度，$\mathscr{B}(X\times Y)=\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(Y)$，且$\mathscr{B}(X\times Y)$上通常意义下的乘积测度 $\mu\times\nu$ 就是 Radon 乘积测度。

§8 Polish 空间及有限测度的正则性

Polish 空间是概率论中经常用到的一类拓扑空间。本节只

介绍 Polish 空间的基本性质，有关这类空间的进一步讨论可参看 Donald L. Cohn"Measure Theory"p.251—296。

8.1 定义 设 X 为一 Hausdorff 空间。如果在 X 上存在与拓扑相容的距离 ρ，使(X, ρ)为一可分完备距离空间，则称 X 为 **Polish(波兰)空间**。

这里，称距离空间是**完备的**，如果空间中的基本列皆收敛。完备性概念不是拓扑概念：一个完备距离空间可以改赋以一等价距离变成非完备的。

8.2 命题 设 X 为一 Polish 空间，F 为 X 的闭子集，U 为 X 的开子集。则作为 X 的子空间，F 及 G 都是 Polish 空间。

证 设 ρ 为与拓扑相容的距离，使(X, ρ)为一可分完备距离空间。显然，作为 X 的子空间，(F, ρ)为可分且完备的，故 F 为 Polish 空间。

下面证明 U 为 Polish 空间。为此，设 U 非空且不等于全空间。在 U 上定义 $\rho_0(x, y)$如下：

$$\rho_0(x, y)=\rho(x, y)+\left|\frac{1}{\rho(x, U^C)}-\frac{1}{\rho(y, U^C)}\right|,$$

其中

$$\rho(x, U^C)=\inf\{\rho(x, z): z\in U^C\}.$$

容易看出：ρ_0 是 U 上的一距离，且 U 中序列$\{x_n\}$按 ρ_0 收敛于 U 中的点 x 等价于$\{x_n\}$按 ρ 收敛于 x。这表明：距离 ρ_0 与 U 的拓扑相容。特别，(U, ρ_0)是可分的。

现证(U, ρ_0)是完备距离空间。设$\{x_n\}$是 U 中序列，且按 ρ_0 为基本列。依 ρ_0 的定义知，$\{x_n\}$按距离 ρ 亦为基本列。故由(X, ρ)的完备性，存在 $x\in X$，使 $\rho(x_n, x)\to 0$ $(n\to\infty)$. x 必属于 U。因为否则的话，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, U^C)=0$，这将导致 $\overline{\lim\limits_{n, m\to\infty}}\rho_0(x_n, x_m)=\infty$，这与假定$\{x_n\}$关于 ρ_0 为基本列矛盾。既然 $x\in U$，则由

$(\rho x_n, x) \to 0$ 推告 $\rho_0(x_n, x) \to 0$，(U, ρ_0)的完备性得证。因此，U 为 Polish 空间，证毕。

8.3 命题 具可数基的局部紧 Hausdorff 空间是 Polish 空间。

证 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，令 X^Δ 为其单点紧化，则 X^Δ 为具可数基的紧 Hausdorff 空间。从而存在 X^Δ 上一与拓扑相容的距离 ρ，使(X^Δ, ρ)为可分紧距离空间（见习题 1.40）。但紧距离空间显然是完备的，故 X^Δ 为 Polish 空间。但 X 是 X^Δ 中的开子集，故由命题 8.2 知，X 为 Polish 空间，证毕。

8.4 命题 设 X_1，X_2，…为 Polish 空间的有限或可数序列，则其乘积空间 $\prod_n X_n$ 为 Polish 空间。

证 设 d_n 为 X_n 上的与拓扑相容的距离，使(X_n, d_n)为可分完备距离空间。不妨设对一切 $x, y \in X_n$，有 $d_n(x, y) \leq 1$（否则令 $d_n'(x, y) = d_n(x, y) \wedge 1$，则 d_n' 与 d_n 等价，且(X_n, d_n')仍完备）。令

$$d(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n),$$

其中 $x, y \in \prod_n X_n$，则易见 d 为 $\prod_n X_n$ 上与拓扑相容的距离，且 $\left(\prod_n X_n, d\right)$为可分完备距离空间。因此 $\prod_n X_n$ 为 Polish 空间，证毕。

下一命题推广了命题 8.2。

8.5 命题 设 X 为一 Polish 空间，Y 为 X 的一子空间，则 Y 为 Polish 空间，当且仅当它是$\mathscr{G}_\delta$-集。这里$\mathscr{G}$表示 X 的开子集全体。

证 充分性。设 $Y=\bigcap_n U_n$，其中每个 U_n 为 X 的开子集。由于每个 U_n 为 Polish 空间(命题 8.2)，故 $\prod_n U_n$ 为 Polish 空间(命题 8.4)。令

$$\Delta=\left\{u\in\prod_n U_n:\ u_j=u_k,\ \forall j,k\geqslant 1\right\}$$

则 Δ 为 $\prod_n U_n$ 中的闭集，从而为 Polish 空间(命题 8.2)。令

$$i(y)=(y,\ y,\ \cdots),y\in\bigcap_n U_n=Y$$

则 i 为 Y 到 Δ 的同胚映射。故 Y 是 Polish 空间。

必要性。设 Y 为 X 的 Polish 子空间。令 d 及 d_0 分别是 X 及 Y 上的与拓扑相容的距离，使$(X,\ d)$及$(Y,\ d_0)$为可分完备距离空间。设 V 为 Y 的子集，我们用 $d_0(V)$表示 V 在 d_0 下的直径，即 $d_0(V)=\sup\limits_{x,y\in V}d_0(x,\ y)$。令

$$V_n=\cup\left\{W:\ W\in\mathscr{G},\ W\cap Y\neq\phi,\ d_0(W\cap Y)\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\geqslant 1$$

则每个 V_n 为开集。下证

$$Y=\overline{Y}\cap\left(\bigcap_n V_n\right). \tag{8.1}$$

由于 d 与 d_0 在 Y 上诱导同一拓扑，故易见 $Y\subset\overline{Y}\cap\left(\bigcap_n V_n\right)$。再证相反的包含关系。设 $x\in\overline{Y}\cap\left(\bigcap_n V_n\right)$ 则由 V_n 的定义知，对每个 n，存在 x 的开邻域 W_n，使 $W_n\cap Y\neq\phi$，且 $d_0(W_n\cap Y)\leqslant\frac{1}{n}$，不妨设$(W_n)$是单调下降的集列。另一方面，对每个 n，存在 x 的

开邻域G_n，使$d(G_n)\leqslant\frac{1}{n}$，不妨设$(G_n)$也是单调下降的．由于$x\in\overline{Y}$，故$G_n\cap Y\neq\phi$．令$U_n=W_n\cap G_n$，则对每个$n$,有

$$x\in U_n,\quad U_n\cap Y\neq\phi,\quad d(U_n)\leqslant\frac{1}{n},\quad d_0(U_n\cap Y)\leqslant\frac{1}{n}.$$

由于$(Y,\ d_0)$完备，$U_n\cap Y$单调下降，故存在唯一的$y\in Y$，使$\bigcap\limits_n F_n=\{y\}$(Cantor定理)，这里$F_n$为$U_n\cap Y$在$Y$中的闭包。另一方面，由于$(X,\ d)$是完备的，$U_n$单调下降，且$x\in U_n$，$n\geqslant 1$，故$\bigcap\limits_n \overline{U_n}=\{x\}$．但显然有$F_n\subset\overline{U}_n\cap Y$（因后者是$Y$中闭集，且包含$U_n\cap Y$)，故$y\in\bigcap\limits_n\overline{U}_n$，从而$y=x$．特别，有$x\in Y$．因此，我们证明了$\overline{Y}\cap\left(\bigcap\limits_n V_n\right)\subset Y$．(8.1)得证．由(8.1)知：$Y$为$\mathscr{G}_\delta$-集(因$\overline{Y}$作为距离空间$X$中的闭集是$\mathscr{G}_\delta$-集，$\bigcap\limits_n V^n$也是$\mathscr{G}_\delta$-集)。证毕。

8.6 定理 设X为一Polish空间，μ为$\mathscr{B}(X)$上的一有限测度，则μ为正则的。

证 令ρ为X上与拓扑相容的距离，使$(X,\ \rho)$为一可分完备距离空间。为证μ的正测性，只需证：$\forall A\in\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K):\ K\subset A,\ K\text{为紧集}\}. \tag{8.2}$$

(见定理3.5.(3).)设$\{x_n\}$为X的可数稠子集,令$B(x,\delta)$表示以x为心半径为δ的开球．由于$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B\left(x_k,\ \frac{1}{n}\right)$，故对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$k_n$，使

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)\right) > \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \geqslant 1.$$

令 K 为全有界集 $\bigcap_n \bigcup_{j=1}^{k_n} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)$的闭包，则 K 为紧集(因(X, ρ)为完备的)。我们有

$$\mu(K^C) \leqslant \sum_n \mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} B\left(x_j, \frac{1}{n}\right)\right)^C\right) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

即有 $\mu(K) > \mu(X) - \varepsilon$。但 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故(8.2)对 $A = X$ 成立现设 $A \in \mathscr{B}(X)$.对任给 $\varepsilon > 0$,先取紧集 K，使 $\mu(K^C) < \varepsilon$.此外，由系 3.2 知，存在 A 的闭子集 F，使 $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$。令 $K_1 = K \cap F$，则 K_1 为紧集，$K_1 \subset A$，且有 $\mu(K_1) > \mu(A) - 2\varepsilon$，故(8.2)得证。定理证毕。

习题

8.7 设 X 为 R 中无理数全体，则 X 按 R 诱导出的拓扑为 Polish 空间。

第六章 测度的收敛

本章研究有关测度序列的收敛性问题，其中包括抽象可测空间上有限测度的收敛，距离空间上有限测度的弱收敛及局部紧Hausdorff空间上Radon测度的淡收敛。

§1 Vitali-Hahn-Saks 定理

下一定理称为Vitali-Hahn-Saks定理.将我们在下一章给出这一定理的应用。

1.1 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，(μ_n)为其上的一列有限符号测度，λ为一有限测度，使得对一切$n\geqslant1$，有$\mu_n\ll\lambda$(这样的测度λ恒存在，例如令$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|\mu_n\||\mu_n|$，其中$\|\mu_n\|$表示$\mu_n$的全变差，$|\mu_n|$为$\mu_n$的变差测度)。如果对每个$A\in\mathscr{F}$，极限$\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$存在且有限，则

(1) μ为一符号测度；

(2) $\sup\limits_n\|\mu_n\|<\infty$；

(3) 对任给$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使得：

$$A\in\mathscr{F},\ \lambda(A)\leqslant\eta\Rightarrow\sup_n|\mu_n|(A)\leqslant\varepsilon.$$

证 令Φ表示$L^1(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$中由$\mathscr{F}$-可测集的示性函数等价类所成的子集，则$\Phi$是闭集。从而作为子空间，$\Phi$为完备距离空间。设$A\in\mathscr{F}$，令$\dot{A}$表示$A$所相应的等价类，我们用$\dot{\mathscr{F}}$表示$\mathscr{F}$中元素等价类全体，则$(\dot{\mathscr{F}},d)$为完备距离空间，其中

$$d(\dot{A},\ \dot{B}) = \lambda(A\triangle B)。$$

设 $\alpha>0$，令

$$L_j = \{\dot{A}\in\dot{\mathscr{F}}:\ \forall n\geqslant j,\ m\geqslant j,\ |\mu_n(A)-\mu_m(A)|\leqslant\alpha\}$$

由于函数 $\dot{A}\mapsto\mu_n(A)$ 在 $\dot{\mathscr{F}}$ 上连续，故 L_j 为闭集。显然 $\bigcup_j L_j = \dot{\mathscr{F}}$（因对一切 $A\in\mathscr{F}$，$\mu_n(A)$ 收敛）。由 Baire 定理，存在某 j，使 L_j 有一内点 $\dot{A}$，即对某 $h>0$，有：

$$B\in\mathscr{F},\lambda(B\triangle A)\leqslant h\Rightarrow|\mu_n(B)-\mu_m(B)|\leqslant\alpha,\forall n\geqslant j,\forall m\geqslant j.$$

取 $0<\eta<h$，使得（见第三章习题 3.19）：

$$C\in\mathscr{F},\ \lambda(C)\leqslant\eta\Rightarrow|\mu_i|(C)\leqslant\alpha,\ i=1,\cdots,j,$$

对 $n\geqslant j$，我们有

$$\begin{aligned}|\mu_n(C)|\leqslant&|\mu_n(A\cup C)-\mu_n(A)|+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_n(A)|\\ \leqslant&|\mu_n(A\cup C)-\mu_j(A\cup C)|+|\mu_j(A\cup C)\\ &-\mu_j(A)|+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|\\ &+|\mu_n(A\backslash C)-\mu_j(A\backslash C)|+|\mu_j(A\backslash C)-\mu_j(A)|\\ &+|\mu_j(A)-\mu_n(A)|\end{aligned}$$

于是 $\lambda(C)\leqslant\eta\Rightarrow\sup\limits_n|\mu_n(C)|\leqslant6\alpha$。从而由第三章习题 3.23 知：

$\lambda(C)\leqslant\eta\Rightarrow\sup\limits_n|\mu_n|(C)\leqslant12\alpha$。由此立刻推得(3)（令 $\alpha=\varepsilon/12$）。

下面我们证明(2)。我们将空间 Ω 分为有限多个 λ-测度 $>\eta$ 的原子及有限多个 λ-测度 $\leqslant\eta$ 的集合。由于 $|\mu_n|\ll\lambda$，故 λ 的原子必为每个 $|\mu_n|$ 的原子。从而在 λ 的原子集 A 上，有 $|\mu_n|(A)=|\mu_n(A)|$，从而 $\sup\limits_n|\mu_n|(A)<\infty$。由此并利用前段的结果推得(2)的结论。

最后，μ 在 $\mathscr{F}$ 上显然是有限可加的。现设 $E_k\in\mathscr{F}$，$E_k\downarrow\phi$，则 $\lambda(E_k)\to0$，从而由(3)知 $\mu(E_k)\to0$。由此推知 μ 是 σ-可加的，故 μ 是有限符号测度。证毕。

习题

1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\xi_n\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，若对一切$A\in\mathscr{F}$，$\int_A\xi_n dP$的极限存在且有穷，则存在唯一的$\xi\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_A\xi_n\,dP=\int_A\xi dP,\qquad A\in\mathscr{F}.$$

§2 距离空间上有限测度的弱收敛

设X为一距离空间(或可距离化的拓扑空间)，$C_b(X)$表示X上有界连续函数全体。由习题5.16知，$\mathscr{B}(X)$上有限符号测度全体可视为$C_b(X)$的对偶空间。因此，我们自然引进如下的定义：

2.1 定义 设(X,ρ)为一距离空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的有限测度。如果对一切$f\in C_b(X)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X fd\mu_n=\int_X fd\mu,$$

则称(μ_n)弱收敛于μ，记为$\mu_n\xrightarrow{w}\mu$。

显然，弱收敛的极限是唯一的。此外，由于$C_b(X)$只与X的拓扑有关，所以测度弱收敛概念并不依赖于距离的选取。

下一引理允许我们将有限测度的弱收敛归结为概率测度的弱收敛。

2.2 定理 设(X,ρ)为一距离空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的有限测度。令

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(X)}\qquad P_n(A)=\frac{\mu_n(A)}{\mu_n(X)},\ A\in\mathscr{B}(X).$$

则下列二断言等价：

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$；

(2) $P_n \xrightarrow{w} P$，$\mu_n(X) \to \mu(X)$。

证 显然。

2.3 定义 设 X 为一拓扑空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上一测度，$A \in \mathscr{B}(X)$。若 $\mu(\partial A)=0$（$\partial A=\bar{A}\setminus \mathring{A}$ 为 A 的边界），则称 A 为 **μ-连续集**。

下一定理给出了测度弱收敛的若干刻画。

2.4 定理 设 (X,ρ) 为一距离空间，μ，μ_1，$\mu_2 \cdots$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的有限测度，令 $\mathscr{U}_\rho(X)$ 表示 X 上关于 ρ 一致连续的有界函数全体。（从而有 $\mathscr{U}_\rho(X) \subset C_b(X)$）则下列条件等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$；

(2) $\forall f \in \mathscr{U}_\rho(X)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int f d\mu_n = \int f d\mu$；

(3) $\forall$ 闭集 F，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(F) \leqslant \mu(F)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$；

(4) $\forall$ 开集 G，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G) \geqslant \mu(G)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$；

(5) 对任何 μ-连续集 $A \in \mathscr{B}(X)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$。

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然。下证 (2) $\Rightarrow$ (3)。假设 (2) 成立。设 F 为闭集，令 $f_n(X)=\left(\dfrac{1}{1+\rho(x,F)}\right)^n$，$n \geqslant 1$，则 $f_n \in \mathscr{U}_\rho(X)$，且 $f_n \downarrow I_F$，故有

$$\mu(F)=\lim_{k\to\infty}\int f_k d\mu=\lim_{k\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\int f_k d\mu_n\right] \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(F).$$

此外，令 $f\equiv 1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$。故 (3) 成立。(3) $\Leftrightarrow$ (4) 显然。(3)+(4) $\Rightarrow$ (5) 由下式看出：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(A) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\bar{A}) \leqslant \mu(\bar{A})=\mu(\mathring{A}) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\mathring{A})$$

$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(A)$.

剩下只需证(5)⇒(1). 设(5)成立. 令 $f\in C_b(X)$, 给定 $\varepsilon>0$, 选取 N 及实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}$, 使得

$$-\|f\|-1=a_0<a_1<\cdots<a_{N-1}<a_N=\|f\|+1,$$

且使 $\sup_i(a_i-a_{i-1})<\varepsilon$ 及 $\mu([f=a_i])=0$, $1\leqslant i\leqslant N-1$, 这里 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$. 令 $B_i=[a_{i-1}\leqslant f(x)<a_i]$, $i=1,2,\cdots N$. 则 (B_i) 两两不相交, 且 $\sum_i B_i=X$, $\mu(\partial B_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant N$. 此外, 对一切 $x\in X$, 有 $\left|f(x)-\sum_{i=1}^N a_i I_{B_i}(x)\right|<\varepsilon$. 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int f d\mu_n-\int f d\mu\right|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(\mu_n(X)+\mu(X))\varepsilon+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int\sum_{i=1}^N a_i I_{B_i} d(\mu_n-\mu)\right|$$

$$\leqslant 2\mu(X)\varepsilon+\sum_{i=1}^N|a_i|\overline{\lim_{n\to\infty}}|\mu_n(B_i)-\mu(B_i)|=2\mu(X)\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 故(1)成立, 定理证毕.

从现在起, 我们只讨论概率测度的弱收敛.

2.5 引理 设 h 为距离空间(X,ρ)到另一距离空间(Y, d)中的映射, 令 $D(h)$表示 h 的不连续点全体, 则 $D(h)$为 X 中的 Borel 可测集.

证 令

$$A_{n,m}=\left\{x\in X: \text{存在 } y,z\in X, \text{使 } \rho(x,y)<\frac{1}{n},\ \rho(x,z)<\frac{1}{n},\ d(h(y),h(z))\geqslant\frac{1}{m}\right\},\ n,m=1,2,\cdots$$

则 $A_{n,m}$ 为 X 的开子集. 显然有

$$D(h)=\bigcup_m\bigcap_n A_{n,m}=$$

故$D(h)$为X中的 Borel 可测集。

2.6 定义 设(X,ρ)为一距离空间，P为$\mathscr{B}(X)$上一概率测度，h为(X,ρ)到另一距离空间(Y,d)的映射．如果$P(D(h))=0$，则称h为P-**连续的**．

2.7 命题 设(X,ρ)及(Y,d)为两个距离空间，$P,P_1,P_2,\cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的概率测度，h为X到Y中的 Borel 可测映射。如果$P_n \xrightarrow{w} P$且h为P连续的，则有$P_n h^{-1} \xrightarrow{w} Ph^{-1}$．这里$Ph^{-1}$为由$h$在$(Y,\mathscr{B}(Y))$上导出的概率测度，即$Ph^{-1}(C)\triangleq P(h^{-1}(C))$，$C\in\mathscr{B}(Y)$。

证 设F为Y中的闭集，则有

$$\overline{h^{-1}(F)}\subset D(h)\cup h^{-1}(F). \tag{2.1}$$

于是由假定$P(D(h))=0$知$P(\overline{h^{-1}(F)})=P(h^{-1}(F))$。再由假定$P_n \xrightarrow{w} P$及定理 2.4 知：

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_n h^{-1}(F) &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_n(h^{-1}(F))\\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, P_n(\overline{h^{-1}(F)})\leqslant P(\overline{h^{-1}(F)})\\ &= P(h^{-1}(F)) = Ph^{-1}(F)\end{aligned}$$

这表明$P_n h^{-1} \xrightarrow{w} Ph^{-1}$（见定理 2.4）。证毕

下一命题是上一命题的重要推论。它使我们对测度的弱收敛有了更进一步的认识。

2.8 命题 设(X,ρ)为一距离空间，$P,P_1,P_2,\cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的概率测度。若$P_n \xrightarrow{w} P$，则对一切P-连续的有界 Borel 可测实值函数f，有

$$\lim_{n\to\infty}\int f dP_n = \int f dP.$$

证 设 f 为 X 上的有界 Borel 可测函数，则存在 $a>0$，使 $|f|\leqslant a$，于是 f 为 $(X,\mathscr{B}(X))$ 到 $([-a,a],\ \mathscr{B}([-a,a]))$ 中的可测映射。假定 f 为 P-连续，则由命题 2.7，$P_n f^{-1}\xrightarrow{w}Pf^{-1}$。令 $g(t)=t$，$t\in[-a,a]$，则 g 为 $[-a,\ a]$ 上的有界连续函数. 故由弱收敛的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\int gd(P_n f^{-1})=\int gd(Pf^{-1}).$$

因此，由第三章习题 1.15 知(注意 $gof=f$)

$$\lim_{n\to\infty}\int fdP_n=\int fdP$$

命题证毕。

2.9 注 设 X 为 m 维欧氏空间 R^m，P 为 $\mathscr{B}(R^m)$ 上的概率测度，令

$$F(x)=P\{y:\ y\leqslant x\},\ x\in R^m$$

称 F 为与概率测度 P 相应的**分布函数**。设 $x\in R^m$，则易知下述两断言等价：(1)F 在 x 处连续；(2)集合 $\{y:\ y\leqslant x\}$ 为 P-连续集，因此，若 $P_n\xrightarrow{w}P$，则对 F 的一切连续点 x，有 $F_n(x)\to F(x)$ (见命题 2.4(5))。这里 F_n 为与 P_n 相应的分布函数。反之，设对 F 的一切连续点 x，有 $F_n(x)\to F(x)$，则由 Helly-Bray 定理知：对 R^m 上一切有界连续函数 f，有

$$\lim_{n\to\infty}\int fdF_n=\int fdF$$

即有 $P_n\xrightarrow{w}P$。因此，R^m 上分布函数的弱收敛与相应的概率测度的弱收敛是等价的。这表明：距离空间上的概率测度的弱收敛概念是欧氏空间中分布函数弱收敛概念的自然推广。

习题

2.10 证明命题 2.7 的如下推广：设 (X,ρ) 及 (Y,d) 为两个

距离空间，$P, P_1, P_2, \cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的概率测度，且$P_n \xrightarrow{w} P$。又设h，h_1，h_2，…为X到Y中的Borel可测映射，如果存在X中的Borel可测集B，B_1，B_2，…，使得下列条件被满足：

(1) $P(B^c)=0$，$P_n(B_n^c)=0$，$n=1, 2, \cdots$；

(2) $x_n \in B_n$，$x \in B$，$\rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow h_n(x_n) \to h(x)$。

则$P_n h_n^{-1} \xrightarrow{w} Ph^{-1}$。

2.11 证明(2.1)式。

2.12 设(X, ρ)为距离空间，A为X的一子集，P为$\mathscr{B}(X)$上的一概率测度，则为要A为P-连续的，必须且只需A的示性函数I_A为P-连续函数。

§3 胎紧(Tightness)与Prohorov定理

在本节中，我们恒假定(X,ρ)为可分距离空间。我们用$\mathscr{P}(X)$表示$\mathscr{B}(X)$上概率测度全体，这时，我们可以在$\mathscr{P}(X)$上引入距离d，使得按距离d收敛等价于上一节定义的测度弱收敛。本节的主要任务在于给出$(\mathscr{P}(X), d)$中相对紧集的一个刻画。

3.1 命题 在$\mathscr{P}(X)$上可以引入距离d，使得$P_n \xrightarrow{w} P \Leftrightarrow d(P_n, P) \to 0$。

证 由于(X, ρ)是可分距离空间，由*Tychonoff*嵌入定理，X与一紧距离空间(Y, ρ')的某一子空间同胚。我们不妨设X为该子空间，于是距离ρ'限于X与ρ等价。令$\bar{X}$为X在(Y,ρ')中的闭包，则$(\bar{X}, \rho')$为紧空间，且为可分的。从而$C(\bar{X})$为可分Banach空间(见第五章习题5.12)，这里$C(\bar{X})$表示$\bar{X}$上连续函数全体(即有界连续函数全体)。另一方面，令$\mathscr{U}_{\rho'}(X)$表示X上按距离ρ'一致连续的有界函数全体，则易知：为要$f \in \mathscr{U}_{\rho'}(X)$，当且仅当存在$\bar{f} \in C(\bar{X})$，使$f$为$\bar{f}$在$X$上的限制。这时还有$\|f\|$

$=\|\bar{f}\|$，因此，$\mathscr{U}_{\rho'}(X)$与$C(\bar{X})$同构，从而$\mathscr{U}_{\rho'}(X)$可分。令$\{f_1,f_2,\cdots\}$为$\mathscr{U}_{\rho'}(X)$的可数稠子集。对P，$Q\in\mathscr{P}(X)$，令

$$d(P,Q)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}(1\wedge|\int f_j dP-\int f_j dQ|)$$

则d为$\mathscr{P}(X)$上的距离，且由定理2.4知$d(P_n,P)\to 0\Leftrightarrow P_n\xrightarrow{w}P$。证毕。

3.2 注 若X为一Polish空间，则可证明$\mathscr{P}(X)$按测度弱收敛拓扑也是Polish空间。由于下面不需要这一结果，我们不在这里给出它的证明。

设$\wedge$为$\mathscr{P}(X)$的一子集，称$\wedge$为**相对紧的**，如果$\wedge$的闭包$\overline{\wedge}$为$\mathscr{P}(X)$中的紧集。下面我们将给出$\mathscr{P}(X)$中相对紧集的刻画。为此，先引进一个胎紧的概念。

3.3 定义 设$\wedge$为$\mathscr{P}(X)$的一子集，如果对任给$\varepsilon>0$，存在X的一紧子集K，使得$\inf\{P(K): P\in\wedge\}\geqslant 1-\varepsilon$，则称$\wedge$为胎紧的(*Tight*)。

3.4 定理 (Prohorov)设$\wedge\subset\mathscr{P}(X)$

(1) 若$\wedge$是胎紧的，则$\wedge$在$\mathscr{P}(X)$中是相对紧的；

(2) 反之，若进一步X是Polish空间(即存在一与ρ等价的距离ρ'，使(X,ρ')为完备的)，则$\wedge$的相对紧性蕴含$\wedge$的胎紧性。

证 (1)首先，将X嵌入到一紧距离空间(Y,ρ')中，并令$\bar{X}$为X在(Y,ρ')中的闭包(见命题3.1的证明)。则$(\bar{X},\rho')$为紧空间。现设$\wedge$为胎紧的，令(P_n)为$\wedge$中的一序列，要证存在子列(P_{n_k})，使$P_{n_k}\xrightarrow{w}$某P。(这等价于$\wedge$的相对紧性，因为$\mathscr{P}(X)$是可分距离空间.)对$A\in\mathscr{B}(\bar{X})$，令

$$Q_n(A)=P_n(A\cap X),$$

则易知 Q_n 为$(\overline{X}, \mathscr{B}(\overline{X}))$上的测度(注意 $\mathscr{B}(X)=X\cap\mathscr{B}(\overline{X})$)。设$\{f_1, f_2, \cdots\}$为$C(\overline{X})$的一可数稠子集,我们不妨设 $f_1(x)=1$, $\forall x\in\overline{X}$。用对角线法则,可选取(Q_n)的子列 (Q_{n_k}),使得对每个 $j=1, 2, \cdots$,有下述极限存在(且有穷):

$$\lim_{k\to\infty}\int f_j dQ_{n_k}=l(f_j) \tag{3.1}$$

l可唯一扩张成为$C(\overline{X})$上的一正线性泛函。由于$l(1)=1$,故由 Riesz 表现定理,存在 $Q\in\mathscr{P}(\overline{X})$,使对一切 $f\in C(\overline{X})$,有$Q(f)=l(f)$。于是由(3.1)不难看出,$Q_{n_k}\xrightarrow{w}Q$。下面我们将证明:

存在 $P\in\mathscr{P}(X)$,使 $P_{n_k}\xrightarrow{w}P$。

由于假定$\wedge$是胎紧的,故对每个 $m=1, 2, \cdots$,存在 X 的紧子集 K_m(从而也是$\overline{X}$的紧子集),使得 $P_{n_k}(K_m)>1-\dfrac{1}{m}$, $k=1, 2, \cdots$;显然有 $Q_{n_k}(K_m)=P_{n_k}(K_m)$。于是有(注意 $Q_{n_k}\xrightarrow{w}Q$)

$$Q(K_m)\geqslant\overline{\lim_{k}}\ Q_{n_k}(K_m)\geqslant 1-\frac{1}{m},\quad m=1,2,\cdots,$$

令 $X_0=\bigcup\limits_m K_m$。则 $Q(X_0)=1$。令

$$P(A)=Q(A\cap X_0),\quad A\in\mathscr{B}(X)$$

则 $P\in\mathscr{P}(X)$,且 $P(X_0)=1$。设 F 为 X 中的闭集,则存在 $\overline{X}$ 中的闭集 A,使 $F=A\cap X$。于是我们有

$$\begin{aligned}P(F)&=P(A\cap X)=P(A\cap X_0)\\&=Q(A\cap X_0)=Q(A)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\ Q_{n_k}(A)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ P_{n_k}(A\cap X)\\&=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ P_{n_k}(F).\end{aligned}$$

故由定理 2.4 知，$P_{n_k}\xrightarrow{w}P$。(1)得证。

(2) 不妨设(X,ρ)本身是完备的。设$\wedge$是$\mathscr{P}(X)$中的相对紧集.对任给$\delta>c$，因 X 是可分的，故存在可数多个直径为δ的开球$A_1,A_2,\cdots$，使得$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=X$。令$B_n=\bigcup\limits_{i\leq n}A_i$，则对任给$\varepsilon>0$，存在$n$，使得$inf\{P(B_n):\ P\in\wedge\}\geqslant 1-\varepsilon$。因为，如果不然的活，对每个$n$，存在$P_n\in\wedge$，使$P_n(B_n)<1-\varepsilon$。由$(P_n)$的相对紧性知，有子列$(P_{n_k})$，使$P_{n_k}\xrightarrow{w}P$。这时有(注意$B_n$为开集，且$B_n\uparrow$)

$$P(B_n)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}P_{n_k}(B_n)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}P_{n_k}(B_{n_k})\leqslant 1-\varepsilon.$$

但$B_n\uparrow X$，由上式得$P(X)\leqslant 1-\varepsilon$，这不可能。由上所证，给定$\varepsilon>0$，对每个$k=1,2,\cdots$，存在有限多个直径为$\frac{1}{k}$的开球$A_{k1},\cdots,A_{kn_k}$，使得$\inf\left\{P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}A_{ki}\right):\ P\in\wedge\right\}\geqslant 1-\frac{\varepsilon}{2^k}$。如果令$K$为全有界集$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}A_{ki}$的闭包，则$K$为紧集(因$(X,\rho)$是完备的)，且有$\inf\{P(K):\ P\in\wedge\}\geqslant 1-\varepsilon$。依定义，$\wedge$是胎紧的，(2)得证。

习题

3.5 设$(P_n)\subset\mathscr{P}(X)$。若$(P_n)$为相对紧的，且只有唯一的极限点$P$，则$P_n\xrightarrow{w}P$。

§4 局部紧 Hausdorff 空间上 Radon 测度的淡收敛

4.1 定义 设 X 为一局部紧 Hausdorff空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为$\mathscr{B}(X)$上的 Radon 测度。如果对一切 $f\in C_c(X)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

则称(μ_n)**淡收敛于** μ，记为 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$.(我们将英文"Vague Convergence"译为淡收敛)。

由 Riesz 表现定理知，淡收敛的极限是唯一的。

4.2 命题 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mu_1,\mu_2,\cdots$为$\mathscr{B}(X)$上的 Radon 测度。如果对一切 $f\in C_c(X)$，下述极限存在且有穷：

$$\lim_{n\to\infty}\int fd\mu_n=l(f) \tag{4.1}$$

则在存 $\mathscr{B}(X)$上唯一的 Radon 测度 μ，使得$\mu_n\xrightarrow{v}\mu$.

证 l 为 $C_c(X)$上的正线性泛函，故由 Riesz 表现定理，存在唯一的 Radon 测度 μ，使对一切 $f\in C_c(X)$，有 $l(f)=\mu(f)$。故由(4.1)知 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$，证毕。

4.3 引理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，μ 为 $\mathscr{B}(X)$上一 Radon 测度，则对任一紧集 K，存在一包含 K 的 μ-连续紧集.

证 由第五章习题 1.38 知，存在一列紧集(K_n)，使 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$，$n\geqslant1$，且 $X=\bigcup_n K_n$。于是存在某个 n，使 $K\subset\mathring{K}_n$.令ρ为 X 上与拓扑相容的距离(见第五章习题 1.40)，则存在 $\delta>0$，使 $\{x:\ \rho(x,K)\leqslant\delta\}\subset\mathring{K}_n$。令$F_t=\{x:\ \rho(x,K)\leqslant t\}$，则 $\partial F_t\subset\{x:$

$\rho(x,K)=t\}$。由于 $\partial F_t\cap\partial F_s=\phi$，$t\neq s$，且 $\partial F_t\subset\mathring{K}_s$，$0<t\leqslant\delta$，故存在某 $t_0\in(0,\delta)$，使 $\mu(\partial F_{t_0})=0$（注意 $\mu(\mathring{K}_s)\leqslant\mu(K_s)<\infty$）。于是 F_{t_0} 为包含 K 的 μ-连续紧集。证毕。

4.4 定理 设 X 为一局部紧 Hausdorff 空间，$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为 $\mathscr{B}(X)$ 上的 Radon 测度。考虑下列命题：

(1) $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$；

(2) 对一切紧集 K，有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(K)\leqslant\mu(K)$，对一切相对紧开集 G，有 $\mu(G)\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G)$；

(3) 对一切 μ-连续相对紧 Borel 集 B，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)=\mu(B)$，

则有(1)⇒(2)⇒(3)。进一步，若 X 为具可数基的，则上述三命题等价。

证 (1)⇒(2)。设 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$，K 为紧集。对任给 $\varepsilon>0$，由 μ 的正则性，存在开集 $U\supset K$，使 $\mu(U)<\mu(K)+\varepsilon$。于是由第五章命题 1.20.(2)，存在 $f\in C_c(X)$，使得 $I_K\leqslant f\leqslant I_U$。因此我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(K)\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mu(f)\leqslant\mu(U)<\mu(K)+\varepsilon。$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(K)\leqslant\mu(K)$。现设 G 为相对紧开集。对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset G$，使 $\mu(G)<\mu(K)+\varepsilon$。取 $f\in C_c(X)$，使 $I_K\leqslant f\leqslant I_G$，则有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\mu(f)\geqslant\mu(K)>\mu(G)-\varepsilon。$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$。

(2)⇒(3)由下式看出（注意 $\overline{B}$ 为紧集，$\mathring{B}$ 为相对紧开集）

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(B)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\bar{B})\leqslant\mu(\bar{B})=\mu(\mathring{B})$$

$$\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(\mathring{B})\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\mu_n(B).$$

现在假定 X 为具可数基的局部紧Hausdorff空间．为证(1)，(2)及(3) 等价，只需证(3)⇒(1)。设(3)成立，令 $f\in C_c(X)$，由引理4.3，存在 μ- 连续紧集 C,使 $C\supset\operatorname{supp}(f)$。令

$$\nu_n(B)=\mu_n(B\cap C),\ \ \nu(B)=\mu(B\cap C),$$

则对任何 ν-连续集 B，易知 $B\cap C$ 为 μ- 连续集(注意 $\partial(B\cap C)=\overline{B\cap C}\setminus\mathring{B}\cap\mathring{C}\subset\bar{B}\cap C\setminus\mathring{B}\cap\mathring{C}\subset(\partial B\cup\partial C)\cap C=(\partial B\cap C)\cup\partial C)$，从而由(3)知

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n(B)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(B\cap C)=\mu(B\cap C)=\nu(B).$$

故由命题 2.4 知 $\nu_n\xrightarrow{w}\nu$(注意：X 为可距离化空间)．因此有(注意：$\operatorname{supp}(f)\subset C$)

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(f)=\nu(f)=\mu(f).$$

由于 $f\in C_c(X)$是任意的，故依定义有 $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$。定理证毕．

下一命题用弱收敛来刻画淡收敛．

4.5 命题 设 X 为一具可数基的局部紧Hausdorff空间，μ_1，μ_2，…为 $\mathscr{B}(X)$上的 Radon 测度。令(G_k)为一列相对紧开集，使 $G_k\uparrow X$．((G_k)的存在性见第五章习题1.38.)任取 $f_k\in C_C(X)$，使 $I_{G_k}\leqslant f_k\leqslant 1$．(见第五章命题 1.20.(2).)令 $\nu_{k,n}=f_k\cdot\mu_n$．则下列二断言等价：

(1) $\mu_n\xrightarrow{v}$某 μ；

(2) $\forall k$，$\nu_{k,n}\xrightarrow{w}$某 ν_k，$(n\to\infty)$．

此外，这时有 $\nu_k=f_k\cdot\mu$．

证 (1)⇒(2)显然。现证(2)⇒(1)。设(2)成立，令 $f\in C_c(X)$，则由于 supp(f)为紧集，故存在某 k_0，使 supp(f)$\subset G_{k_0}$，从而有 $ff_{k_0}=f$。因此，下述极限存在且有穷

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(f)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(ff_{k_0})=\lim_{n\to\infty}\nu_{k_0,n}(f)$$

故由命题 4.2 知，(μ_n)淡收敛于某 Radon 测度 μ，命题最后一断言显然。证毕。

作为命题 4.5 的一个重要推论，我们得到 Radon测度的集合关于淡收敛拓扑为相对紧的准则。

4.6 定理 设 X 为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间，M 为 $\mathscr{B}(X)$上的一族 Radon 测度，则为要M关于淡收敛拓扑为相对紧的(即 M 中的任一序列有淡收敛子列)，必须且只需对任何紧集 K，有 $\sup\limits_{\mu\in M}\mu(K)<\infty$。

证 由定理 4.4 知，条件的必要性显然。现证充分性。设对任何紧集 K，有 $\sup\limits_{\mu\in M}\mu(K)<\infty$。令$(G_k)$为一列相对紧开集，使 $G_k\uparrow X$，$f_k\in C_C(X)$，使 $I_{G_k}\leqslant f_k\leqslant 1$。对 $\mu\in M$，令 $\widetilde{\mu_k}=f_k\cdot\mu$。则对每个 k，对每个 $\mu\in M$，$\widetilde{\mu_k}$ 在紧集 supp(f_k)的余集上为c. 又由于 $\sup\limits_{\mu\in M}\widetilde{\mu_k}(X)<\infty$，故由 Prohorov 定理(定理 3.4)易知：每个 $\widetilde{M}_k=\{\widetilde{\mu_k}:\ \mu\in M\}$按弱收敛拓扑是相对紧的(参见引理 2.2)。现设$(\mu_n)$为 M 中的一序列，则用对角线法则，可选(μ_n)的一子列(μ_{n_j})，使得对一切 $k=1,2,\cdots$，

$$f_k\cdot\mu_{n_j}\xrightarrow{w}\text{某 }\mu_k,\quad (j\to\infty)$$

故由命题 4.5 知，$\mu_{n_j}\xrightarrow{v}$某 μ。这表明M按淡收敛拓扑是相对紧

的。证毕。

为了进一步研究Radon测度的淡收敛，我们需要下述引理。

4.7 引理 设X为一具可数基的局部紧Hausdorff空间，令B为一紧集(相应地，开集)。则存在紧集(相应地，相对紧开集)B_n，及$f_n \in C_C(X)$，$n \geqslant 1$，使得

$I_B \leqslant f_n \leqslant I_{B_n} \downarrow I_B$(相应地，$I_B \geqslant f_n \geqslant I_{B_n} \uparrow I_B$)。

证 令G_n为相对紧开集，使$G_n \uparrow X$.((G_n)的存在性见第五章习题1.38.)设B为紧集，则存在某n_0，使$B \subset G_{n_0}$。令ρ为X上与拓扑相容的距离，令

$$B^\varepsilon = \{x: \rho(x, B) \leqslant \varepsilon\}$$

则当$\varepsilon > 0$足够小，有$B^\varepsilon \subset G_{n_0}$。令$B_n = B^{\frac{\varepsilon}{n}}$，$n \geqslant 1$，令

$$f_n(x) = 1 - \frac{n}{\varepsilon}\left(\rho(x, B) \wedge \frac{\varepsilon}{n}\right),$$

则$f_n \in C_C(X)$，$I_B \leqslant f_n \leqslant I_{B_n} \downarrow I_B$。对相对紧开集$B$，类似可证引理结论。对一般开集$B$，可考虑相对紧开集$G_n$。我们将证明细节留给读者作为习题。

下一定理表明：淡收敛拓扑是可以距离化的。

4.8 定理 设X为一具可数基的局部紧Hausdorff空间，令$\mathscr{R}(X, \mathscr{B}(X))$表示$\mathscr{B}(X)$上Radon测度全体，则可在$\mathscr{R}(X, \mathscr{B}(X))$上引进距离$d$，使$(\mathscr{R}, d)$为可分完备距离空间，且使$\mu_n \xrightarrow{v} \mu \Leftrightarrow d(\mu_n, \mu) \to 0$。换句话说，$\mathscr{R}$按淡收敛拓扑为Polish空间。

证 设$\mathscr{C}$为X的可数基，不妨设$\mathscr{C}$对有限并封闭，且$\mathscr{C}$中的元为相对紧的.由引理4.7，对$C \in \mathscr{C}$，存在$g_n \in C_C(X)$，使$0 \leqslant g_n \uparrow I_C$。由于$\mathscr{C}$中元素是可数的，我们可以把相应于所有$C \in \mathscr{C}$的序列$(g_n)$排列为$f_1, f_2, \cdots$，则Radon测度$\mu$显然由$\{\mu(f_k), k = 1, 2, \cdots\}$唯一决定(因为后者决定了$\mu$在$\mathscr{C}$上的值)。

由定理 4.6 容易证明：$\mu_n \xrightarrow{v}$ 某μ，当且仅当对一切 $k \geq 1$，$\mu_n(f_k)$收敛于某实数 c_k。于是若令

$$d(\mu,\mu') = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}[1 - \exp(-|\mu(f_k) - \mu'(f_k)|)], \mu,\mu' \in \mathscr{R}.$$

则 d 为$\mathscr{R}$ 上的距离，且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu \Leftrightarrow d(\mu_n,\mu) \to 0$。此外，容易验证$(\mathscr{R},d)$为可分完备距离空间。证毕。

习题

4.9 补足引理 4.7 及定理 4.8 的证明细节。

4.10 设 X 为一具可数基局部紧 Hausdorff 空间，μ，μ_1，μ_2，…为 $\mathscr{B}(X)$上的 Radon 测度，且 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$。则对任何有紧支撑的$\mu$-连续有界 Borel 可测函数 f，有 $\mu_n(f) \to \mu(f)$。(提示：利用命题 4.5 及命题 2.8.)

4.11 设 X 为一具可数基局部紧 Hausdorff 空间，μ，μ_1，μ_2，…为 $\mathscr{B}(X)$上的有限测度(从而为 Radon 测度)。则下列断言等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$；

(2) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$，且 $\mu_n(X) \to \mu(X)$；

(3) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$，$\inf\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(K^c)$：$K$ 为紧集$\} = 0$。

第七章　概率论基础选讲

由于本书不是一部概率论教材，我们不打算系统介绍概率论的内容。本章着重介绍与测度论有关的一些重要的概率论基础问题。

§1　事件和随机变量的独立性

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间。在概率论中，我们称$\mathscr{F}$中的集为**事件**，Ω上的$\mathscr{F}$-可测函数称为**随机变量**。设ξ为一随机变量，若ξ关于P的积分存在，则称积分$\int \xi dP$为ξ的**数学期望**，记为$E[\xi]$.概率为1成立的性质称为**几乎必然**成立，简称为$a \cdot s.$成立。

事件的独立性概念是概率论的最重要的概念之一。

1.1 定义　设A，B为二事件，称A与B**独立**，是指

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

更一般地，设A_1，A_2，…，A_n为事件，称$(A_1, A_2, \cdots, A_n))$相互独立，是指对任何$m \leqslant n$及$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n$，有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{m} P(A_{k_j}).$$

注意：两两独立不蕴含相互独立。

1.2 定义　设$\mathscr{D} = \{A_t, t \in T\}$为一族事件.如果对$T$的任何非空有限子集$S$，有$P\left(\bigcap_{s \in S} A_s\right) = \prod_{s \in S} P(A_s)$，则称$\mathscr{D}$中事件相互独立。设$\{\mathscr{C}_t, t \in T\}$为一族事件类，如果从每个事件类$\mathscr{C}_t$中任

取一事件 A_t，$\{A_t, t\in T\}$ 中事件相互独立，则称 $\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为**独立(事件)类**。

1.3 定理 (独立类的扩张) 设 $\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为一独立事件类，如果每个 $\mathscr{C}_t$ 为 π-类，则 $\{\sigma(\mathscr{C}_t), t\in T\}$ 为独立事件类。

证 不妨设 Ω 属于每个 $\mathscr{C}_t$(因为添加事件 Ω 不影响独立性)。设 $S=\{s_1, \cdots, s_n\}$ 为 T 的有限子集，且 $n\geqslant 2$。令

$$\mathscr{D}=\Big\{A\in\mathscr{F}: P\Big(A\cap\bigcap_{j=2}^{n} C_j\Big)=P(A)\cdot\prod_{j=2}^{n}P(C_j),\quad \forall C_j\in\mathscr{C}_{s_j},\ 2\leqslant j\leqslant n\Big\}$$

则易见 $\mathscr{D}\supset\mathscr{C}_{s_1}$，且 $\mathscr{D}$ 为 λ-类，故由单调类定理知 $\mathscr{D}\supset\sigma(\mathscr{C}_{s_1})$。这表明 $\{\sigma(\mathscr{C}_{s_1}), \mathscr{C}_{s_2}, \cdots, \mathscr{C}_{s_n}\}$ 为独立事件类。依此类推，$\{\sigma(\mathscr{C}_{s_1}), \sigma(\mathscr{C}_{s_1}), \cdots, \sigma(\mathscr{C}_{s_n})\}$ 为独立事件类。由于 S 为 T 的任意非空有限子集，故 $\{\sigma(\mathscr{C}_t), t\in T\}$ 为独立事件类。证毕。

1.4 定义 设 $\{\xi_t, t\in T\}$ 为一族随机变量。若 $\{\sigma(\xi_t), t\in T\}$ 为独立事件类，则称 $\{\xi_t, t\in T\}$ **相互独立**。

下一命题给出了随机变量相互独立性的判别准则。

1.5 命题 设 $\{\xi_t t\in T\}$ 为一族随机变量，则为要它们相互独立，必须且只需对 T 的任一有限子集 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$，$(n\geqslant 2)$ 及 $x_1,\cdots,x_n\in R$，有

$$P(\xi_{s_1}\leqslant x_1, \cdots, \xi_{s_n}\leqslant x_n)=\prod_{j=1}^{n}P(\xi_{s_j}\leqslant x_j).$$

证 令 $\mathscr{C}_t=\{[\xi_t\leqslant x], x\in R\}$，$t\in T$，则 $\mathscr{C}_t$ 为 π-类。于是由定理 1.3 立刻推得命题的结论。

下一定理称为 *Borel-Cantelli* 引理，它在概率论中非常有用。

1.6 定理 设 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 为一列事件。

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$，则 $P(A_n,\ i.o)=0$；

(2) 反之，若$\{A_n,\ n\geq 1\}$为相互独立，则 $P(A_n,\ i.o.)=0$ 蕴含$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$。

这里$(A_n, i.o.)$表示$\{A_n,\ n\geq 1\}$中有无穷多个事件发生的事件($i.0.$ 是 infinitely often 的缩写)，即有 $(A_n,\ i.0.)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$。

证 (1) 对一切$k\geq 1$，我们有$(A_n,\ i.0.)\subset\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$。设 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$，则

$$P(A_n, i.0.)\leqslant P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}P(A_n)\to 0,\ (k\to\infty).$$

(1) 得证。

(2) 设$\{A_n,\ n\geq 1\}$相互独立. 假定$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$。则对任何 $m>k$ 有(注意：$1-x\leqslant e^{-x}$，$\forall 0\leqslant x\leqslant 1$)

$$\begin{aligned}1-P\left(\bigcup_{n=k}^{m}A_n\right)&=P\left(\left(\bigcup_{n=k}^{m}A_n\right)^c\right)=P\left(\bigcap_{n=k}^{m}A_n^c\right)\\&=\prod_{n=k}^{m}P(A_n^c)=\prod_{n=k}^{m}(1-P(A_n))\\&\leqslant\exp\left\{-\sum_{n=k}^{m}P(A_n)\right\}.\end{aligned}$$

因此，对一切 $k\geqslant 1$，有

$$0\leqslant 1-P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1-\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcup_{n=k}^{m}A_n\right)$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\exp\left\{-\sum_{n=k}^{m}P(A_n)\right\}=0.$$

从而有

$$P(A_n,i.o.)=P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=\lim_{k\to\infty}P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)=1.$$

这从反面证明了(2)．证毕。

1.7 系(Borel 0-1 律) 设 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 为相互独立事件，则依 $\sum_n P(A_n)<\infty$ 或 $=\infty$ 而有 $P(A_n,\ i.o.)=0$ 或 1。

1.8 定义 设 $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ 为一列随机变量，令

$$\mathscr{D}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma\{\xi_j,\ j>n\}$$

称 $\mathscr{D}$ 为 $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ 的**尾 σ-代数**。$\mathscr{D}$ 中的元称为 $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ 的**尾事件**。

下一定理通常称为 Kolmogrov **0-1 律**。

1.9 定理 独立随机变量序列的尾事件有概率 0 或 1。

证 设 $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ 为独立随机变量序列。对任何 $n\geqslant 1$，由定理 1.3 知：$\sigma(X_j,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 与 $\sigma(X_j,\ j>n)$ 独立。从而 $\sigma(\xi_j,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 与 $\mathscr{D}$ 独立($\mathscr{D}$ 是尾 σ-代数)．令 $\mathscr{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\xi_j,1\leqslant j\leqslant n)$，则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{D}$ 独立。但 $\mathscr{A}$ 为 π-类，故由定理 1.3 知 $\sigma(\mathscr{A})$ 与 $\mathscr{D}$ 独立。显然 $\mathscr{D}\subset\sigma(\mathscr{A})=\sigma(\xi_j,\ j\geqslant 1)$，故 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}$ 独立。于是对任何 $D\in\mathscr{D}$，我们有 $P(D)=P(D\cap D)=P(D)^2$，从而 $P(D)=0$ 或 1，证毕。

习题

1.10 设$(X_n, n\geqslant 1)$为独立随机变量序列，则

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}} X_n$ 为退化随机变量（即几乎处处为常数）；

(2) 为要$P(X_n\to 0)=1$，必须且只需对任何$C>0$，有$\sum_n P(|X_n|>C)<\infty$。(提示：利用 Borel-Cantelli 引理)。

1.11 设$(X_i, 1\leqslant i\leqslant n)$为独立随机变量序列。若每个$X_i$非负或可积，则有

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

(提示：从简单随机变量过渡到非负随机变量)。

1.12 设$(X_n, n\geqslant 1)$为独立实值随机变量序列，$(g_n, n\geqslant 1)$为一列 *Borel* 可测函数，则$(g_n(X_n), n\geqslant 1)$为独立随机变量序列。

1.13 (测度的卷积) 设$\mu_1, \cdots, \mu_n$为$(R^p, \mathscr{B}(R^p))$上的测度。令$g(x_1, \cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i\in R^p$，(这里是向量相加)。则g为R^{np}到R^p上的 Borel 可测映射。令$\mu_1*\cdots*\mu_n=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)g^{-1}$。(见第三章习题 1.1.5)称$\mu_1*\cdots*\mu_n$为$\mu_1,\cdots\mu_n$的卷积。

设$X_1,\cdots X_n$为相互独立的实值随机变量，令$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$。试证：(1)$PY^{-1}=PX_1^{-1}*\cdots*PX_n^{-1}$。(2)$Y$的分布函数为$X_i$的分布函数$(1\leqslant i\leqslant n)$的卷积(函数卷积的定义见第四章习题 2.15)。

1.14 设X及Y为相互独立可积随机变量，且$EX=0$，则$E[|X+Y|]\geqslant E[|Y|]$。(提示：$|y|=|E(y+X)|\leqslant E|y+X|$。)

§ 2 条件数学期望与条件独立性

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-代数。设X为数学期望存在的随机变量，令$\nu = X.P$为X关于P的不定积分，即

$$\nu(A) = \int_A X dP, \quad A \in \mathscr{F}$$

则ν为符号测度，且ν关于P绝对连续。现将ν及P都限于$(\Omega, \mathscr{G})$，则仍有$\nu \ll P$。令Y为ν关于P在$(\Omega, \mathscr{G})$上的 Radon-Nikodym 导数(见第三章定理 3.11)，则Y为$\mathscr{G}$-可测随机变量，且有

$$\int_A Y dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathscr{G} \tag{2.1}$$

我们称随机变量Y为X关于$\mathscr{G}$的**条件(数学)期望**。由第三章命题 1.8 知：在P-等价意义下，条件期望Y是唯一确定的，且由(2.1)所刻画，我们把它记为$E[X|\mathscr{G}]$。

若$B \in \mathscr{F}$，$X = I_B$，我们令$P[B|\mathscr{G}] = E[I_B|\mathscr{G}]$，并称$P[B|\mathscr{G}]$为$B$关于$\mathscr{G}$的**条件概率**。

2.1 定理 条件期望有如下基本性质：

(1) $E[E[X|\mathscr{G}]] = E[X]$；

(2) 若X为$\mathscr{G}$-可测，则$E[X|\mathscr{G}] = X$, $a.s.$；

(3) 设$\mathscr{G} = \{\phi, \Omega\}$，则$E[X|\mathscr{G}] = E[X]$, $a.s.$；

(4) $E[X|\mathscr{G}] = E[X^+|\mathscr{G}] - E[X^-|\mathscr{G}]$, $a.s.$；

(5) $X \geqslant Y \ a.s. \Rightarrow E[X|\mathscr{G}] \geqslant E[Y|\mathscr{G}] \ a.s.$；

(6) 设c_1，c_2为实数，X, Y，$c_1X + c_2Y$的期望存在，则$E[c_1X + c_2Y|\mathscr{G}] = c_1E[X|\mathscr{G}] + c_2E[Y|\mathscr{G}]$, $a.s.$，如果右边和式$a.s.$有意义；

(7) $|E[X|\mathscr{G}]| \leqslant E[|X||\mathscr{G}]$, $a.s.$；

(8) 设 $0\leqslant X_n\uparrow X, a.s$，则 $E[X_n|\mathscr{G}]\uparrow E[X|\mathscr{G}], a.s.$；

(9) 设 X 及 XY 的期望存在，且 Y 为 $\mathscr{G}$-可测，则

$$E[XY|\mathscr{G}]=YE[X|\mathscr{G}],\ a.s; \tag{2.2}$$

(10) （**条件期望的平滑性质**）设 $\mathscr{G}_1$，$\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，且 $\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$，则

$$E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1]=E[X|\mathscr{G}_1],\ a.s.. \tag{2.3}$$

证 (1)—(7)容易由条件期望的定义直接看出。

(8) 由(5)知，$E[X_n|\mathscr{G}]\uparrow Y$，$a.s.$，$Y$ 为一 $\mathscr{G}$-可测随机变量，于是，对一切 $B\in\mathscr{G}$，

$$\int_B YdP=\lim_{n\to\infty}\int_B E[X_n|\mathscr{G}]\,dP=\lim_{n\to\infty}\int_B X_n dP$$
$$=\int_B XdP,$$

从而 $Y=E[X|\mathscr{G}]$，$a.s.$.

(9) 不妨设 X 及 Y 皆为非负随机变量。首先设 $Y=I_A$，$A\in\mathscr{G}$，则 $YE[X|\mathscr{G}]$ 为 $\mathscr{G}$-可测，且对一切 $B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B YE[X|\mathscr{G}]dP=\int_{A\cap B}E[X|\mathscr{G}]dP=\int_{A\cap B}XdP$$
$$=\int_B I_A XdP=\int_B YXdP,$$

故(2.2)成立。然后利用(8)即可由简单随机变量过渡到一般非负随机变量。

(10) 设 $B\in\mathscr{G}_1$，则

$$\int_B E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1]dP=\int_B E[X|\mathscr{G}_2]dP=\int_B XdP$$

故有(2.3).证毕。

关于条件期望，我们也有相应的单调收敛定理，Fatou 引理，控制收敛定理，Hölder 不等式及 Minkowski 不等式。它们的证明与第三章关于积分情形的结果的证明类似。因此，下面我们只叙述结果而略去证明。注意：对概率空间情形，a.s.收敛总

蕴含依概率收敛。

在下面几个定理中，$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子σ-代数。

2.2 定理(单调收敛定理) 设(X_n)为随机变量序列，且每个X_n的期望存在。

(1) 设 $X_n \uparrow X, a.s.$，且 $E[X_1]>-\infty$，则 X 的期望存在，且 $E[X_n|\mathscr{G}] \uparrow E[X|\mathscr{G}]$, $a.s.$;

(2) 设 $X_n \downarrow X$, $a.s.$, 且 $E[X_1]<\infty$，则 X 的期望存在，且 $E[X_n|\mathscr{G}] \downarrow E[X|\mathscr{G}]$, $a.s.$.

2.3 定理(Fatou 引理) 设(X_n)为随机变量序列，且每个X_n的期望存在。

(1) 若存在随机变量 Y，使 $E[Y]>-\infty$，且对每个 $n\geqslant 1$，有 $X_n\geqslant Y$, $a.s.$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\varliminf_{n\to\infty}X_n|\mathscr{G}]\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E[X_n|\mathscr{G}];$$

(2) 若存在随机变量 Y，使 $E[Y]<\infty$，且对每个 $n\geqslant 1$，有 $X_n\leqslant Y$, $a.s.$, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 的期望存在，且有

$$E[\varlimsup_{n\to\infty}X_n|\mathscr{G}]\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}E[X_n|\mathscr{G}].$$

2.4 定理(控制收敛定理)设 $X_n\xrightarrow{a.s.}X$(相应地，$X_n\xrightarrow{p}X$)，若存在非负可积随机变量 Y，使$|X_n|\leqslant Y$, $a.s.$, 则 X 可积，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}E[X_n|\mathscr{G}]=E[X|\mathscr{G}]$, $a.s.$(相应地，$E[X_n|\mathscr{G}]\xrightarrow{p}E[X|\mathscr{G}]$)。

下一定理是控制收敛定理的推广形式。

2.5 定理 设 $X_n\xrightarrow{a.s.}X$, $Y_n\xrightarrow{a.s.}Y$(相应地，$X_n\xrightarrow{p}X$, $Y_n\xrightarrow{p}Y$)，

其中 Y 及每个 Y_n 为非负可积随机变量. 如果对 $n\geqslant 1$, $|X_n|\leqslant Y_n$, $a.s.$ 且 $E[Y_n|\mathscr{G}]\xrightarrow{a.s.}E[Y|\mathscr{G}]$(相应地, $E[Y_n|\mathscr{G}]\xrightarrow{p}E[Y|\mathscr{G}]$), 则有 $E[|X_n-X||\mathscr{G}]\xrightarrow{a.s.}0$(相应地, $E[|X_n-X||\mathscr{G}]\xrightarrow{p}0$), 特别有 $E[X_n\mathscr{G}]\xrightarrow{a.s.}E[X|\mathscr{G}]$(相应地, $E[X_n|\mathscr{G}]\xrightarrow{p}E[X|\mathscr{G}]$).

证 只需考虑 $a.s.$ 收敛情形. 令 $Z_n=Y_n+Y-|X_n-X|$, 则 $Z_n\geqslant 0$, 且 $Z_n\xrightarrow{a.s.}2Y$. 故由 Fatou 引理得

$$2E[Y|\mathscr{G}]\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E[Z_n|\mathscr{G}]=2E[Y|\mathscr{G}]-\varlimsup_{n\to\infty}E[|X_n-X||\mathscr{G}],$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}E[|X_n-X||\mathscr{G}]=0$. 证毕.

2.6 定理(Hölder 不等式)设 $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$E[|XY||\mathscr{G}]\leqslant(E|X|^p|\mathscr{G}])^{1/p}(E[|Y|^q|\mathscr{G}])^{1/q}.$$

2.7 定理(Minkowski 不等式). 设 $p\geqslant 1$, 则

$$(E[|XY|^p|\mathscr{G}]^{1/p}\leqslant(E|X|^p|\mathscr{G}])^{1/p}+(E[|Y|^p|\mathscr{G}])^{1/p}.$$

下面我们将条件期望的概念推广到最一般情形.

2.8 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间, X 为一随机变量, $\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-代数. 若 $E[X^+|\mathscr{G}]-E[X^-|\mathscr{G}]$ $a.s.$ 有定义(即 $P(E[X^+|\mathscr{G}]=\infty,\ E[X^-|\mathscr{G}]=\infty)=0$), 则称 X **关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在**. 并令(约定$\infty-\infty=0$)

$$E[X|\mathscr{G}]=E[X^+|\mathscr{G}]-E[X^-|\mathscr{G}].$$

我们称 $E[X|\mathscr{G}]$为 **X 关于$\mathscr{G}$的条件期望**.

若$\mathscr{G}=\{\phi,\ \Omega\}$, 则 X 关于$\mathscr{G}$的条件期望存在, 当且仅当 X 的期望存在. 此外, 任何$\mathscr{G}$可测的随机变量 X 关于$\mathscr{G}$ 的条件期望存在, 且 $E[X|\mathscr{G}]=X$, $a.s.$.

下一定理给出了条件期望存在的随机变量的一个有用刻画。

2.9 定理 下列二断言等价：

(1) X关于$\mathscr{G}$的条件期望存在；

(2) 存在$\mathscr{G}$可测实值随机变量ξ，使$|\xi|>0$ $a.s.$，且ξX的期望存在。

证 (1)⇒(2)。设(1)成立。令

$$A=[E[X^+|\mathscr{G}]=\infty],\qquad B=[E[X^-|\mathscr{G}]=\infty],$$

则$P(A\cap B)=0$。令$\eta=I_{A^c}-I_A$，则$|\eta|=1$，η为$\mathscr{G}$-可测，且有$(\eta X)^+=\eta^+X^++\eta^-X^-$，故有

$$E[(\eta X)^+|\mathscr{G}]=I_{A^c}E[X^+|\mathscr{G}]+I_AE[X^-|\mathscr{G}]<\infty, a.s.$$

令$\xi=\dfrac{\eta}{1+E[(\eta X)^+|\mathscr{G}]}$，则$E[(\xi X)^+|\mathscr{G}]<1$，$a.s.$，特别，$E(\xi X)^+<1$，于是$\xi X$的期望存在。

(2)⇒(1)由下一定理的(1)推得$\left(X=\dfrac{1}{\xi}(\xi X)\right)$。

下一定理是定理2.1的推广。

2.10 定理 2.8定义的条件期望有下列性质：

(1) 设X关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，则对任何$\mathscr{G}$-可测实值随机变量ξ，ξX关于$\mathscr{G}$的条件期望也存在，且有

$$E[\xi X|\mathscr{G}]=\xi E[X|\mathscr{G}],\ a.s.. \tag{2.4}$$

(2) 设X_1，X_2关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，若X_1+X_2及$E[X_1|\mathscr{G}]+E[X_2|\mathscr{G}]$ $a.s.$有意义，则X_1+X_2关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，且有

$$E[X_1+X_2|\mathscr{G}]=E[X_1|\mathscr{G}]+E[X_2|\mathscr{G}],\ a.s.. \tag{2.5}$$

(3) 设$\mathscr{G}_1$及$\mathscr{G}_2$为$\mathscr{F}$的子σ-代数，且$\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2$，若$X$关于$\mathscr{G}_1$的条件期望存在，则$X$关于$\mathscr{G}_2$的条件期望存在，$E[X|\mathscr{G}_2]$关于$\mathscr{G}_1$的条件期望存在，且有

$$E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1]=E[X|\mathscr{G}_1]. \tag{2.6}$$

证 (1) 我们有 $(\xi X)^+=\xi^+X^++\xi^-X^-$，$(\xi X)^-=\xi^+X^-+\xi^-X^+$。于是有

$$E[(\xi X)^+|\mathscr{G}]=\xi^+E[X^+|\mathscr{G}]+\xi^-E[X^-|\mathscr{G}], \qquad (2.7)$$

$$E[(\xi X)^-|\mathscr{G}]=\xi^-E[X^+|\mathscr{G}]+\xi^+E[X^-|\mathscr{G}]. \qquad (2.8)$$

由于假定 $E[X^+|\mathscr{G}]-E[X^-|\mathscr{G}]$ a.s.有意义，故易见 $E[(\xi X)^+|\mathscr{G}]-E[(\xi X)^-|\mathscr{G}]$ a.s.有意义。因此，ξX 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在，由(2.7)及(2.8)推得(2.4)。

(2) 令 $A=[E[X_1|\mathscr{G}]=-\infty]$，$B=[E[X_2|\mathscr{G}]=-\infty]$，则依假定，$E[X_1|\mathscr{G}]+E[X_2|\mathscr{G}]$ a.s.有意义，故在 A 上 a.s.有 $E[X_2|\mathscr{G}]<\infty$，在 B 上 a.s.有 $E[X_1|\mathscr{G}]<\infty$，于是有

$$I_AE[X_2^+|\mathscr{G}]<\infty,\ a.s.,\quad I_BE[X_1^+|\mathscr{G}]<\infty,\ a.s.. \qquad (2.9)$$

令 $\xi=I_{A\cup B}-I_{A^c\cap B^c}$，则 $|\xi|=1$，ξ 为 $\mathscr{G}$ 可测。记 $Y=\xi(X_1+X_2)$，我们有

$$Y^+\leqslant\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-),$$

于是

$$\begin{aligned}E[Y^+|\mathscr{G}]&\leqslant E[\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-)|\mathscr{G}]\\&=I_{A\cup B}(E[X_1^+|\mathscr{G}]+E[X_2^+|\mathscr{G}])+I_{A^c\cap B^c}(E[X_1^-|\mathscr{G}]\\&\qquad+E[X_2^-|\mathscr{G}])<\infty,\ a.s.\end{aligned} \qquad (2.10)$$

特别，Y 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在。于是由(1)知 X_1+X_2 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在。此外，令

$$Z_1=\xi^+(X_1^++X_2^+)+\xi^-(X_1^-+X_2^-),$$

$$Z_2=\xi^-(X_1^++X_2^+)+\xi^+(X_1^-+X_2^-).$$

则 $Y=Z_1-Z_2$，且由(2.10)知 $E[Z_1|\mathscr{G}]<\infty$，a.s.。令 $\eta=\dfrac{1}{1+E[Z_1|\mathscr{G}]}$，则 $E[\eta Z_1]=E[\eta E[Z_1|\mathscr{G}]]\leqslant1$，因此 ηY 的期望存在。故由(2.4)及定理 2.1.(6)有

$$E[Y|\mathscr{G}]=\frac{1}{\eta}E[\eta Y|\mathscr{G}]$$

$$= \frac{1}{\eta}(E[\eta Z_1|\mathscr{G}] - E[\eta Z_2|\mathscr{G}])$$

$$= \frac{1}{\eta}(\eta E[Z_1|\mathscr{G}] - \eta E[Z_2|\mathscr{G}])$$

$$= E[Z_1|\mathscr{G}] - E[Z_2|\mathscr{G}]$$
$$= \xi(E[X_1|\mathscr{G}] + E[X_2|\mathscr{G}])$$

由此再用(2.4)便得(2.5)。

(3) 设 X 关于$\mathscr{G}_1$的条件期望存在。由定理 2.9 知，存在$\mathscr{G}_1$-可测实值随机变量 ξ，$|\xi|>0$ $a.s.$，且 ξX 的期望存在。由于 ξ 为$\mathscr{G}_2$-可测，故仍由定理 2.9 知，X 关于$\mathscr{G}_2$的条件期望存在，且由(2.4)得

$$E[X|\mathscr{G}_2] = \frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathscr{G}_2].$$

因 $E[\xi X|\mathscr{G}_2]$的期望存在，故由(1)及上式知 $E[X|\mathscr{G}_2]$关于$\mathscr{G}_1$的条件期望存在，且有(利用(2.3))

$$E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1] = \frac{1}{\xi}E[E[\xi X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1]$$

$$= \frac{1}{\xi}E[\xi X|\mathscr{G}_1] = E[X|\mathscr{G}_1].$$

(2.6)得证，证毕。

下面讨论一类特殊的关于$\mathscr{G}$条件期望存在的随机变量。

2.11 定义 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子 σ-代数。一随机变量 X 称为关于$\mathscr{G}$为 σ-可积，如果存在 $\Omega_n \in \mathscr{G}$，$\Omega_n \uparrow \Omega$，使每个 XI_{Ω_n} 为可积随机变量。

下一定理给出了关于$\mathscr{G}$为 σ-可积的随机变量的一个刻画。

2.12 定理 设 X 为一随机变量，则下列断言等价：

(1) X 关于$\mathscr{G}$为 σ-可积；

(2) X 关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，且 $E[X|\mathscr{G}]$ $a.s.$ 有穷；

(3) 存在一$\mathscr{G}$-可测实值随机变量ξ，使$\xi>0$ $a.s.$，且使ξX为可积随机变量。

证 (1)⇒(3).设X关于$\mathscr{G}$为σ-可积。令$\Omega_n\in\mathscr{G}$,$\Omega_n\uparrow\Omega$，使每个XI_{Ω_n}为可积。令

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+E[|X|I_{\Omega_n}])}I_{\Omega_n}$$

则$\xi>0$，ξ为$\mathscr{G}$-可测实值随机变量，且ξX为可积。

(3)⇒(2)显然。

(2)⇒(1)。设$E[X|\mathscr{G}]$ $a.s.$有穷，则由于$E[X|\mathscr{G}]=E[X^+|\mathscr{G}]-E[X^-|\mathscr{G}]$,故$E[|X||\mathscr{G}]<\infty$ $a.s.$。令$\Omega_n=[E[|X||\mathscr{G}]\leqslant n]$，则$\Omega_n\uparrow\Omega$，$a.s.$，$\Omega_n\in\mathscr{G}$，且$XI_{\Omega_n}$为可积随机变量。故$X$关于$\mathscr{G}$为$\sigma$-可积，证毕。

下一定理给出了条件期望的Jensen不等式的最一般形式。借助于上述关于条件期望的推广，它的证明反而比经典形式的证明简单。

2.13 定理(**Jensen不等式**) 设$\varphi:R\to R$为一连续凸函数，X为一关于$\mathscr{G}$ σ-可积的随机变量，则$\varphi(X)$关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，且有

$$\varphi(E[X|\mathscr{G}])\leqslant E[\varphi(X)|\mathscr{G}],\ a.s. \tag{2.11}$$

证 令φ'为φ的右导数，则对任意实数x，y有

$$\varphi'(x)(y-x)\leqslant\varphi(y)-\varphi(x).$$

以$E[X|\mathscr{G}]$及X代替上式中的x及y得

$$\varphi'(E[X|\mathscr{G}])(X-E[X|\mathscr{G}])+\varphi(E[X|\mathscr{G}])\leqslant\varphi(X). \tag{2.12}$$

记上式左边的随机变量为Y，则Y关于$\mathscr{G}$的条件期望存在，且$E[Y|\mathscr{G}]=\varphi(E[X|\mathscr{G}])$.特别，由于$\varphi(X)^-\leqslant Y^-$，故$E[\varphi(X)^-|\mathscr{G}]\leqslant E[Y^-|\mathscr{G}]<\infty$，$a.s.$。因此，$\varphi(X)$关于$\mathscr{G}$的条件期望存

在，且有(2.11)。证毕。

下面我们推广有关条件期望的单调收敛定理、Fatou 引理及控制收敛定理。

2.14 定理 设$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-代数，$(X_n, n\geqslant 1)$为一列关于$\mathscr{G}$条件期望存在的随机变量。

(1)(**单调收敛定理**) 设$X_n \uparrow X$, $a.s.$，且$E[X_1^- | \mathscr{G}]<\infty$, $a.s.$，则X关于$\mathscr{G}$的条件期望存在(实际有$E[X^- | \mathscr{G}]<\infty$, $a.s.$)，且有$E[X_n | \mathscr{G}] \uparrow E[X | \mathscr{G}]$, $a.s.$

(2)(**Fatou 引理**) 若存在随机变量Y，使$E[Y^- | \mathscr{G}]<\infty$, $a.s.$，且对每个$n\geqslant 1$，有$X_n \geqslant Y$, $a.s.$，则$\varliminf\limits_{n\to\infty} X_n$关于$\mathscr{G}$的条件期望存在(实际有$E[(\varliminf\limits_{n\to\infty} X_n)^- | \mathscr{G}]<\infty$, $a.s.$)，且有

$$E[\varliminf_{n\to\infty} X_n | \mathscr{G}] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E[X_n | \mathscr{G}], \quad a.s.$$

(3)(**控制收敛定理**) 设$X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$(相应地，$X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$)，其中每个Y_n为非负随机变量，且Y及每个Y_n关于$\mathscr{G}$为σ-可积。如果对$n\geqslant 1$，$|X_n| \leqslant Y_n$, $a.s.$，且$E[Y_n | \mathscr{G}] \xrightarrow{a.s.} E[Y | \mathscr{G}]$(相应地，$E[Y_n | \mathscr{G}] \xrightarrow{p} E[Y | \mathscr{G}]$)，则有$E[|X_n - X| | \mathscr{G}] \xrightarrow{a.s.} 0$(相应地，$E[|X_n - X| | \mathscr{G}] \xrightarrow{p} 0$)，特别有$E[X_n | \mathscr{G}] \xrightarrow{a.s.} E[X | \mathscr{G}]$(相应地，$E[X_n | \mathscr{G}] \xrightarrow{p} E[X | \mathscr{G}]$)。

证 (1) 令$\xi > 0$为一$\mathscr{G}$-可测实值随机变量，使ξX_1^-为可积，则ξX_n的期望存在，且$\xi X_n \uparrow \xi X$, $a.s.$，故由定理 2.2 得$E[\xi X_n | \mathscr{G}] \uparrow E[\xi X | \mathscr{G}]$, $a.s.$ 从而有$E[X_n | \mathscr{G}] \uparrow E[X | \mathscr{G}]$ $a.s.$，因为$E[\xi X_n | \mathscr{G}] = \xi E[X_n | \mathscr{G}]$，$E[\xi X | \mathscr{G}] = \xi E[X | \mathscr{G}]$。

(2) 容易由(1)推得。

(3) 只需考虑 $a.s.$ 收敛情形。令 $Z_n = Y_n + Y - |X_n - X|$，则 $Z_n \geqslant 0$，且 $Z_n \xrightarrow{a.s.} 2Y$，故由(2)得

$$2E[Y|\mathscr{G}] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E[Z_n|\mathscr{G}] = 2E[Y|\mathscr{G}] - \varlimsup_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathscr{G}]。$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} E[|X_n - X||\mathscr{G}] = 0$。证毕。

下一定理是 Jensen 不等式的一个推论。

2.15 定理(L^r-收敛定理) 设$\infty > r \geqslant 1$。若 $X_n \xrightarrow{L^r} X$，则 $E[X_n|\mathscr{G}] \xrightarrow{L^r} E[X|\mathscr{G}]$。

证 令 $f(x) = |x|^r$，则 f 为 R 上的连续凸函数。于是由(2.11)得

$$|E[X_n|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]|^r = |E[X_n - X|\mathscr{G}]|^r$$
$$\leqslant E[|X_n - X|^r|\mathscr{G}]。$$

在不等式两边取期望即得系的结论。

下一定理推广了定理 2.1 的结论(3)。

2.16 定理 设 X 为一随机变量且数学期望存在。若 X 与$\mathscr{G}$相互独立(即 $\sigma(X)$ 与$\mathscr{G}$相互独立)，则有 $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$，$a.s.$。

证 不妨设 X 为非负随机变量。设 $A \in \mathscr{G}$，由于 I_A 与 X 相互独立，故由习题 1.11 知：

$$\int_A E[X]dP = E[X]P(A) = E[XI_A] = \int_A XdP$$

但 $E[X]$ 为$\mathscr{G}$-可测的，故 $E[X] = E[X|\mathscr{G}]$，$a.s.$。

现在我们研究条件独立性。

2.17 定义 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，$\mathscr{G}$，$\mathscr{G}_1$ 及 $\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数。如果对任意 $B_1 \in \mathscr{G}_1$ 及 $B_2 \in \mathscr{G}_2$，有

$$P[B_1 \cap B_2|\mathscr{G}] = P[B_1|\mathscr{G}]P[B_2|\mathscr{G}], \quad a.s. \tag{2.13}$$

则称$\mathscr{G}_1$与$\mathscr{G}_2$关于$\mathscr{G}$**条件独立**

设$\mathscr{G}_1$与$\mathscr{G}_2$关于$\mathscr{G}$条件独立，则对任意$\mathscr{G}_1$-可测非负随机变量X_1及$\mathscr{G}_2$-可测非负随机变量X_2，有

$$E[X_1X_2|\mathscr{G}]=E[X_1|\mathscr{G}]E[X_2|\mathscr{G}],\ a.s..$$

设X及Y为随机变量。若$\sigma(X)$与$\sigma(Y)$关于$\mathscr{G}$条件独立，则称X与Y关于$\mathscr{G}$条件独立。类似可定义一随机变量与一子σ-代数关于$\mathscr{G}$的条件独立性。

下一定理给出了条件独立性的一个判别准则。

2.18 定理 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，$\mathscr{G}$，$\mathscr{G}_1$及$\mathscr{G}_2$为$\mathscr{F}$的子σ-代数。则为要$\mathscr{G}_1$与$\mathscr{G}_2$关于$\mathscr{G}$条件独立，必须且只需对任意$B_2\in\mathscr{G}_2$有

$$P[B_2|\mathscr{G}_1\vee\mathscr{G}]=P[B_2|\mathscr{G}],\ a.s. \tag{2.14}$$

（或等价地，对任意$B_1\in\mathscr{G}_1$，有$P[B_1|\mathscr{G}_2\vee\mathscr{G}]=P[B_1|\mathscr{G}]$，$a.s.$）

证 首先(2.14)式右边为$\mathscr{G}_1\vee\mathscr{G}$-可测且$\{B_1\cap B: B_1\in\mathscr{G}_1, B\in\mathscr{G}\}$为生成$\mathscr{G}_1\vee\mathscr{G}$的$\pi$-类，由条件期望的定义易知(2.14)等价于

$$\int_{B\cap B_1}P(B_2|\mathscr{G}]dP=\int_{B\cap B_1}I_{B_2}dP,\quad B\in\mathscr{G},\ B_1\in\mathscr{G}_1 \tag{2.15}$$

另一方面，(2.13)等价于

$$\int_B P[B_1|\mathscr{G}]P[B_2|\mathscr{G}]dP=\int_B I_{B_1\cap B_2}dP,\qquad B\in\mathscr{G}, \tag{2.16}$$

但对$B\in\mathscr{G}$，$B_1\in\mathscr{G}_1$，$B_2\in\mathscr{G}_2$，我们有

$$\int_{B\cap B_1}P[B_2|\mathscr{G}]dP=\int_B I_{B_1}P(B_2|\mathscr{G}]dP$$

$$=\int_B E[I_{B_1}P[B_2|\mathscr{G}]|\mathscr{G}]dP$$

$$= \int_B P[B_1|\mathscr{G}]P[B_2|\mathscr{G}]dP$$

即(2.15)的左边与(2.16)的左边相等。因此定理得证。

习题

2.19 设 $X\in L^2(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-代数，则

$$E(E[X|\mathscr{G}]-X)^2$$
$$=\inf\{E(Y-X)^2: Y\in L^2(\Omega,\ \mathscr{G},\ P)\}.$$

2.20 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的实值随机变量，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-代数，$g(x,y)$ 为 R^2 上非负或有界 Borel 可测函数。若 X 为 $\mathscr{G}$-可测的，则

$$E[g(X,\ Y)|\mathscr{G}]=\xi(X),\quad a.s.,$$

其中 $\xi(x)=E[g(x,\ Y)|\mathscr{G}]$。

2.21 设 X 及 Y 为 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的实值随机变量，$g(x,\ y)$ 为 R^2 上的非负或有界 Borel 可测函数。令 $\mathscr{G}_1$ 及 $\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，若 X 关于 $\mathscr{G}_1\vee\mathscr{G}_2$ 独立，Y 关于 $\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$ 可测，则有

$$E[f(X,\ Y)|\mathscr{G}_1]=E[f(X,\ Y)|\mathscr{G}_2]$$
$$=E[f(X,Y)|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2],a.s..$$

(提示：利用第二章定理 2.1)

§3 正则条件概率与随机元的混合条件分布

设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 为一概率空间，$\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一子 σ-代数。由条件期望的性质知：条件概率 $P(A|\mathscr{G})$ 有如下性质：

$$P[\Omega|\mathscr{G}]=1,\ a.s.,\quad P[A|\mathscr{G}]\geqslant 0,a.s.,$$

$$P\Big[\sum_i A_i|\mathscr{G}\Big]=\sum_i P[A_i|\mathscr{G}],a.s..$$

这些性质与概率测度的性质很相似.不同之处在于出现了例外集.如果对每个 $A\in\mathscr{F}$,我们可以选取 $P[A|\mathscr{G}]$的一个版本 $P(\omega,A)$,使得对一切 $\omega\in\Omega$，$P(\omega,\ \cdot\ )$为$(\Omega,\ \mathscr{F})$上的概率测度，这时称

$\{P(\omega, A), \omega\in\Omega, A\in\mathscr{F}\}$为$P$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。一般说来，即使$(\Omega, \mathscr{F})$为可分可测空间，正则条件概率未必存在。本节将对可分可测空间情形给出使正则条件概率存在的一个充分条件(定理 3.10)及一个充要条件(定理 3.15)。

下面我们再给出正则条件概率的明确定义。

3.1 定义 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子σ-代数，令$\{P(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$为$(\Omega, \mathscr{F})$上的一族概率测度。称它为$P$关于$\mathscr{G}$的**正则条件概率**，如果

(1) $\forall A\in\mathscr{F}$，$P(\cdot, A)$为Ω上的$\mathscr{G}$-可测函数；

(2) $\forall A\in\mathscr{F}$，$P(\omega, A)$为$P[A|\mathscr{G}]$的一个版本，即$\forall B\in\mathscr{G}$有

$$\int_B P(\omega, A)P(d\omega)=P(A\cap B).$$

正则条件概率的第一个应用是：条件期望算子成了关于正则条件概率的积分。

3.2 定理 设$\{P(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$为$P$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。设$X$为一随机变量，其期望存在，则对几乎所有$\omega$，$X$关于$P(\omega, \cdot)$的积分存在，且有

$$E[X|\mathscr{G}](\omega)=\int_\Omega X(\omega')P(\omega, d\omega'), \quad a.s.\ \omega. \tag{3.1}$$

证 从示性函数过渡到非负可测函数，证明细节从略。

在上述定理中，如果另有一可测空间$(E, \mathscr{E})$及$(\Omega, \mathscr{F})$到$(E, \mathscr{E})$中的一可测映射ξ，则可在$(E, \mathscr{E})$上引出一族概率测度$\{Q(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$：

$$Q(\omega, A)=P(\omega, \xi^{-1}(A)) \tag{3.2}$$

这时，对形如$f(\xi)$的存在期望的随机变量(其中f为$(E, \mathscr{E})$上的Borel 可测函数)，我们有(见第三章习题 1.15)

$$E[f(\xi)|\mathscr{G}](\omega)=\int_\Omega f(x)Q(\omega, dx). \tag{3.3}$$

在许多情况下，正则条件概率并不存在，但满足(3.3)的概率测度族$\{Q(\omega,\ \cdot),\ \omega\in\Omega\}$存在。我们称$\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$为$\xi$关于$\mathscr{G}$的**混合条件分布**

下面我们给出混合条件分布的确切定义。

3.3 定义 设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$为一概率空间，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子$\sigma$-代数。又设$(E,\mathscr{E})$为一可测空间，$\xi$为$(\Omega,\ \mathscr{F})$到$(E,\mathscr{E})$中的可测映射)称$\xi$为在$(E,\ \mathscr{E})$中取值的**随机元**)。令$\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$为$(E,\ \mathscr{E})$上的一族概率测度。称它为$\xi$关于$\mathscr{G}$的**混合条件分布**如果

(1) $\forall A\in\mathscr{E}, Q(\cdot,\ A)$为$\mathscr{G}$-可测；

(2) $\forall A\in\mathscr{E}$，$Q(\omega,\ A)$为$P[\xi^{-1}(A)|\mathscr{G}]$的一个版本，即$\forall B\in\mathscr{G}$，有

$$\int_B Q(\omega,A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A)).$$

3.4 注 若$(E,\ \mathscr{E})=(\Omega,\ \mathscr{F})$，$\xi$为$\Omega$上的恒等映射，则$\xi$关于$\mathscr{G}$的混合条件分布就是$P$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。因此，关于正则条件概率存在性的研究可以归结为关于混合条件分布存在性的研究。

为了研究混合条件分布的存在性，我们先引入两个新概念，它们分别是Hausdorff空间中紧集类及强内正则测度概念的抽象化。

3.5 定义 设$\mathscr{C}$为E上一集类。如果下列条件满足：

$$C_n\in\mathscr{C},\ n\geqslant1,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}C_n=\phi\Rightarrow\text{存在某}\ m,\ \text{使}\ \bigcap_{n=1}^{m}C_n=\phi,$$

则称$\mathscr{C}$为**紧类**。

紧类的一个典型例子是Hausdorff拓扑空间中的紧集类。

3.6 定义 设$(E,\ \mathscr{E},\mu)$为一测度空间。称μ为$\mathscr{E}$上的**紧测度**，如果存在紧类$\mathscr{C}\subset\mathscr{E}$，使得对一切$A\in\mathscr{E}$有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\}.$$

由第五章定理 8.6 知(见(8.2) 式)：设 E 为一 Polish 空间，则$\mathscr{B}(E)$上的任一有限测度为紧测度。更一般地，我们有：

3.7 命题 设 X 为一 Polish 空间。令 $\mathscr{M}$表示$\mathscr{B}(X)$上有限测度全体，$\bigcap\limits_{\mu\in\mathscr{M}}\overline{\mathscr{B}(X)}^{\mu}$ 中的集称为**普遍可测集**。若 E 为普遍可测集，则 $E\cap\mathscr{B}(X)$上的任何有限测度 μ 为紧测度。更确切地说，令$\mathscr{K}(E)$表示含于 E 的全体紧集，则对任何 $A\in E\cap\mathscr{B}(X)$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathscr{K}(E)\}.$$

证 留给读者作为习题。

3.8 引理 设$\mathscr{A}$及$\mathscr{A}_1$为 E 上的两个代数，且 $\mathscr{A}_1\supset\mathscr{A}$，$\mathscr{C}$为 E 上一紧类，且 $\mathscr{C}\subset\mathscr{A}_1$，令 μ 为$\mathscr{A}_1$ 上的一非负有限可加集函数，且 $\mu(\Omega)<\infty$。若对一切 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\},$$

则 μ 限于$\mathscr{A}$为 σ-可加的。

证 由第一章定理 3.4 知：只需证 μ 在空集 ϕ 处连续。设 $A_n\in\mathscr{A}$，$A_n\downarrow\phi$，对任给 $\varepsilon>0$，依假定，存在 $C_n\subset A$，$C_n\in\mathscr{C}$，使 $\mu(A_n)\leqslant\mu(C_n)+\varepsilon/2^n$。由于 $\bigcap\limits_n C_n\subset\bigcap\limits_n A_n=\phi$，故由$\mathscr{C}$是紧类的假定，存在正整数 m，使$\bigcap\limits_{n=1}^m C_n=\phi$。即有$\bigcup\limits_{n=1}^m C_n^c=E$，于是有

$$A_m=\bigcap_{n=1}^m A_n=\left(\bigcap_{n=1}^m A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^m C_n^c\right)\subset\bigcup_{n=1}^m(A_n\setminus C_n).$$

因此，对 $k\geqslant m$，我们有

$$\mu(A_k) \leqslant \mu(A_m) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n \setminus C_n) < \varepsilon.$$

这表明 $\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)<\varepsilon$。但 $\varepsilon>0$ 是任意的，故 $\lim_{k\to\infty}\mu(A_n)=0$，因此 μ 限于 $\mathscr{A}$ 为 σ-可加的。

下一定理给出了混合条件分布存在的一个非常有用的充分条件。

3.9 定理 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$(E, \mathscr{E})$为一可分可测空间，ξ 为$(\Omega, \mathscr{F})$到$(E, \mathscr{E})$中的一可测映射. 令 $\mu = P\xi^{-1}$，若 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的紧测度，则对 $\mathscr{F}$ 的任一子 σ-代数 $\mathscr{G}$，存在 ξ 关于 $\mathscr{G}$ 的混合条件分布。

证 由第一章习题 2.13 知：存在 E 上一代数 $\mathscr{A}$，其元素个数至多可数，使得 $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{E}$. 此外，依假定，存在 E 上的一紧类 $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$，使得对每个 $A \in \mathscr{E}$，有

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C):\ C \subset A,\ C \in \mathscr{C}\}.$$

因此，设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots\}$，则对每个 A_i，存在 $C_{ik} \in \mathscr{C}$，$C_{ik} \subset A_i$，使

$$\mu(A_i) = \sup_k \mu(C_{ik}),\quad i = 1, 2, \cdots \tag{3.4}$$

对每个 $A \in \mathscr{E}$，令 $\widetilde{Q}(\omega, A)$为 $E[\xi^{-1}(A) | \mathscr{G}]$的一个版本，则

$$\begin{aligned}
\mu(A_i) &= \sup_k \mu(C_{ik}) = \sup_k P(\xi^{-1}(C_{ik})) \\
&= \sup_k \int \widetilde{Q}(\omega, C_{ik})dP \leqslant \int \sup_k \widetilde{Q}(\omega, C_{ik})dP \\
&\leqslant \int \widetilde{Q}(\omega, A_i)dP = P(\xi^{-1}(A_i)) = \mu(A_i).
\end{aligned}$$

因此有

$$\sup_k \widetilde{Q}(\omega, C_{ik}) = \widetilde{Q}(\omega, A_i),\ a.s. \tag{3.5}$$

现令$\mathscr{D}=\{C_{ik},\ i,\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$，并令$\mathscr{A}_1$为由$\mathscr{A}$及$\mathscr{D}$生成的代数，则$\mathscr{A}_1$的元素个数仍为至多可数，且$\sigma(\mathscr{A}_1)=\mathscr{E}$。令

$$\Omega_1=\{\omega:\ \widetilde{Q}(\omega,\ E)=1,\ \widetilde{Q}(\omega,\ A)\geqslant 0,\ \forall A\in\mathscr{A}_1\}$$

$$\Omega_2=\{\omega:\ \widetilde{Q}(\omega,\ A\cup B)=\widetilde{Q}(\omega,\ A)+\widetilde{Q}(\omega,\ B),\ \text{若 } A,\ B\in\mathscr{A}_1,\ A\cap B=\phi\}$$

$$\Omega_3=\{\omega:\ \forall i\geqslant 1,\ \sup_k\widetilde{Q}(\omega,\ C_{ik})=\widetilde{Q}(\omega,\ A_i)\}$$

则Ω_1，Ω_2及Ω_3都为$\mathscr{Y}$-可测集，且$P(\Omega_1)=P(\Omega_2)=P(\Omega_3)=1$。由于$\mathscr{D}$是紧类，故由引理3.8知，对$\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3\triangleq\Omega_0$，$\widetilde{Q}(\omega,\ \cdot)$限于$\mathscr{A}$为$\sigma$-可加的，从而可以唯一地扩张成为$\mathscr{E}$上的一概率测度，我们用$Q(\omega,\ \cdot)$表示之。对$\omega\in\Omega\backslash\Omega_0$，我们令$Q(\omega,\ \cdot)=\mu$，则$\{Q(\omega,\ \cdot),\ \omega\in\Omega\}$为$(E,\mathscr{E})$上的一族概率测度。下面证明它为$\xi$关于$\mathscr{Y}$的混合条件分布。令

$$\mathscr{H}=\{A\in\mathscr{E}:\ Q(\cdot,A)\text{为}\mathscr{Y}\text{-可测，且}\forall B\in\mathscr{Y}\text{有}$$
$$\int_B Q(\omega,\ A)P(d\omega)=P(B\cap\xi^{-1}(A)\}$$

依$Q(\omega,\ A)$的定义，显然有$\mathscr{A}\subset\mathscr{H}$。此外，易见$\mathscr{H}$为单调类，故$\mathscr{H}=\mathscr{E}$(因$\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{E}$)。这表明$\{Q(\omega,\cdot),\omega\in\Omega\}$为$\xi$关于$\mathscr{Y}$的混合条件分布(见定义3.3)。证毕。

下一定理是定理3.9的直接推论(见注3.4)，它给出了正则条件概率存在的一个充分条件。

3.10 定理 设$(\Omega,\ \mathscr{F})$为一可分可测空间，P为$\mathscr{F}$上的一紧概率测度(见定义3.6)，则对$\mathscr{F}$的任一子σ-代数$\mathscr{Y}$，存在P关于$\mathscr{Y}$的正则条件概率。

一可测空间$(E,\mathscr{E})$称为**可离的**，如果它的每个原子都是单点集。两个可测空间称为**同构**，如果在两者之间存在一双方单值双方可测的满射(这样的映射称为**可测同构**)。下一引理表明：任一可分且可离的可测空间同构于$(R,\ \mathscr{B}(R))$的某可测子空间。

3.11 引理 设$(E,\mathscr{E})$为一可分且可离的可测空间，则$(E,\mathscr{E})$同构于$(R,\mathscr{B}(R))$的某可测子空间。更确切地说，设$\{A_n, n\geqslant 1\}$为E上生成$\mathscr{E}$的代数，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}I_{A_n}(x)$$

则f为$(E,\mathscr{E})$到$(f(E),\mathscr{B}(f(E)))$上的可测同构。这里，$\mathscr{B}(f(E))=f(E)\cap\mathscr{B}(R)$(见第一章习题2.7)。

证 显然f为$(E,\mathscr{E})$到$(f(E),\mathscr{B}(f(E)))$上的双方单值可测映射。为证f^{-1}可测，只需证$f^{-1}(\mathscr{B}(f(E)))=\mathscr{E}$，或者只需证每个$A_n$属于$f^{-1}(\mathscr{B}(f(E)))$。令$G_n$表示$[0, 2]$中三进位展开中第$n$项为1的实数，则$G_n\in\mathscr{B}(R)$，从而$G_n\cap f(E)\in\mathscr{B}(f(E))$。我们有$A_n=f^{-1}(G_n)=f^{-1}(G_n\cap f(E))$，引理证毕。

引理3.11允许我们给出如下定义。

3.12 定义 设$(E,\mathscr{E})$为一可分且可离的可测空间。如果存在R的一普遍可测子集A，使$(E,\mathscr{E})$与$(A,\mathscr{B}(A))$同构，则称$(E,\mathscr{E})$为Radon**可测空间**。

可以证明，设A为一Polish空间X的普遍可测子集，则$(A,\mathscr{B}(A))$为Radon可测空间(参见[1])。

下面二定理是命题3.7、定理3.9及3.10的直接推论。

3.13 定理 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，$(E,\mathscr{E})$为一Radon可测空间。则对任何取值于$(E,\mathscr{E})$的随机元ξ及$\mathscr{F}$的任一子σ-代数$\mathscr{G}$，存在ξ关于$\mathscr{G}$的混合条件分布。

3.14 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一Radon可测空间，P为$\mathscr{F}$上的一概率测度，则对$\mathscr{F}$的任一子σ-代数$\mathscr{G}$，存在P关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。

对可分可测空间情形，下一定理进一步给出了正则条件概率存在的充要条件。

3.15 定理 （马志明[4]）设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可分可测空间，f为$(\Omega, \mathscr{F})$到$(R, \mathscr{B}(R))$的可测映射，使得f在不同的原子上取不同的值，且使$f^{-1}(\mathscr{B}(f(\Omega)))=\mathscr{E}$。令$P$为$(\Omega, \mathscr{F})$上的概率测度，$\mathscr{G}$为$\mathscr{F}$的一子$\sigma$-代数，$\{Q(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$为$f$关于$\mathscr{G}$混合条件分布。则为要$P$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率存在，必须且只需存在$\mathscr{G}$-可测的概率为1为集合$\Omega_0$，使得对每个$\omega\in\Omega_0$，$Q^*(\omega, f(\Omega))=1$。这里$Q^*(\omega, \cdot)$表示$Q(\omega, \cdot)$的外测度。

证 充分性：设定理中所给条件被满足。对$A\in\mathscr{F}$，令

$$P(\omega, A)=\begin{cases} Q^*(\omega, f(A)), & \omega\in\Omega_0 \\ P(A) & , \omega\notin\Omega_0 \end{cases}$$

往证$\{P(\omega, \cdot\}, \omega\in\Omega\}$为$P$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。首先，对$\omega\in\Omega_0$，由于$Q^*(\omega, f(\Omega))=1$，故由第一章习题4.9知，$Q^*(\omega, \cdot)$限于$f(\Omega)\cap\mathscr{B}(R)=\mathscr{B}(f(\Omega))$为一概率测度，从而$P(\omega, \cdot)$为$\mathscr{F}$上的概率测度(由于依假定，$A\cap B=\phi\Rightarrow f(A)\cap f(B)=\phi$)。此外，对任何$A\in\mathscr{F}$，存在$B\in\mathscr{B}(R)$，使$f(A)=f(\Omega)\cap B$，故有

$$P(\omega, A)=Q^*(\omega, f(A))=Q^*(\omega, f(\Omega)\cap B)=Q(\omega, B), \quad \omega\in\Omega_0$$

因此，$P(\cdot, A)$为$\mathscr{G}$-可测的，并且有

$$P(\omega, A)=Q(\omega, B)=P[f^{-1}(B)|\mathscr{G}]=P[A|\mathscr{G}], \ a.s.$$

这表明$\{P(\omega, \cdot)\}$为P关于$\mathscr{G}$的正则条件概率。

必要性：设存在P关于$\mathscr{G}$的正则条件概率$\{P(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$。令

$$\widetilde{Q}(\omega, A)=P(\omega, f^{-1}(A)), \ A\in\mathscr{B}(f(\Omega))$$

则易见$\{\widetilde{Q}(\omega, \cdot), \omega\in\Omega\}$为$f$关于$\mathscr{G}$的混合条件分布。对任何满足$G\supset f(\Omega)$的$G\in\mathscr{B}(R)$，我们有$f^{-1}(G)=\Omega$，从而$\widetilde{Q}(\omega, G)=1$。因此，对一切$\omega\in\Omega$，$\widetilde{Q}^*(\omega, f(\Omega))=1$。设$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots,\}$为生成$\mathscr{F}$的可数代数，令

$$\Omega_0=\{\omega: Q(\omega, A_n)=\widetilde{Q}(\omega, A_n), \forall n\geqslant 1\}$$

则 Ω_0 为$\mathscr{Y}$-可测集，且 $P(\Omega_0)=1$。此外，对$\omega\in\Omega_0$，$Q(\omega, \cdot)$ 与$\widetilde{Q}(\omega, \cdot)$限于$\mathscr{A}$一致，从而在$\mathscr{F}$上一致。特别，对 $\omega\in\Omega_0$，有 $Q^*(\omega, f(\Omega))=1$，必要性证毕。

习题

3.16 证明定理 3.2 及命题 3.7。

§4 Kolmogorov 相容性定理及Tulcea 定理的推广

下面，我们要用紧类及紧测度的概念证明 Kolmogorov相容性定理的推广形式。为此先证明两个引理。

4.1 引理 设$\mathscr{C}$为Ω上的紧类，则$\mathscr{C}_{\cup f}$及$\mathscr{C}_\delta$都是紧类．这里 $\mathscr{C}_{\cup f}$ 及 $\mathscr{C}_\delta$ 分别表示用有限并及可列交运算封闭 $\mathscr{C}$ 所得的集类。

证 $\mathscr{C}_\delta$显然是紧类。只需证$\mathscr{C}_{\cup f}$ 是紧类。设 $D_n=\bigcup\limits_{m=1}^{M_n} C_n^m$ $\in\mathscr{C}_{\cup f}$，$n\geqslant 1$，使得对一切 $p\geqslant 1$，$\bigcap\limits_{n\leqslant p} D_n\neq\phi$。现证$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n\neq\phi$。

令 J 表示那些满足 $1\leqslant m_n\leqslant M_n(\forall_n)$的自然数序列$\{m_1, m_2, \cdots,\}$全体。令

$$J_0=\left\{\{m_n, n\geqslant 1\}\in J: \bigcap_{n\leqslant p} C_n^{m_n}\neq\phi\right\}$$

由于

$$\bigcup_{n\leqslant p} D_n=\bigcap_{n\leqslant p}\bigcup_{m=1}^{M_n} C_n^m=\bigcup_{\{m_n\}\in J}\left(\bigcap_{n\leqslant p} C_n^{m_n}\right)$$

于是对每个 $p\geqslant 1$，J_p 非空。显然有 $J_p\supset J_{p+1}$，$p\geqslant 1$. 往证 $\bigcap_p J_p \neq \phi$。对每个 $q\geqslant 1$，任取 J_q 中一元素 $\{m_n^{(q)},\ n\geqslant 1\}$。由于对固定的 n，$1\leqslant m_n^{(q)}\leqslant M_n$ 对一切 q 成立，从而对任一由无穷多个自然数组成的集合$\wedge$，必有无穷多个 q 属于$\wedge$，使得 $m_n^{(q)}$ 取相同值。因此，由归纳法可构造一序列$\{m_n^*,\ n\geqslant 1\}$，使得它属于 J，且对一切 $p\geqslant 1$，及 $1\leqslant n\leqslant p$，$m_n^* = m_n^{(q)}$ 对无穷多个 q 成立。这样一来，对任一 $p\geqslant 1$，存在 $q>p$，使 $m_n^* = m_n^{(q)}$，$1\leqslant n\leqslant p$. 由于$\{m_n^{(q)},\ n\geqslant 1\}\in J_q\subset J_p$，故由 J_p 的定义知$\{m_n^*,\ n\geqslant 1\}\in J_p$，于是$\{m_n^*,\ n\geqslant 1\}\in \bigcap_p J_p$ 从而对一切p，$\bigcap_{n\leqslant p} C_n^{m_n^*}\neq\phi$。但依假定，$\mathscr{C}$ 为紧类，故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{m_n^*}\neq\phi$，从而 $\bigcap_n D_n\neq\phi$.（注意：$\bigcap_n D_n\supset \bigcap_n C_n^{m_n^*}$.）这表明$\mathscr{C}_{uf}$ 为紧类。证毕。

下一引理推广了引理 3.8.

4.2 引理　设$\mathscr{A}$及$\mathscr{A}_1$ 为 E 上的两个半代数，且$\mathscr{A}_1\supset\mathscr{A}$，$\mathscr{C}$ 为 E 上一紧类，且$\mathscr{C}\subset\mathscr{A}_1$. 令 μ 为$\mathscr{A}_1$ 上的一非负有限可加集函数，且 $\mu(\Omega)<\infty$. 若对一切 $A\in\mathscr{A}$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\},$$

则 μ 限于$\mathscr{A}$为 σ-可加的。

证　令 $\overline{\mathscr{A}}_1$ 及$\overline{\mathscr{A}}$分别由$\mathscr{A}_1$ 及$\mathscr{A}$产生的代数。（即 $\overline{\mathscr{A}}_1=(\mathscr{A}_1)_{\Sigma f}$，$\overline{\mathscr{A}}=\mathscr{A}_{\Sigma f}$.），则 μ 可以称一地扩张成为 $\overline{\mathscr{A}}_1$ 上的有限可加集函数，且对一切 $A\in\overline{\mathscr{A}}$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(C):\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}_{uf}\}.$$

但由引理 4.1 知，$\mathscr{C}_{uf}$ 为紧类，故由引理 3.8 知：μ 限于 $\overline{\mathscr{A}}$ 为 σ-可加的。特别，μ 限于 $\mathscr{A}$ 为 σ-可加的。证毕。

4.3 定理 设 I 为一无穷集，$\mathscr{P}_0(I)$ 为 I 的非空有限子集全体。设 $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间。对每个 $T\in\mathscr{P}_0(I)$，设 P_T 为 $\left(\prod\limits_{i\in T}\Omega_i, \prod\limits_{i\in T}\mathscr{F}_i\right)$ 上的一概率测度。假定：(1) 每个 P_i 为 $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$ 上的紧概率测度；(2) $\{P_T, T\in\mathscr{P}_0(I)\}$ 满足如下相容性条件：对 $T_1\subset T_2$，有

$$P_{T_1}(A_{T_1}) = P_{T_2}\left(A_{T_1}\times\prod_{i\in T_2\setminus T_1}\Omega_i\right),\ A_{T_1}\in\prod_{i\in T_1}\mathscr{F}_i, \tag{4.1}$$

则在 $\left(\prod\limits_{i\in I}\Omega_i, \prod\limits_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)$ 上存在唯一概率测度 P，使得对一切 $T\in\mathscr{P}_0(I)$，有

$$P\left(A_T\times\prod_{i\in I\setminus T}\Omega_i\right)=P_T(A_T),\ A_T\in\prod_{i\in T}\mathscr{F}_i. \tag{4.2}$$

证 令

$$\mathscr{S} = \bigcup_{T\in\mathscr{S}_0(I)}\left\{\prod_{i\in T}A_i\times\prod_{i\notin T}\Omega_i;\ A_i\in\mathscr{F}_i,\ i\in T\right\}$$

则 $\mathscr{S}$ 为半代数，且 $\sigma(\mathscr{S}) = \prod\limits_{i\in I}\mathscr{F}_i$。令

$$P\left(\prod_{i\in T}A_i\times\prod_{i\notin T}\Omega_i\right) = P_T\left(\prod_{i\in T}A_i\right). \tag{4.3}$$

由 $\{P_T, T\in\mathscr{P}_0(I)\}$ 的相容性知，如上定义的 P 在 $\mathscr{S}$ 上是唯一确定的，且为有限可加的，并且有 $P\left(\prod\limits_{i\in I}\Omega_i\right)=1$。因此，由引理

4.2，为证 P 在$\mathscr{S}$上σ-可加，只需证存在一紧类$\mathscr{C}\subset\mathscr{S}$，使得对一切$A\in\mathscr{S}$，有

$$P(A)=\sup\{P(C);\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\}. \qquad (4.4)$$

依假定，对每个$i\in I$，存在Ω_i上一紧类$\mathscr{C}_i\subset\mathscr{F}_i$，使得对一切$A_i\in\mathscr{F}_i$，有$P_i(A_i)=\sup\{P_i(C);\ C\subset A_i,\ C\in\mathscr{C}_i\}$。不妨设每个$\mathscr{C}_i$对可列交运算封闭。令

$$\mathscr{D}=\bigcup_{i\in I}\left\{C\times\prod_{j\neq i}\Omega_j,\ C\in\mathscr{C}_i\right\}$$

则$\mathscr{D}$为紧类。事实上，设$A_n=C_n\times\prod\limits_{j\neq i_n}\Omega_j$，$C_n\in\mathscr{C}_{i_n}$，则$\bigcap\limits_n A_n$有如下形式：$\prod\limits_{i\in S}B_i\times\prod\limits_{i\notin S}\Omega_i$，其中$S$为一可数集，且$B_i\in\mathscr{C}_i$，$i\in S$。若$\bigcap\limits_n A_n=\phi$，则存在某$s\in S$，使$B_s=\phi$。由于$B_s=\bigcap\limits_{i_n=s}C_n$，故由$\mathscr{C}_s$的紧性知，存在$\{n;\ i_n=s\}$的有限子集$J$，使$\bigcap\limits_{n\in J}C_n=\phi$，从而$\bigcap\limits_{n\in J}A_n=\phi$。因此，$\mathscr{D}$为紧类。现令$\mathscr{C}=\mathscr{D}_{\cap f}$，则$\mathscr{C}$为紧类，且$\mathscr{C}\subset\mathscr{S}$。设$A=\prod\limits_{i\in T}A_i\times\prod\limits_{i\notin T}\Omega_i\in\mathscr{S}$。对任给$\varepsilon>0$，取$C_i\in\mathscr{C}_i$，$C_i\subset A_i$，使得

$$P_i(A_i)\leqslant P_i(C_i)+\frac{\varepsilon}{|T|},$$

这里$|T|$表示T中元素的个数。令

$$C=\prod_{i\in T}C_i\times\prod_{i\notin T}\Omega_i=\bigcap_{i\in T}\left(C_i\times\prod_{j\neq i}\Omega_j\right)\in\mathscr{C},$$

则 $C\subset A$，且有 $A\setminus C\subset\bigcup_{i\in T}\left\{(A_i\setminus C_i)\times\prod_{j\neq i}\Omega_j\right\}$. 故由 P的半有限可加性得

$$P(A)-P(C)\leqslant\sum_{i\in T}P_i(A_i\setminus C_i)\leqslant\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，故有(4.4)。因此，P 在$\mathscr{S}$上是σ-可加的，从而可唯一地扩张成为$\sigma(\mathscr{S})=\prod_{i\in I}\mathscr{F}_i$ 上的一概率测度，仍记为 P。显然 P 满足(4.2)(利用单调类定理)。P 的唯一性显然. 定理证毕。

作为该定理的推论，我们有如下的

4.4 定理(Kolmogorov 相容性定理) 设 I 为一无穷集，$\mathscr{P}_0(I)$为 I 的非空有限子集全体。设$(\Omega_i,\ \mathscr{F}_i)=(R,\ \mathscr{B}(R))$，$i\in I$。对每个 $T\in\mathscr{P}_0(I)$，设 P_T 为$(R^T,\ \mathscr{B}(R^T))\left(=\left(\prod_{i\in T}\Omega_i,\ \prod_{i\in T}\mathscr{F}_i\right)\right)$上的一概率测度. 假定$\{P_T,\ T\in\mathscr{P}_0(I)\}$满足相容性条件，则在$\left(\prod_{i\in I}\Omega_i,\ \prod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)(=(R^I,\ \mathscr{B}(R)^I))$上存在唯一的概率测度 P，使得对一切 $T\in\mathscr{P}_0(I)$，有(4.2)式。

在随机过程理论中，有时遇到如下的概率测度的扩张问题：设$(\Omega,\ \mathscr{F})$为一可测空间，$(\mathscr{F}_n)$为$\mathscr{F}$的一列上升的子σ-代数，使得$\sigma\left(\bigcap_n\mathscr{F}_n\right)=\mathscr{F}$。令 P_n 为$\mathscr{F}_n$ 上的概率，使得 P_{n+1} 限于$\mathscr{F}_n$ 与 P_n 一致。是否存在$\mathscr{F}$上的一概率测度 P，使得 P 限于每个$\mathscr{F}_n$ 与 P_n 一致。事实上，这一问题比前面讨论的问题更为一般。请读者思考一下：如何将前面的问题归结为现在的问题.

下一定理推广了 Tulcea 定理(第四章定理 4.1)。

4.5 定理 设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间，$(\mathscr{F}_n, n\geqslant 1)$为$\mathscr{F}$的一列上升的子 σ-代数，使得$\sigma\left(\bigcup_n \mathscr{F}_n\right)=\mathscr{F}$。令 P_n 为$\mathscr{F}_n$上的概率测度，$n\geqslant 1$，假定下列条件被满足：

(1) 对一切 $n\geqslant 1$，$P_{n+1}|_{\mathscr{F}_n}=P_n$；

(2) 对一切$n\geqslant 2$，存在$(\Omega,\mathscr{F}_{n-1})$到$(\Omega,\mathscr{F}_n)$的概率核(见第四章定义3.1)$Q_n(\omega,\cdot)$，使得对一切$B_n\in\mathscr{F}_n$，有$P(B_n)=\int Q_n(\omega, B_n)P_{n-1}(d\omega)$，且有

$$G\in\mathscr{F}_n,\ Q_n(\omega, G)>0\Rightarrow A_{n-1}(\omega)\cap G\neq\phi \qquad (4.5)$$

这里 $A_k(\omega)$表示包含 ω 的$\mathscr{F}_k$-原子；

(3) 设 $\omega^{(n)}\in\Omega$，$n\geqslant 1$。若 $A_n(\omega^{(n)})\downarrow$，则$\bigcap_n A_n(\omega^{(n)})\neq\phi$。

则存在$\mathscr{F}$上的唯一概率测度，使得 P限于每个$\mathscr{F}_n$与P_n一致。

证 令$\mathscr{A}=\bigcup_n \mathscr{F}_n$。由条件(1)，$(P_n, n\geqslant 1)$可在$\mathscr{A}$上唯一确定一可加集函数 P，使得 P 限于每个$\mathscr{F}_n$与P_n一致。要证P在$\mathscr{A}$上是σ-可加的，为此，只需证P在空集处连续。设$B_n\in\mathscr{A}$，$B_n\downarrow\phi$，我们用反证法证明$\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)=0$。假定$\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)>0$。不妨设对每个$n\geqslant 1$，有$B_n\in\mathscr{F}_n$(否则，可以在序列$\{B_n, n\geqslant 1\}$中添加某些相同的$B_n$，使新序列具有这一性质)，由条件(2)，对每个$n\geqslant 2$，

$$P(B_n)=\int_\Omega q_n^{(1)}(\omega)P_1(d\omega),$$

其中 $q_2^{(1)}(\omega)=Q_2(\omega, B_2)$，

$$q_n^{(1)}(\omega)=\int Q_2(\omega,\ d\omega^{(2)}),\ \cdots,\ Q_n(\omega^{(n-1)},\ B_n),\ n\geqslant 3$$

由于$B_n\downarrow$，故$q_n^{(1)}(\omega)\downarrow h_1(\omega)$。由控制收敛定理，我们有$\int h_1(\omega)P_1(d\omega)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)>0$，于是存在$\omega^{(1)}$，使$h_1(\omega^{(1)})>0$。实际上，必有$\omega^{(1)}\in B_1$，不然的话，则由(4.5)知

$$q_2^{(1)}(\omega^{(1)})=Q_2(\omega^{(1)},\ B_2)\leqslant Q_2(\omega^{(1)},\ B_1)=0,$$

这将导致$h_1(\omega^{(1)})=0$。

现设$n>2$，则

$$q_n^{(1)}(\omega^{(1)})=\int q_n^{(2)}(\omega)Q_2(\omega^{(1)},\ d\omega),$$

其中$q_3^{(2)}(\omega)=Q_3(\omega,\ B_3)$，

$$q_n^{(2)}(\omega)=\int Q_3(\omega,\ d\omega^{(3)})\cdots Q_n(\omega^{(n-1)},\ B_n),n\geqslant 4.$$

于是$q_n^{(2)}(\omega)\downarrow h_2(\omega)$，且

$$\int h_2(\omega)Q_2(\omega^{(1)},\ d\omega)=h_1(\omega^{(1)})>0.$$

因此，$Q_2(\omega^{(1)},\ [h_2>0])>0$。从而由(4.5)知，存在$\omega^{(2)}$，使$\omega^{(2)}\in A_1(\omega^{(1)})$，且$h_2(\omega^{(2)})>0$。与上述同理可证$\omega^{(2)}\in B_2$。

最后，由归纳法我们得到Ω中的一列点$\omega^{(1)}$，$\omega^{(2)}$，…使得$\omega^{(n)}\in B_n$，且$\omega^{(n+1)}\in A_n(\omega^{(n)})$，$n\geqslant 1$。由于$\mathscr{F}_n\downarrow$，故易知$A_{n+1}(\omega^{(n+1)})\subset A_n(\omega^{(n)})$。因此，由条件(3)知$\bigcap_n A_n(\omega^{(n)})\neq\phi$。但显然有$A_n(\omega^{(n)})\subset B_n$，故$\bigcap_n B_n\neq\phi$。这与假定矛盾。

这表明，必须有$\lim P(B_n)=0$，因此，P在上$\mathscr{A}$上是σ-可加的，从而P可以唯一扩张成为$\mathscr{F}$上的一概率测度。定理证毕。

注 实际上，条件(2)蕴含条件(1)(见习题 4.7)。

习题

4.6 为什么说定理 4.5 是 Tulcea 定理的推广形式？

4.7 设定理 4.5 的条件(2)成立．则对一切$n\geqslant 2$及$B\in\mathscr{F}_{n-1}$，有$Q_n(\omega, B)=I_B(\omega)$。进一步由此证明条件(2)蕴含条件(1)。

§5 随机变量族的一致可积性

5.1 定义 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，$\mathscr{H}$为一族可积随机变量。称$\mathscr{H}$为**一致可积的**，如果当$C\to\infty$时，积分

$$\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|dP, \quad \xi\in\mathscr{H}$$

一致趋于零。

下一定理给出了一个一致可积性准则。

5.2 定理 令$\mathscr{H}\subset L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，则为要$\mathscr{H}$为一致可积族，必须且只需下列条件成立：

(1) $a=\sup\{E|\xi|, \xi\in\mathscr{H}\}<+\infty$；

(2) 对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对任何满足$P(A)\leqslant\delta$的$A\in\mathscr{F}$，有

$$\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\int_A|\xi|dP\leqslant\varepsilon. \tag{5.1}$$

证 必要性。设$\mathscr{H}$为一致可积族。对给定$\varepsilon>0$，取C足够大，使得

$$\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|dP\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，我们有

$$\int_A|\xi|dP\leqslant CP(A)+\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|dP \tag{5.2}$$

在(5.2)中令$A=\Omega$得到条件(1)，令$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2C}$得到条件(2)。

充分性。设条件(1)及(2)成立。对任给 $\varepsilon>0$，选取 $\delta>0$，使条件(2)中结论成立。于是当 $C\geqslant\frac{a}{\delta}$ 时，由于

$$P([|\xi|\geqslant C])\leqslant\frac{1}{C}\mathrm{E}[|\xi|]\leqslant\frac{a}{C}\delta,\ \xi\in\mathscr{H},$$

故由(5.1)得

$$\int_{[|\xi|\geqslant C]}|\xi|dP\leqslant\varepsilon,\ \xi\in\mathscr{H}.$$

这表明$\mathscr{H}$为一致可积族。证毕。

5.3 定理 设$\mathscr{H}$是一致可积族，则$\mathscr{H}$在$L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$中的闭凸包也是一致可积的。

证 由定理5.3易知一致可积族在L^1中的闭包是一致可积的，因此只需证$\mathscr{H}$的凸包$\mathscr{H}_1$是一致可积的。显然$\mathscr{H}_1$满足定理5.2的条件(1)。往证$\mathscr{H}_1$满足条件(2).对给定 $\varepsilon>0$，选取 $\delta>0$，使条件(2)中的结论对$\mathscr{H}$成立。则对任何 $n\geqslant2$，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\in\mathscr{H}$及满足$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$的非负实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，和对任何满足 $P(A)\leqslant\delta$ 的 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\int_A\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i\right|dP\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_A|\xi_i|dP\leqslant\varepsilon.$$

这表明$\mathscr{H}_1$满足条件(2)，故$\mathscr{H}_1$为一致可积族。证毕。

下一定理给出了L^1-收敛准则。

5.4 定理 设(ξ_n)为一可积随机变量序列，ξ为一实值随机变量。则下列条件等价：

(1) $\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$；

(2) $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$，且(ξ_n)为一致可积；

(3) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$，且$E|\xi_n| \longrightarrow E|\xi| < \infty$.

证 (1)⇔(3)见第三章系2.8。下面证明(1)⇔(2)。

(1)⇒(2)。设$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$。令$A \in \mathscr{F}$，我们有

$$\int_A |\xi_n|\, dP \leqslant \int_A |\xi| dP + E[|\xi_n - \xi|]. \tag{5.3}$$

给定$\varepsilon > 0$，选取一正整数N，使得当$n > N$时，有$E[|\xi_n - \xi|] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$。再选取$\delta > 0$，使得对任何满足$P(A) \leqslant \delta$的$A \in \mathscr{F}$，有

$$\int_A |\xi| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_A |\xi_n| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots, N. \tag{5.4}$$

于是由(5.3)及(5.4)知，对任何满足$P(A) \leqslant \delta$的$A \in \mathscr{F}$，有

$$\sup_n \int_A |\xi_n| dP \leqslant \varepsilon.$$

此外，我们有$\sup\limits_n E[|\xi_n|] < \infty$。故由定理5.2知，$(\xi_n)$为一致可积族．最后，显然有$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$。

(2)⇒(1)。设(ξ_n)一致可积，且$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$。由Fatou引理，$E[|\xi|] \leqslant \sup\limits_n E[|\xi_n|] < +\infty$，故$\xi$可积。从而$(\xi_n - \xi)$为一致可积。对任给$\varepsilon > 0$，由定理5.2知，存在$\delta > 0$，使得对任何满足$P(A) < \delta$的$A \in \mathscr{F}$，有

$$\sup_n \int_A |\xi_n - \xi| dP \leqslant \varepsilon.$$

取N充分大，使得当$n \geqslant N$时，有$P([|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon]) < \delta$。于是当$n \geqslant N$时，我们有

$$E[|\xi_n - \xi|] = \int_{[|\xi_n - \xi| < \varepsilon]} |\xi_n - \xi| dP +$$

$$\int_{[|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon]}|\xi_n-\xi|dP\leqslant 2\varepsilon$$

这表明$\xi_n\xrightarrow{L^1}\xi$。定理证毕.

下一定理给出了一致可积性的又一准则。

5.5 定理 设$\mathscr{H}\subset L^1(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$。则下列条件等价：

(1) $\mathscr{H}$是一致可积的；

(2) 存在R_+上满足$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\varphi(t)}{t}=\infty$的非负 Borel 函数$\varphi$,使得$\sup\limits_{\xi\in\mathscr{H}}E[\varphi\circ|\xi|]<\infty$。

证 (1)⇒(2)。设$\mathscr{H}$为一致可积族。由于对任何$a>0$，有$\int_\Omega(|\xi|-a)^+dP\leqslant\int_{[|\xi|>a]}|\xi|dP$，故存在自然数$n_k\uparrow\infty$，使得$\sup\limits_{\xi\in\mathscr{H}}\int_\Omega(|\xi|-n_k)^+dP<2^{-k}$，$k\geqslant1$。令

$$\varphi(t)=\sum_{k\geqslant1}(n-n_k)^+,\quad n\leqslant t<n+1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

则φ为非负，单调非降且右连续。此外有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geqslant1}\left(1-\frac{n_k}{n}\right)^+=\infty,$$

从而$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\varphi(n)}{t}=\infty$。最后，

$$E[\varphi\circ|\xi|]=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^\infty(n-n_k)^+P([n\leqslant|\xi|<n+1])$$

$$=\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty(n-n_k)^+P([n\leqslant|\xi|<n+1])$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} (|\xi| - n_k)^+ dP < 1.$$

(1)⇒(2)得证。

(2)⇒(1)。设(2)成立。对给定$\varepsilon>0$。令$a=\frac{M}{\varepsilon}$，其中$M = \sup\limits_{\xi \in \mathscr{H}} E[\varphi \circ |\xi|]$。选取充分大的$C$，使得当$t \geqslant C$时，有$\frac{\varphi(t)}{t} \geqslant a$。则在$[|\xi| \geqslant C]$上，我们有$|\xi| \leqslant \frac{\varphi \circ |\xi|}{a}$，故有

$$\int_{[|\xi|>C]} |\xi| dP \leqslant \frac{1}{a} \int_{[|\xi|>C]} \varphi \circ |\xi| dP \leqslant \frac{M}{a} = \varepsilon.$$

上一不等式对一切$\xi \in \mathscr{H}$成立，因此$\mathscr{H}$为一致可积族。定理证毕。

5.6 系 设$\mathscr{H} \subset L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$(p>1)$。如果$\sup\limits_{\xi \in \mathscr{H}} E[|\xi|^p] < \infty$，则$\mathscr{H}$为一致可积族。

证 令$\varphi(t) = t^p$，$t \geqslant 0$。由定理5.5立得系的结论。另一直接证明如下：令$a = \sup\limits_{\xi \in \mathscr{H}} E[|\xi|^p]$，则对$C>0$，有

$$\int_{[|\xi|>C]} |\xi| dP \leqslant \int_{[|\xi|>C]} \frac{|\xi|^p}{C^{p-1}} dP \leqslant \frac{1}{C^{p-1}} E[|\xi|^p]$$

$$\leqslant \frac{a}{C^{p-1}}$$

故由定义知，$\mathscr{H}$为一致可积族。

5.7 定理 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间，ξ为一随机变量，$(\mathscr{G}_i)_{i \in I}$为一族$\mathscr{F}$的子$\sigma$-代数。令$\eta_i = E[|\xi| \mid \mathscr{G}_i]$，则$(\eta_i, i \in I)$为一致可积族。

证 对任何$C>0$，我们有

$$P([|\eta_i|\geqslant C])\leqslant\frac{1}{C}E[|\eta_i|]\leqslant\frac{1}{C}E[|\xi|],\quad i\in I,$$

于是有(注意$[|\eta_i|\geqslant C]\in\mathscr{G}_i$)

$$\int_{[|\eta|\geqslant C]}|\eta_i|dP\leqslant\int_{[|\eta|\geqslant C]}|\xi|dP\leqslant\delta P([|\eta_i|\geqslant C])$$
$$+\int_{[|\xi|\geqslant\delta]}|\xi|dP\leqslant\frac{\delta}{C}E[|\xi|]+\int_{[|\xi|\geqslant\delta]}|\xi|dP.$$

对给定$\varepsilon>0$，取$\delta>0$,使得$\int_{[|\xi|\geqslant\delta]}|\xi|dP\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 则当$C\geqslant\frac{2\delta}{\varepsilon}\times E[|\xi|]$时，有$\int_{[|\eta_i|\geqslant C]}|\eta_i|dP\leqslant\varepsilon, i\in I$。这表明$(\eta_i, i\in I)$为一致可积族。证毕。

下面我们进一步研究一致可积随机变量族的性质。为此，先引进弱收敛概念。

5.8 定义 设ξ，ξ_1，ξ_2，…为可积随机变量。如果对一切有界随机变量η，有$\lim\limits_{n\to\infty}E[\xi_n\eta]=E[\xi\eta]$，则称$\xi_n$在$L^1$中**弱收敛**于$\xi$。显然，弱收敛极限是$a.s.$唯一确定的。

5.9 引理 设(ξ_n)为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上一可积随机变量序列，则为要ξ_n在L^1中弱收敛于某可积随机变量ξ，必须且只需对每个$A\in\mathscr{F}$，$E[\xi_nI_A]$的极限存在且有穷。

证 必要性显然。现证充分性.设引理的条件成立。令μ_n为ξ_n关于P的不定积分，则由第六章定理1.1知，$\sup\limits_n\|\mu_n\|=\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$. 此外，存在$\mathscr{F}$上一有限测度$\mu$，使对一切$A\in\mathscr{F}$，有$\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$，且有$\mu\ll P$。令$\xi=\frac{d\mu}{dP}$。则易见$\xi_n$弱收敛于$\xi$。(这里用到第二章习题1.14及$\sup\limits_n E[|\xi_n|]<\infty$这一事实.)证毕。

下一定理是著名的Dunford-Pettis **弱紧性准则**的一个部分(对概率论最有用的部分)。

5.10 定理 设$\mathscr{H}\subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$。则下列条件等价：

(1) $\mathscr{H}$为一致可积族；

(2) 对$\mathscr{H}$中的任一序列(ξ_n)，存在其子列(ξ_{n_k})，使之在L^1中弱收敛。

证 (1)⇒(2)。设$\mathscr{H}$为一致可积族。令(ξ_n)为$\mathscr{H}$中的一序列，$\mathscr{Y}=\sigma(\xi_1, \xi_2\cdots)$，则$\mathscr{Y}$为一可分的$\sigma$-代数，故存在一可数代数$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots\}$，使$\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{Y}$。由对角线法则，可选$(\xi_n)$的子列$(\xi_{n_k})$使得对一切$j\geqslant 1$，极限$\lim\limits_{n\to\infty} E[\xi_{n_k} I_{A_j}]$存在且有穷。令

$$\mathscr{H}=\{A\in\mathscr{Y}: \lim_{k\to\infty} E[\xi_{n_k} I_A]\text{存在且有穷}\}.$$

利用(ξ_{n_k})的一致可积性(见定理5.2)不难看出$\mathscr{H}$为一单调类.由于$\mathscr{A}\subset\mathscr{H}$，故由单调类定理知$\mathscr{H}=\mathscr{Y}$。于是由引理5.9知，$(\xi_{n_k})$在$L(\Omega, \mathscr{Y}, P)$中弱收敛，从而对一切有界$\mathscr{Y}$-可测随机变量$\eta$，极限$\lim E[\xi_{n_k}\eta]$存在且有穷。现设$A\in\mathscr{F}$，令$\eta=E[I_A|\mathscr{Y}]$，则有$E[\xi_{n_k}I_A]=E[E[\xi_{n_k}I_A|\mathscr{Y}]]=E[\xi_{n_k}\eta]$，从而极限$\lim\limits_{k\to\infty}[\xi_{n_k}I_A]$存在且有穷.再由引理5.9知，$(\xi_{n_k})$在$L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$中弱收敛。(1)⇒(2)得证。

(2)⇒(1)。我们用反证法。假定(1)不成立，则存在$\mathscr{H}$中一序列(ξ_n)，使得：或者$\lim\limits_{n\to\infty} E[|\xi_n|]=\infty$；或者存在某$\varepsilon>0$和$\mathscr{F}$中的一列集合$(A_n, n\geqslant 1)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=0$，且$\inf\limits_n\int_{A_n}|\xi_n|\geqslant\varepsilon$。由第六章定理1.1知，该序列不可能有弱收敛子列。(2)⇒

(1)得证.

习题

5.11 设(ξ_n)为一致可积随机变量序列，则有$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\cdot\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\right]=0$。

5.12 设$\mathscr{H}\subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，若$\mathscr{H}$满足如下条件：

$$A_n\in\mathscr{F},\ A_n\downarrow\phi\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\int_{A_n}|\xi|dP=0,$$

则对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得下列性质成立：

$$A\in\mathscr{F},\ P(A)<\delta\Rightarrow\sup_{\xi\in\mathscr{H}}\int_A|\xi|dP\leqslant\varepsilon.$$

5.13 设$\mathscr{H}_1$及$\mathscr{H}_2$为一致可积随机变量族。令

$$\mathscr{H}=\{\xi_1+\xi_2:\ \xi_1\in\mathscr{H}_1,\ \xi_2\in\mathscr{H}_2\},$$

则$\mathscr{H}$为一致可积族。

§6 解析集与 Choquet 容度

设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间.本节主要目的是向读者介绍$\mathscr{F}$解析集的概念和基本性质，并借助于 Choquet 容度证明$\mathscr{F}$-解析集是普遍可测集。

6.1 定义 设F为一抽象集合，$\mathscr{F}$为F上一集类，且$\phi\in\mathscr{F}$，令A为F的一子集.如果存在一可距离化紧拓扑空间E及$E\times F$的一子集$B\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，使得$A$为$B$在$F$上的投影，则称$A$为**$\mathscr{F}$-解析集**. 这里$\mathscr{K}(E)$表示$E$中紧子集全体，$\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F}=\{K\times G:\ K\in\mathscr{K}(E),\ G\in\mathscr{F}\}$。

今后我们用$\mathscr{A}(\mathscr{F})$表示$\mathscr{F}$-解析集全体，由定义立刻推知如下引理。

6.2 引理 设$\mathscr{F}$为F上一集类，且$\phi\in\mathscr{F}$。则

(1) $\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$;

(2) $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\Rightarrow$存在 $B\in\mathscr{F}_{\sigma}$，使 $B\supset A$；

(3) $F\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\Leftrightarrow F\in\mathscr{F}_{\sigma}$；

(4) 若 $\mathscr{G}$ 为 F 上一集类，且$\mathscr{G}\supset\mathscr{F}$，则$\mathscr{A}(\mathscr{G})\supset\mathscr{A}(\mathscr{F})$。

6.3 定理 设$\mathscr{F}$为 F 上一集类，且 $\phi\in\mathscr{F}$，则$\mathscr{A}(\mathscr{F})$对可列并及可列交运算封闭。

证 设 $A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，$n\geqslant 1$。依定义，对每个 n，存在一可距离化紧空间 E_n 及 $E_n\times F$ 的一子集$B_n\in(\mathscr{K}(E_n)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，使得 A_n 为 B_n 在 F 上的投影。令 E 为乘积拓扑空间$\prod\limits_{n}E_n$，则易知 E 是可距离化的紧空间。令 $C_n=E_1\times\cdots\times E_{n-1}\times B_n\times E_{n+1}\times\cdots$（下面简记为$\prod\limits_{m\neq n}E_m\times B_n$），则有

$$\bigcap_{n}A_n=\bigcap_{n}\pi(C_n)=\pi\Big(\bigcap_{n}C_n\Big),\tag{6.1}$$

这里π 表示 $E\times F$ 到 F 上的投影，并将 C_n 视为 $E\times F$ 的子集。设 $B_n=\bigcap\limits_{k}B_{n,k}$，其中 $B_{n,k}\in(K(E_n)\otimes\mathscr{F})_{\sigma}$，$k\geqslant 1$。由于$\prod\limits_{m\neq n}E_m\times B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma}$，故$C_n\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，从而$\bigcap\limits_{n}C_n\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$。由(6.1)知$\bigcap\limits_{n}A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，这表明$\mathscr{A}(\mathscr{F})$对可列交运算封闭。

现令 E 为(E_n)的拓扑和$\sum\limits_{n}E_n$ 的单点紧化，则E 为可距离化紧空间。我们将$\sum\limits_{n}(E_n\times F)$与$\Big(\sum\limits_{n}E_n\Big)\times F$ 视为同一，并用π表示 $E\times F$ 到 F 上的投影，则有

$$\pi\Big(\sum_{n}B_n\Big)=\bigcup_{n}A_n\tag{6.2}$$

由于$\sum_n B_{n,k} \in (\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_\sigma$，且$B_{n,k}\cap B_{m,j}=\phi$，$\forall n\neq m$，故有

$$\sum_n B_n=\sum_n\bigcap_k B_{n,k}=\bigcap_k\sum_n B_{n,k}\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}.$$

于是由(6.2)知，$\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$。这表明$\mathscr{A}(\mathscr{F})$对可列并运算封闭。定理证毕。

6.4 引理 设$\mathscr{F}$为F上一集类，且$\phi\in\mathscr{F}$，令E为一可距离化紧空间。则对一切$A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})$，$A$到$F$上的投影为$\mathscr{F}$-解析集。

证 依定义，存在一可距离化紧空间G及$(\mathscr{K}(G)\otimes\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$的一元素$A_1$，使得$A$为$A_1$在$E\times F$上的投影。但$G\times E$为可距离化紧空间，$\mathscr{K}(G)\otimes\mathscr{K}(E)\subset\mathscr{K}(G\times E)$，且$A_1$在$F$上的投影与$A$在$F$上的投影一致，故$\pi(A)$为$\mathscr{F}$-解析集(因为依定义$\pi(A_1)$为$\mathscr{F}$-解析集)。证毕。

6.5 定理 设$\mathscr{F}$为F上一集类，且$\phi\in\mathscr{F}$。则

(1) $\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))=\mathscr{A}(\mathscr{F})$；

(2) 为要$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{F})$，必须且只需下述条件被满足：$A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$。

证 (1) 设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{A}(\mathscr{F}))$，则存在一可距离化紧空间$E$及一$A'\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{A}(\mathscr{F}))_{\sigma\delta}$，使得$A$为$A'$在$F$上的投影.但显然有

$$\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F}),$$

故由定理6.3知$A'\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})$。因此，由引理6.4知$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$。(1)得证。

(2) 只需证充分性。设所说条件成立，令

$$\mathscr{G}=\{A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})：A^c\in\mathscr{A}(\mathscr{F})\},$$

则$\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$，并由定理6.3知，$\mathscr{G}$为$\sigma$-代数；故$\sigma(\mathscr{F})\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}$

$(\mathscr{F})$。证毕。

6.6 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，X为一具可数基的局部紧 Hausdorff 空间。则有

(1) $\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$，$\mathscr{A}(\mathscr{B}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$；

(2) $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F})$；

(3) 对任何$A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F})$，$\mathscr{A}$在$\Omega$上的投影为$\mathscr{F}$-解析集。

证 (1) 设$K\in\mathscr{K}(X)$，则K^c为开集。令$\mathscr{U}$为X的可数基，则对每个$x\in K^c$，存在开集U，其闭包为紧集，使得$x\in U\subset\overline{U}\subset K^c$。于是存在$V\in\mathscr{U}$，使得$\overline{V}$为紧集，且$x\in V\subset\overline{V}\subset K^c$。令$\mathscr{V}=\{V\in\mathscr{U}: \overline{V}$为紧集，且$\overline{V}\subset K^c\}$，则$\mathscr{V}$为可数类，且$K^c=\bigcup\limits_{V\in\mathscr{V}}\overline{V}$，故$K^c\in\mathscr{K}(X)_\sigma$。从而$K^c\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$。由于$\sigma(\mathscr{K}(X))=\mathscr{B}(X)$，故由定理 6.5 知，$\mathscr{K}(X)\subset\mathscr{B}(X)\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$，从而有$\mathscr{A}(\mathscr{B}(X))=\mathscr{A}(\mathscr{K}(X))$。

(2) $B\in\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F}$，则$B^c\in(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})_\sigma\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})$。又由于$\sigma(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})=\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F}$，故$\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F}\subset\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F}\subset\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})$(定理 6.5.(2))。因此由定理6.5.(1)知，$\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})=\mathscr{A}(\mathscr{B}(X)\times\mathscr{F})$。

(3) 由于X是σ-紧的(第五章习题 1.37)，存在$K_n\in\mathscr{K}(X)$，$n\geqslant1$，使$X=\bigcup\limits_n K_n$。对每个n，我们有(见习题 6.12)

$$
\begin{aligned}
&(K_n\times\Omega)\cap\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})\\
&\quad=\mathscr{A}((K_n\times\Omega)\cap(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F}))\\
&\quad=\mathscr{A}((K_n\cap\mathscr{K}(X))\otimes\mathscr{F}).
\end{aligned}
$$

由于K_n为可距离化紧空间，且$\mathscr{K}(K_n)=K_n\cap\mathscr{K}(X)$，故对任何$A\in\mathscr{A}(\mathscr{K}(X)\otimes\mathscr{F})$，$(K_n\times\Omega)\cap A$在$\Omega$上的投影为$\mathscr{F}$-解析

集(引理 6.4)．但 $A=\bigcup_{n}[(K_n\times\Omega)\cap A]$，故 A 在 Ω 上的投影也是$\mathscr{F}$-解析集。证毕。

下面我们定义 Choquet 容度。

6.7 定义 设$\mathscr{F}$为 F 上一集类，它对有限并及有限交运算封闭，且 $\phi\in\mathscr{F}$。令$\mathscr{A}(F)$表示 F 的所有子集全体，I 为$\mathscr{A}(\mathscr{F})$上的一非负集函数。称 I 为 F 上的一Choquet $\mathscr{F}$-**容度**，如果 I具有下列性质：

(1) I 单调非降：$A\subset B\Rightarrow I(A)\leqslant I(B)$；

(2) I 从下连续：$A_n\uparrow A\Rightarrow I(A_n)\uparrow I(A)$；

(3) I 沿$\mathscr{F}$从上连续：$A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\downarrow A\Rightarrow I(A_n)\downarrow I(A)$。$F$ 的子集 A 称为 **I-可容的**，如果

$$I(A)=\sup\{I(B):\ B\subset A,\ B\in\mathscr{F}_\delta\} \qquad (6.3)$$

6.8 引理 设 I 为 F 上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度，则$\mathscr{F}_{\sigma\delta}$中每个元素都是 I-可容的。

证 设 $A\in\mathscr{F}_{\sigma\delta}$，若 $I(A)=-\infty$，则 $I(\phi)=-\infty$。故(6.3)成立。现设 $I(A)>-\infty$，令 $A_{n,m}\in\mathscr{F}$，使得 $A=\bigcap_{n}\bigcup_{m}A_{n,m}$。由于$\mathscr{F}$对有限并运算封闭，故不妨设对固定 n，$(A_{n,m},m\geqslant1)$为非降序列。令 $A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{n,m}$，$n\geqslant1$。为证(6.3)，只需证明：对任何 $a<I(A)$，存在 $B\in\mathscr{F}_\delta$，$B\subset A$，使 $I(B)\geqslant a$。

现设 $a<I(A)$，由 I 的从下连续性，我们有

$$I(A)=I(A\cap A_1)=\lim_{m\to\infty}I(A\cap A_{1,m}).$$

故存在 m_1，使 $I(A\cap A_{1,m_1})>a$。这时有

$$I(A\cap A_{1,m_1})=I(A\cap A_{1,m_1}\cap A_2)=\lim_{m\to\infty}I(A\cap A_{1,m_1}\cap A_{2,m}),$$

于是存在 m_2，使 $I(A\cap A_{1,m_1}\cap A_{2,m_2})>a$。依此类推，我们得

到一自然数列$(m_k)_{k\geq 1}$，使得对一切$k\geqslant 1$，有

$$I(A\cap A_{1,m_1}\cap\cdots\cap A_{k,m_k})>a.$$

令$B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_{k,m_k}$，$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$，则$B_n\in\mathscr{F}$，$B_n\downarrow B\in\mathscr{F}_\delta$。由于$I(B_n)>a$，故由$I$沿$\mathscr{F}$的从上连续性知，$I(B)=\lim\limits_{n\to\infty}I(B_n)\geqslant a$。由于$B_n\subset A_n$，故$B\subset A$。引理证毕。

下一定理称为 Choquet **定理**

6.9 定理 设I为F上的 Choquet $\mathscr{F}$-容度，则一切$\mathscr{F}$-解析集都是I-可容的。

证 设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则存在一可距离化紧空间$E$及一$B\in(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$，使得$A=\pi(B)$。这里$\pi$为$E\times F$到$F$上的投影。令$\mathscr{H}=(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\cup f}$（$\mathscr{C}_{\cup f}$表示用有限并运算封闭$\mathscr{C}$所得集类），由于$\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F}$对有限交封闭，故$\mathscr{H}$亦然。此外有$\mathscr{H}_{\sigma\delta}=(\mathscr{K}(E)\otimes\mathscr{F})_{\sigma\delta}$。令

$$J(H)=I(\pi(H)),\ H\subset E\times F,$$

现证J为$E\times F$上的 Choquet $\mathscr{H}$-容度。显然J满足定义6.7中的性质(1)及(2)。剩下只需验证性质(3)。

设$H\in\mathscr{H}$，$H=\bigcup_{k=1}^{m}(C_k\times D_k)$，其中$C_k\in\mathscr{K}(E)$，$D_k\in\mathscr{F}$，则对$x\in\pi(H)$，我们有$(E\times\{x\})\cap H=C\times\{x\}$，其中$C\neq\phi$，且

$$C=\bigcup_{\{k:x\in D_k\}}C_k\in\mathscr{K}(E).$$

现设$B_n\in\mathscr{H}$，$B_n\downarrow$。令$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\pi(B_n)$，则对每个$n$，存在$C_n\in\mathscr{K}(E)$，使得

$$(E\times\{x\})\cap B_n=C_n\times\{x\}.$$

由于$B_n\downarrow$，故$C_n\downarrow$。又因C_n为E的非空紧子集，故$\bigcap_n C_n\neq\phi$，于是

$$(E\times\{x\})\cap\left(\bigcap_n B_n\right)=\bigcap_n C_n\times\{x\}\neq\phi.$$

即有$x\in\pi\left(\bigcap_n B_n\right)$. 这表明$\bigcap_n\pi(B_n)\subset\pi\left(\bigcap_n B_n\right)$. 但相反的包含关系恒成立，故有

$$\bigcap_n\pi(B_n)=\pi\left(\bigcap_n B_n\right) \tag{6.4}$$

由于$\pi(B_n)\in\mathscr{F}$，$\pi(B_n)\downarrow$，故由I沿$\mathscr{F}$的从上连续性得

$$J\left(\bigcap_n B_n\right)=I\left(\pi\left(\bigcap_n B_n\right)\right)=I\left(\bigcap_n\pi(B_n)\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}I(\pi(B_n))=\lim_{n\to\infty}J(B_n)$$

这表明J沿$\mathscr{H}$从上连续. 因此J为$E\times F$上的Choquet$\mathscr{H}$-容度.

下面借助于容度J证明A是I-可容的。由于$B\in\mathscr{H}_{\sigma\delta}$，故由引理6.8，$B$为$J$-可容的. 但由(6.4)看出：$C\in\mathscr{H}_\delta\Rightarrow\pi(C)\in\mathscr{F}_\delta$，于是有

$$I(A)=I(\pi(B))=J(B)=\sup\{J(C):\ C\subset B, C\in\mathscr{H}_\delta\}$$
$$=\sup\{I(\pi(C)):\ C\subset B, C\in\mathscr{H}_\delta\}\leqslant\sup\{I(D):$$
$$D\subset A,\ D\in\mathscr{F}_\delta\}.$$

但恒有$I(A)\geqslant\sup\{I(D):\ D\subset A,\ D\in\mathscr{F}_\delta\}$，故实际成立等号。这表明$A$是$I$-可容的。定理证毕。

作为Choquet定理的一个重要应用，我们将证明可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$中一切$\mathscr{F}$-解析集都是普遍可测的：

6.10 定理 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间，令$\widehat{\mathscr{F}}$表示$\mathscr{F}$的普遍完备化(即$\widehat{\mathscr{F}}=\bigcap_{P\in\mathscr{P}}\overline{\mathscr{F}}^P$，其中$\mathscr{P}$为$(\Omega,\mathscr{F})$上概率测度全体)，则

有$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\widehat{\mathscr{F}}\subset\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}})$。

证 设P为$(\Omega,\mathscr{F})$上一概率测度，令

$$I(A)=\inf\{P(B);\ B\supset A,B\in\mathscr{F}\},A\subset\Omega \tag{6.5}$$

易证I是Ω上的Choquet $\mathscr{F}$-容度。由定理6.9知，对一切$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，有(注意$\mathscr{F}=\mathscr{F}_\delta$)

$$I(A)=\sup\{P(B);\ B\subset A,\ B\in\mathscr{F}\} \tag{6.6}$$

由(6.5)及(6.6)知$A\in\overline{\mathscr{F}}^P$，但概率测度$P$是任意的，故$A\in\widehat{\mathscr{F}}$。这表明$\mathscr{A}(\mathscr{F})\subset\widehat{\mathscr{F}}$，进一步有

$$\widehat{\mathscr{F}}\subset\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}})\subset(\widehat{\mathscr{F}})^\wedge=\widehat{\mathscr{F}}$$

从而$\mathscr{A}(\widehat{\mathscr{F}})=\widehat{\mathscr{F}}$。证毕。

6.11 注 设$(\Omega,\mathscr{F})$为一可分且可离的可测空间.若存在$A\in\mathscr{A}(\mathscr{B}(R))$使$(\Omega,\mathscr{F})$与$(A,\mathscr{B}(A))$同构，则称$(\Omega,\mathscr{F})$为Souslin**可测空间**.由定理6.10知Souslin可测空间为Radon可测空间。

习题

6.12 设$\mathscr{F}$为F上一集类，且$\phi\in\mathscr{F}$，设A为F的一子集，令$A\cap\mathscr{F}=\{A\cap B:B\in F\}$，则有$\mathscr{A}(A\cap\mathscr{F})=A\cap\mathscr{A}(\mathscr{F})$.这里$A\cap\mathscr{F}$考虑为$A$上的集类。

6.13 设I为F上的Choquet $\mathscr{F}$-容度，则I为F上的Choquet $\mathscr{F}_\delta$-容度。

参 考 文 献

[1] Cohn, Donald L. Measure Theory, Birkhäuser, Boston. Basel. Stuttgart, 1980.

[2] Gänssler, P., Stute, W.: Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, 1977.

[3] Kallenberg, O.: Random Measure, Academic Press, New York, 1976.

[4] Ma, Zhiming(马志明): Some Results on Regular Conditional Probabilities, Acta Mathematica Sinica, New Series, Vol.1, No.4, 128-133, 1985.
[5] Mukherjea,A.,Pothoven, K.: Real and Functional Analysis, Second Edition, Part A: Real Analysis,Plenum Press, New York and London, 1984.
[6] 严士健、王隽骧、刘秀芳：概率论基础，科学出版社，1982.
[7] 严加安：鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.
[8] 严加安：Forme mesurable de la théorie des ensembles sousliniens, applications à la théorie de la mesure, Scientia Sinica, Vol. XVIII,444-463,1975.
[9] 严加安：论测度的扩张，东北师大学报(自然科学版)，1,1-11, 1984
[10] 严加安：论单调类定理，待发表。
[11] 严加安：An extension and a new version of the Riesz representation theorem, to appear.
[12] 中山大学《测度与概率基础》编写组：测度与概率基础，广东科技出版社，1984.

内 容 索 引

一 至 四 画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　　画

十 画 以 上

其　　它

其　　它